SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE SECONDA

VOL. IX.

CON 12 TAVOLE

NAPOLI
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE
DIRETTA DA E. DE RUBERTIS FU MICHELE

1899

ELENCO DEI PRESIDENTI

DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

1862. Costa Oronzio Gabriele
1863. Capocci Ernesto
1864. Gasparrini Guglielmo
1865. Padula Fortunato
1866. De Luca Sebastiano
1867. De Gasparis Annibale
1868. Palmieri Luigi
1869. Trudi Nicola
1870. De Martini Antonio
1871. Padula Fortunato
1872. Guiscardi Guglielmo
1873. Fergola Emanuele
1874. Palmieri Luigi
1875. Padula Fortunato
1876. Panceri Paolo
1877. Trudi Nicola
1878. Cesati Vincenzo
1879. De Gasparis Annibale
1880. Costa Achille
1881. Padula Fortunato
1882. Albini Giuseppe
1883. Trudi Nicola
1884. De Martini Antonio
1885. Fergola Emanuele
1886. Govi Gilberto
1887. Battaglini Giuseppe
1888. De Martini Antonio
1889. Padelletti Dino
1890. Costa Achille
1891. Fergola Emanuele
1892. Palmieri Luigi
1893. Battaglini Giuseppe
1894. Trinchese Salvatore
1895. Fergola Emanuele
1896. Villari Emilio
1897. Siacci Francesco
1898. Albini Giuseppe
1899. Fergola Emanuele

ELENCO DEI SOCII

NELL'APRILE DEL 1899

UFFICIO DI PRESIDENZA

Presidente — FERGOLA EMANUELE

Vice-Presidente — NICOLUCCI GIUSTINIANO

Segretario — PINTO LUIGI

Tesoriere — OGLIALORO-TODARO AGOSTINO

SOCII ORDINARII

SEZIONE DELLE SCIENZE FISICHE

Socii residenti

con la data della loro nomina

1. De Martini Antonio; 24 settembre 1861.
2. Nicolucci Giustiniano; 24 settembre 1861.
3. Albini Giuseppe; 13 giugno 1868.
4. Oglialoro-Todaro Agostino; 12 agosto 1882.
5. Bassani Francesco; 10 dicembre 1887.
6. Villari Emilio; 14 dicembre 1889.

7. Paladino Giovanni; 10 giugno 1893.

8. Delpino Federico; 2 giugno 1894.

9. Grassi Guido; 20 febbraio 1897.

10. Della Valle Antonio; 12 febbraio 1898.

11. . . . .

12. . . . .

Socii non residenti

13. Cannizzaro Stanislao; 10 febbraio 1872.

14. Taramelli Torquato; 10 dicembre 1892.

15. Pacinotti Antonio; 9 aprile 1898.

16. . . . .

SEZIONE DELLE SCIENZE MATEMATICHE

Socii residenti

17. Fergola Emanuele; 19 novembre 1861.

18. Capelli Alfredo; 12 marzo 1887.

19. Pinto Luigi; 8 giugno 1889.

20. Cesàro Ernesto; 3 dicembre 1892.

21. Siacci Francesco; 17 novembre 1894.

22. Del Pezzo Pasquale; 20 novembre 1897.

Socii non residenti

23. Cremona Luigi; 12 febbraio 1881.

24. Schiaparelli Giovanni; 9 aprile 1898.

SOCII STRANIERI

1. Bunsen Roberto; 9 aprile 1870.

2. Hermite Carlo; 9 aprile 1881.

3. Lord Kelvin (Thomson Guglielmo); 1° aprile 1893.

4. Weismann Augusto; 1° aprile 1893.

5. Auwers Arturo; 9 marzo 1895.

6. Gaudry Alberto; 9 novembre 1895.

7. Poincaré Giulio Enrico; 20 novembre 1897.

8. Dohrn Antonio; 4 dicembre 1897.

SOCII CORRISPONDENTI NAZIONALI

SEZIONE DELLE SCIENZE FISICHE

1. Palmeri Paride; 10 dicembre 1870.

2. Gemmellaro Gaetano Giorgio; 8 dicembre 1877.

3. Comes Orazio; 10 novembre 1883.

4. Paternò Emanuele; 10 novembre 1883.

5. Capellini Giovanni; 14 febbraio 1885.

6. Blaserna Pietro; 2 marzo 1889.

7. Cossa Alfonso; 2 marzo 1889.

8. Scacchi Eugenio; 13 luglio 1889.

9. Semmola Eugenio; 16 dicembre 1893.

10. Piutti Arnaldo; 4 dicembre 1897.

11. Mosso Angelo; 9 aprile 1898.

12. Jatta Giuseppe; 9 aprile 1898.

13. . . . .

SEZIONE DELLE SCIENZE MATEMATICHE

---

14. Beltrami Eugenio; 1° dicembre 1877.

15. D'Ovidio Enrico; 12 febbraio 1881.

16. Salvatore-Dino Nicola; 12 febbraio 1881.

17. Torelli Gabriele; 14 dicembre 1889.

18. Bianchi Luigi; 9 agosto 1890.

19. Angelitti Filippo; 9 aprile 1898.

20. Masoni Udalrigo; 9 luglio 1898.

Indice delle Materie

Vol. IX, Serie 2.ª N.º 1.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

AUMENTI IN PESO E PERDITE INVISIBILI DEGLI ANIMALI IN VIA DI SVILUPPO

MEMORIA

di GIUSEPPE ALBINI

presentata nell'adunanza del dì 10 Aprile 1897.

L'aumento giornaliero in altezza, volume e peso d'un animale in via di sviluppo (aumento segnato dalla differenza in meno fra il peso degli esiti rispetto a quello degli introiti) è dovuto all'attività anabolica, per la quale una porzione degli introiti viene assimilata, organizzata, immagazzinata.

Anche nell'adulto, nel quale, d'ordinario in condizioni fisiologiche, la somma degli esiti è uguale a quella degli introiti, pur nondimeno continua l'attività anabolica; se non vi ha differenza fra il dare e l'avere, ciò proviene dal fatto che in compenso della parte dell'introito organizzato si stacca dal corpo un'eguale quantità di materia, parte sotto forma di tessuto formatosi in precedenza (specialmente elementi epidermoidali, cornei, epiteliali) parte sotto forma di detrito o degenerazione d'elementi (muco, grasso), e parte, in fine, di materia, che, pur non avendo assunte forme elementari nello stretto senso della parola, potevasi però considerare assimilata, perchè costituente una integrante di umori (sangue, linfa, liquido interstiziale de' tessuti). L'esistenza, la continuazione, per così dire, del potere assimilatore nell'adulto, viene poi confermata da quanto si osserva specialmente ne' convalescenti di malattie acute, le quali furono causa di forte dimagramento, di debolezza muscolare e nervosa, d'impoverimento di sangue e di riduzione del peso. In poche settimane di dieta conveniente, d'igiene opportuna, anche l'adulto va reintegrando il peso perduto.

Tale potere anabolico dell'animale, tanto in via di sviluppo che adulto, si manifesta su tutti gli elementi degli introiti, non escluso l'ossigeno, e fors'anco l'azoto dell'aria inspirata; chè anzi, in talune condizioni speciali la differenza in meno degli esiti sugli introiti, l'aumento in peso dell'animale, è dovuto unicamente alla fissazione dell'uno, (ossigeno) e fors'anco dell'altro (azoto).

Tale è appunto il fatto che si osserva negli animali ibernanti, nei quali durante il

letargo e fra un'emissione e l'altra di feccie ed urine, si osserva costantemente un aumento di peso.

Nell'inverno del 1895-96 ebbi l'opportunità di constatare ripetutamente tale aumento di peso durante il letargo di un bel esemplare di Eliomys Nitela; raffreddando o riscaldando l'ambiente ho potuto alternare il letargo alla veglia. Finalmente lo uccisi durante il letargo e mentre il suo peso aumentava; appena ucciso incominciò a diminuire di peso e continuò in modo uniforme finchè lo levai dalla bilancia perchè incominciava la putrefazione.

Questi fatti di aumento durante il letargo e di diminuzione dopo morte sono indubbiamente dimostrati dai tracciati ottenuti, avendo eseguite le esperienze col metodo grafico. Resta pertanto provato che durante il letargo l'immagazzinamento di Ossigeno compensa e supera la perdita di Anidride carbonica e quella del vapore acqueo, essendo impossibile ammettere che la perdita d'acqua od evaporazione del corpo morto sia maggiore di quella del vivente.

Questa ed altre osservazioni da me fatte [1]) che rivelano l'attività anabolica dell'organismo (massima ne' momenti d'inazione muscolare) mi fecero sorgere l'idea di cercare negli animali in via di sviluppo (ne' quali il potere anabolico è molto energico e continuo) quali fossero le condizioni ed i momenti che lo favoriscono. Incominciai pertanto col determinare in due cagnolini come si effettuano le perdite invisibili nelle diverse ore del giorno ed a differente distanza dai pasti.

Perdite invisibili di peso della cagnolina

Peso iniziale Gr. 1750

20/2	Ore 9.10	Digiuna	Gr. 1760						
	» 11.55	pesa	» 1743	perdita	Gr. 17	Ore	2.45	Gr.	17
	» 13.10	Pasto	» 1872	aumento	» 129				
	» 16.10	pesa	» 1847	perdita	» 25	»	3.—	»	25
23/2	» 9.10	Digiuna	» 1754						
	» 12.10	pesa	» 1747	perdita	» 7	»	3.—	»	7
	» 14.—	Pasto	» 1982	aumento	» 235				
	» 15.30	pesa	» 1975	perdita	» 7	»	1.30	»	7
24/2	» 9.35	Digiuna	» 1817						
	» 12.35	pesa	» 1800	perdita	» 17	»	3.—	»	17
	» 13 55	Pasto	» 1964	aumento	» 164				
	» 15.25	pesa	» 1952	perdita	» 12	»	2.30	»	12
25/2	» 9.15	Digiuna	» 1843						
	» 12.15	pesa	» 1818	perdita	» 25	»	3.—	»	25
	» 13.15	Pasto	» 2077	aumento	» 259				
	» 15.35	pesa	» 2047	perdita	» 30	»	2.20	»	30

[1]) Ricordo a mo' d'esempio le due mie note, pubblicate ne' Rendiconti della nostra Accademia (Agosto 1871 ed Ottobre 1883) riflettenti due casi di grande aumento in volume e peso con eccessivo, mostruoso impinguamento, raggiunto in pochi mesi da due giovani galline alle quali avevo asportato gli emisferi cerebrali riducendole allo stato di veri automi, destituiti d'ogni volontà di movimento ed incapaci ad alimentarsi da se.

[illegible]/3	Ore	8.40	Digiuna	Gr. 2031						
	»	11.40	pesa	» 2024	perdita	Gr. 7	Ore	3.—	Gr.	7
	»	13.—	Pasto	» 2165	aumento	» 141				
	»	14.23	pesa	» 2148	perdita	» 16.5	»	1.23	»	16
[illegible]/3	»	12.05	5 ore dal pasto	» 2634						
	»	15.05	pesa	» 2615	perdita	» 19	»	3.—	»	19
	»	8.—	Pasto	» 2629						
	»	11.—	pesa	» 2609	perdita	» 20	»	3.—	»	20
11/3	»	11.30	4 ore dal pasto	» 2685						
	»	14.30	pesa	—	—	—		—		—
	»	7.30	Pasto	» 2710						
	»	10.30	pesa	» 2681	perdita	» 29	»	3.—	»	29
13/3	»	12.—	5 ore dal pasto	» 2772						
	»	15.—	pesa	» 2756	perdita	» 16	»	3.—	»	16
	»	7.—	Pasto	» 2796						
	»	10.—	pesa	» 2764	perdita	» 32	»	3.—	»	32
14/3	»	12.25	5 ore dal pasto	» 2773						
	»	15.25	pesa	» 2757	perdita	» 16	»	3.—	»	16
	»	7.—	Pasto	» 2798						
	»	10.—	pesa	» 2766	perdita	» 32	»	3.—	»	32
15/3	»	12.25	5 ore dal pasto	» 2756						
	»	15.25	pesa	» 2736	perdita	» 20	»	3.—	»	20
	»	8.20	Pasto	» 2788						
	»	11.20	pesa	» 2750	perdita	» 30	»	3.—	»	30
17/3	»	14.—	7 ore dal pasto	» 2613						
	»	17.—	pesa	» 2603	perdita	» 10	»	3.—	»	10
	»	10.30	4 ore dal pasto	» 2662						
	»	13.30	pesa	» 2645	perdita	» 17	»	3.—	»	17
	»	7.—	Pasto	» 2748						
	»	10.—	pesa	» 2728	perdita	» 20	»	3.—	»	20
19/3	»	14 —	7 ore dal pasto	» 2920						
	»	17.—	pesa	» 2909	perdita	» 11	»	3.—	»	11
	»	10.30	4 ore dal pasto	» 2980						
	»	13.30	pesa	» 2970	perdita	» 10	»	3.—	»	10
	»	7.—	Pasto	» 3139						
	»	10.—	pesa	» 3102	perdita	» 37	»	3.—	»	37
21/3	»	14.—	7 ore dal pasto	» 2879						
	»	17.—	pesa	» 2869	perdita	» 10	»	3.—	»	10
	»	10.30	4 ore dal pasto	» 2924						
	»	13.30	pesa	» 2915	perdita	» 9	»	3.—	»	9
	»	7.—	Pasto	» 2991						
	»	10.—	pesa	» 2980	perdita	» 11	»	3.—	»	11
[illegible]/3	»	14.—	7 ore dal pasto	» 3057						
	»	17.—	pesa	» 3050	perdita	» 7	»	3.—	»	7
	»	10.30	4 ore dal pasto	» 3116						

23/3	Ore 13.30	pesa	Gr. 3103	perdita	Gr. 13	Ore 3.—	Gr. 13
	» 7.—	Pasto	» 3195				
	» 10.—	pesa	» 3185	perdita	» 10	» 3.—	» 10
25/3	» 14.—	7 ore dal pasto	» 3045				
	» 17.—	pesa	» 3032	perdita	» 13	» 3.—	» 13
	» 10.30	4 ore dal pasto	» 3087				
	» 13.30	pesa	» 3075	perdita	» 12	» 3.—	» 12
	» 7.—	Pasto	» 3130				
	» 10.—	pesa	» 3124	perdita	» 6	» 3.—	» 6
27/3	» 14.—	7 ore dal pasto	» 3206				
	» 17.—	pesa	» 3194	perdita	» 12	» 3.—	» 12
	» 10.30	4 ore dal pasto	» 3256				
	» 13.30	pesa	» 3244	perdita	» 12	» 3.—	» 12
	» 7.—	Pasto	» 3300				
	» 10.—	pesa	» 3286	perdita	» 14	» 3.—	» 14
29/3	» 14.—	7 ore dal pasto	» 3188				
	» 17.—	pesa	» 3177	perdita	» 11	» 3.—	» 11
	» 10.30	4 ore dal pasto	» 3241				
	» 13.30	pesa	» 3227	perdita	» 14	» 3.—	» 14
	» 7.—	Pasto	» 3294				
	» 10.—	pesa	» 3284	perdita	» 10	» 3.—	» 10
31/3	» 7.—	Digiuna	» 3241				
	» 10.—	pesa	» 3207	perdita	» 34	» 3.—	» 34
	» 14.—	4 ore dal pasto	» 3393				
	» 17.—	pesa	» 3380	perdita	» 13	» 3.—	» 13
	» 10.30	Pasto	» 3470				
	» 13.30	pesa	» 3448	perdita	» 22	» 3.—	» 22

RIASSUNTO

Digiuna		Immed. dopo il pasto	
Ore 2.45	Gr. 17	Ore 3.—	Gr. 25
» 3.—	» 7	» 1.50	» 7
» 3.—	» 17	» 2.30	» 12
» 3.—	» 25	» 2.20	» 30
» 3.—	» 7	» 1.23	» 16
» 3.—	» 19	» 3.—	» 20
» 3.—	» 16	» 3.—	» 29
» 3.—	» 16	» 3.—	» 32
» 3.—	» 20	» 3.—	» 32
» 3.—	» 10	» 3.—	» 30
» 3.—	» 17	» 3.—	» 20
» 3.—	» 11	» 3.—	» 37
» 3.—	» 10	» 3.—	» 11
» 3.—	» 10	» 3.—	» 10
» 3.—	» 9	» 3.—	» 6
» 3.—	» 7	» 3.—	» 14
» 3.—	» 13	» 3.—	» 10
» 3.—	» 13	» 3.—	» 22
» 3.—	» 12	Ore 50.03	Gr. 363
» 3.—	» 12		
» 3.—	» 12		
» 3.—	» 11		
» 3.—	» 14		
» 3.—	» 34		
» 3.—	» 13		
Ore 74.45	Gr. 352		

74.45 : 352 = Gr. 4.7 all'ora. 50.03 : 363 = Gr. 7.2 all'ora.

Perdite invisibili di peso del cagnolino

Peso iniziale Gr. 1630

3/3	Ore 8.30	Digiuno	Gr. 1778				
	» 11.30	pesa	» 1777	perdita Gr. 1	Ore 3.—	Gr. 1
	» 13.40	Pasto	» 1923	aumento » 146		
	» 16.40	pesa	» 1920	perdita » 3	» 3.—	» 3
5/3	» 8.—	Digiuno	» 1903			
	» 11.—	pesa	» 1900	perdita » 3	» 3.—	» 3
	» 13.—	Pasto	» 1985	aumento » 85		
	» 16.—	pesa	» 1978	perdita » 7	» 3.—	» 7

10/3	Ore	12.30	6 ore dal pasto	Gr.	2260						
	»	15.30	pesa	»	2250	perdita	Gr.	10	Ore 3.—	Gr.	10
	»	8.15	Pasto	»	2341						
	»	11.15	pesa	»	2320	perdita	»	21	» 3.—	»	21
12/3	»	12.30	5 ore dal pasto	»	2368						
	»	15.30	pesa	»	2357	perdita	»	11	» 3.—	»	11
	»	8.—	Pasto	»	2393						
	»	11.—	pesa	»	2382	perdita	»	11	» 3.—	»	11
14/3	»	12.40	5 ore dal pasto	»	2391						
	»	15.40	pesa	»	2381	perdita	»	10	» 3.—	»	10
	»	8.15	Pasto	»	2480						
	»	11.15	pesa	»	2469	perdita	»	11	» 3.—	»	11
16/3	»	12.—	5 ore dal pasto	»	2461						
	»	15.—	pesa	»	2441	perdita	»	20	» 3.—	»	20
	»	8.—	Pasto	»	2584						
	»	11.—	pesa	»	2570	perdita	»	14	» 3.—	»	14
18/3	»	14.—	7 ore dal pasto	»	2409						
	»	17.—	pesa	»	2399	perdita	»	10	» 3.—	»	10
	»	10.30	4.30 dal pasto	»	2442						
	»	13.30	pesa	»	2434	perdita	»	8	» 3.—	»	8
	»	7.—	Pasto	»	2480						
	»	10.—	pesa	»	2475	perdita	»	5	» 3.—	»	5
20/3	»	14.—	7 ore dal pasto	»	2570						
	»	17.—	pesa	»	2559	perdita	»	11	» 3.—	»	11
	»	10.30	4 ore dal pasto	»	2614						
	»	13.30	pesa	»	2579	perdita	»	35	» 3.—	»	35
	»	7.—	Pasto	»	2677						
	»	10.—	pesa	»	2652	perdita	»	25	» 3.—	»	25
22/3	»	14.—	7 ore dal pasto	»	2546						
	»	17.—	pesa	»	2543	perdita	»	3	» 3.—	»	3
	»	10.30	4 ore dal pasto	»	2574						
	»	13.30	pesa	»	2567	perdita	»	7	» 3.—	»	7
	»	7.—	Pasto	»	2593						
	»	10.—	pesa	»	2585	perdita	»	8	» 3.—	»	8
24/3	»	14.—	7 ore dal pasto	»	2424						
	»	17.—	pesa	»	2417	perdita	»	7	» 3.—	»	7
	»	10.30	4 ore dal pasto	»	2430						
	»	13.30	pesa	»	2424	perdita	»	6	» 3.—	»	6
	»	7.—	Pasto	»	2489						
	»	10.—	pesa	»	2479	perdita	»	10	» 3.—	»	10
[illegible]/	»	7.—	Pasto	»	2596						
	»	10.—	pesa	»	2584	perdita	»	12	» 3.—	»	12
[illegible]/	»	14.—	7 ore dal pasto	»	2485						
	»	17.—	pesa	»	2476	perdita	»	9	» 3.—	»	9
	»	10.30	4 ore dal pasto	»	2514						

28/3	Ore 13.30	pesa	Gr. 2507	perdita	Gr. 7	Ore 3.—	Gr. 7
	» 7.—	Pasto	» 2545				
	» 10.—	pesa	» 2537	perdita	» 8	» 3.—	» 8
30/3	» 14.—	7 ore dal pasto	» 2499				
	» 17.—	pesa	» 2488	perdita	» 11	» 3.—	» 11
	» 10.30	4 ore dal pasto	» 2545				
	» 13.30	pesa	» 2535	perdita	» 10	» 3.—	» 10
	» 7.—	Pasto	» 2584				
	» 10.—	pesa	» 2571	perdita	» 13	» 3.—	» 13
1/4	» 7.—	Digiuno	» 2505				
	» 10.—	pesa	» 2495	perdita	» 10	» 3.—	» 10
	» 10.30	Pasto	» 2630				
	» 13.30	pesa	» 2620	perdita	» 10	» 3.—	» 10

RIASSUNTO

Digiuno		Imm. dopo il pasto	
Ore 3.—	Gr. 1.0	Ore 3.—	Gr. 2.5
» 3.—	» 3.0	» 3.—	» 7.0
» 3.—	» 10.0	» 3.—	» 21.0
» 3.—	» 11.0	» 3.—	» 11.0
» 3.—	» 10.0	» 3.—	» 11.0
» 3.—	» 20.0	» 3.—	» 14.0
» 3.—	» 10.0	» 3.—	» 5.0
» 3.—	» 8.0	» 3.—	» 25.0
» 3.—	» 11.0	» 3.—	» 8.0
» 3.—	» 35.0	» 3.—	» 10.0
» 3.—	» 3.0	» 3.—	» 12.0
» 3.—	» 7.0	» 3.—	» 8.0
» 3.—	» 7.0	» 3.—	» 13.0
» 3.—	» 6.0	» 3.—	» 10.0
» 3.—	» 9.0		
» 3.—	» 7.0	Ore 42.—	Gr. 157.5
» 3.—	» 11.0		
» 3.—	» 10.0		
» 3.—	» 10.0		
Ore 57.—	Gr. 189.0		

57 : 189 = Gr. 3 3 all'ora. 42 : 157 = Gr. 3.8 all'ora.

Dai quadri su esposti risulta che la cagnolina (del peso iniziale di Grammi 1750 e che alla fine Marzo, tre ore dopo del pasto, pesava Grammi 3448) a digiuno o nelle ore lontane dal pasto subiva una perdita invisibile di Grammi 4.7 in media all'ora, laddove immediatamente dopo il pasto detta perdita saliva a Grammi 7.2 in media all'ora.

Invece il cagnolino (che il 2 Febbraio pesava Grammi 1630 ed il 1° Aprile, tre ore dopo del pasto, era di Grammi 2620) aveva subita una perdita invisibile soltanto di Grammi 3.8 in media all'ora dopo del pasto e di Grammi 3.2 a digiuno. Siccome però questo animale era più delicato e meno vorace dell'altro e cresceva stentatamente [1]), pensai di lasciare ad ambedue maggiore libertà, di nutrirli bene a sazietà con zuppa di pane in brodo e carne e di sottoporli non come per lo innanzi in giorni alterni ma solo a lunghi intervalli all'esperimento, che consisteva nel chiuderli in gabbia metallica a digiuno od immediatamente dopo del pasto, pesarli appena postivi e tre ore dopo per segnarne la differenza o la perdita invisibile subita. Eccone ora i risultati:

Cagnolina — Digiuna (in ore tre, totale ore 18)	Cagnolina — Dopo del pasto	Cagnolino — Digiuno (in ore tre, totale ore 21)	Cagnolino — Dopo del pasto
		Gram. 9	Gram. 13
Gram. 10	Gram. 17	» 9	» 23
» 13	» 15	» 9	» 13
» 15	» 10	» 9	» 23
» 18	» 14	» 10	» 12
» 18	» 28	» 8	» 18
» 11	» 22	» 17	» 13
Gram. 85	Gram. 106	Gram. 71	Gram. 115

Naturalmente tanto negli esperimenti del Febbraio e Marzo, quanto in questi ultimi dell'Aprile e de' primi Maggio, variai le ore del pasto e di conseguenza anche quelle del digiuno, per eliminare ogni dubbio sull'influenza dell'ora del giorno sulle perdite invisibili.

Così talvolta gli animali ricevevano il pasto al mattino di buon'ora, altre volte verso le 10, ed altre verso le 14.

Da queste determinazioni, fatte di tanto in tanto, risulta che le perdite medie a digiuno si mantennero ne' due animali quali erano prima, diminuirono relativamente le perdite medie dopo del pasto nella cagnolina (che da 7.2 si ridussero a circa 6 grammi all'ora). Nel cagnolino invece, le cui condizioni generali si erano assai migliorate, le perdite immediatamente dopo il pasto si elevarono ad una media di Grammi 5.5 all'ora.

Resta pertanto confermato:

1° Che negli animali in via di sviluppo, purchè in buone condizioni di salute, le perdite d'acqua allo stato di vapore, per la via de' polmoni e della pelle, sono più sensibili nelle ore dopo del pasto che a digiuno.

2° Che dette perdite non crescono in ragione dello sviluppo dell'animale, cioè dell'aumento in volume e peso dello stesso, avendo trovato pressochè uguali le perdite invisibili medie alla fine di Marzo, quando gli animali pesavano rispettivamente Grammi 3448 e 2640, e nel Maggio quando il primo pesava Grammi 4225 e l'altro 2895.

[1]) Verso la metà di Marzo sembrava perfino che le sue perdite invisibili si verificassero in senso opposto che nell'altro, cioè maggiori a digiuno che dopo i pasti.

Cogliendo occasione da queste esperienze sulle perdite invisibili dei due animali, ho potuto anche stabilire approssimativamente l'aumento medio giornaliero del loro peso.

Eccone infatti i risultati, coll'osservazione che si tratta di due cani di piccola taglia e di razza bastarda.

La cagnolina del peso iniziale ($^{10}/_{2}$ 1897) di	Gram.	1750
aveva raggiunto il giorno $^{14}/_{5}$ 1897 il peso di	»	3988
L'aumento totale in 93 giorni fu pertanto di	»	2238

corrispondente ad un'aumento medio giornaliero di 24 Gram. in circa.

Il cagnolino del peso iniziale ($^{10}/_{2}$ 1897) di	Gram.	1630
aveva raggiunto il giorno $^{3}/_{5}$ 1897 il peso di	»	3143
L'aumento, in questi 92 giorni fu di	»	1513

equivalente ad un'aumento medio giornaliero di 16 Gram. in circa.

Però vi furono de' periodi con forte aumento medio giornaliero ed altri in cui l'aumento giornaliero fu inferiore alla media totale.

Il periodo di maggiore aumento fu quello nel quale gli animali vennero alimentati con molta carne e poco pane in zuppa.

I risultati sarebbero i seguenti:

La cagnolina ne' primi	15 giorni	($^{10}/_{2}$-$^{25}/_{2}$)	segnò una media giornaliera di	Gram.	20
» » successivi	14 »	($^{25}/_{2}$-$^{11}/_{3}$)	» »	» »	45
» » »	14 »	($^{11}/_{3}$-$^{25}/_{3}$)	» »	» »	31
» » »	14 »	($^{25}/_{3}$-$^{8}/_{4}$)	» »	» »	33
» » »	36 »	($^{8}/_{4}$-$^{14}/_{5}$)	» »	» »	11

Il cagnolino invece ne' primi	21 giorni	($^{10}/_{2}$-$^{3}/_{3}$)	segnò un aumento medio giorn. di	Gr.	14
» » » successivi	15 »	($^{3}/_{3}$-$^{18}/_{3}$)	» »	» »	37
» » » »	18 »	($^{18}/_{3}$-$^{5}/_{4}$)	» »	» »	11
» » » »	38 »	($^{5}/_{4}$-$^{13}/_{5}$)	» »	» »	16

Durante la stampa della prima parte delle indagini sulle condizioni e sui momenti favorevoli al processo d'assimilazione nei mammiferi in via di sviluppo, ebbi occasione d'istituire analoghe determinazioni sulle perdite invisibili d'alcune civette appena nate ed incapaci ad abbandonare il nido.

Naturalmente, trattandosi d'uccelli delicatissimi e che hanno rapido sviluppo [1]), le esperienze ebbero breve durata (dal 5 al 14 Giugno) e dovettero subire una modifica; gli animali venivano alimentati e poscia si ponevano sulla bilancia; le loro perdite invisibili vennero raccolte nei due seguenti quadri, in ognuno de' quali figurano determinazioni di perdite in ore diurne e notturne.

---

[1]) In tre giorni aumentarono di Gr. 82 avendo raggiunto Gr. 314 da Gr. 232 che avevano il primo giorno.

Eccone i risultati:

	Dal pasto			
Ore	6.—	Perdita	Gr.	14.5
»	2.45	»	»	4.0
»	5.—	»	»	5.6
»	5.—	»	»	9.0
»	5.—	»	»	5.4
»	4.50	»	»	8.5
»	5.—	»	»	4.6
»	4.—	»	»	5.0
»	1.30	»	»	3.2
»	2.30	»	»	12.0
»	3.25	»	»	3.0
»	7.15	»	»	7.1
»	3.—	»	»	1.7
»	3.—	»	»	2.0
»	7.45	»	»	10.7
»	2.30	»	»	3.0
»	1.25	»	»	2.0
»	3.20	»	»	4.5
»	3.20	»	»	6.0
Ore	76.35		Gr.	111.8

76.35 : 111.8 = Gr. 1.44 all'ora.

	Dal pasto			
Ore	15.—	Perdita	Gr.	23.0
»	14.15	»	»	16.0
»	12.15	»	»	15.4
»	12.25	»	»	19.5
»	8.55	»	»	1.5
»	9.10	»	»	8.4
»	16.—	»	»	3.5
Ore	88.—		Gr.	87.3

88 : 87.3 = Gr. 0.9 all'ora.

Senza tener calcolo che nel quadro a destra quella parte delle perdite rappresentata dall'evaporazione degli escrementi è maggiore che nel quadro a sinistra, perchè dopo ogni pesata si rinnovò il nido, pur non di meno risulta che nelle diciannove determinazioni nelle ore vicine al pasto si ebbero Grammi 111.8 di perdita in Ore 76.45 cioè Grammi 1.4 all'ora. Nelle sette determinazioni comprese nel quadro a destra la perdita fu di Grammi 87.3 in ore 88, cioè meno d'un Grammo all'ora.

Riducendo a chilogrammo il peso delle Civette (nei primi giorni Grammi 250 in media) dopo del pasto la perdita invisibile sarebbe di quasi 6 Grammi all'ora e nelle ore lontane sarebbe minore di Grammi 4 all'ora.

Resta pertanto confermato, anche per gli uccelli da nido, che le perdite d'acqua per evaporazione o perspirazione, vanno scemando in ragione della distanza dai pasti.

finita di stampare il dì 6 Luglio 1897

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SOPRA UNA PARTICOLARE VARIETÀ DEL 27° ORDINE
NELLO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI

MEMORIA

di ALBERTO BRAMBILLA

presentata nell'adunanza del dì 3 Aprile 1897.

« Lo spazio illimitato, senza alcun vincolo al numero di dimen-
« sioni, è l'ambiente in cui oramai si debbono considerare
« le forme geometriche ».

CORRADO SEGRE—*Rivista di mat. di Peano*, vol. I, p. 63.

In una Nota del vol. XXXV (1897) del *Giornale di Matematiche* di Battaglini io ho studiata la varietà dell'ottavo ordine di uno spazio lineare a quattro dimensioni, la quale corrisponde alla superficie di Steiner dello spazio ordinario, se a base del confronto di tali forme si assumano le loro rappresentazioni univoche sovra spazi lineari.

È noto che il sistema rappresentativo della superficie di Steiner sul piano si ottiene combinando linearmente quattro *rette doppie* del piano, tre delle quali non appartengano ad un fascio: e la menzionata varietà dell'ottavo ordine si rappresenta sullo spazio ordinario mediante il sistema ∞^4 di quadriche, cui appartengano cinque *piani doppi,* quattro dei quali non siano in una stella.

D'altronde, pur rimanendo nello spazio ordinario, io avevo indicata già da anni *) un'estensione in altro verso alla teoria della superficie di Steiner, studiando le superficie rappresentate nel piano da sistemi lineari ∞^3 di curve d'ordine n definiti come combinazione lineare di quattro rette n-ple, tre delle quali non siano in un fascio. Per $n=2$ si ha la superficie di Steiner; per $n=3$ si ha una superficie Φ del 9° ordine, un cenno della quale, specialmente rispetto alla sua curva multipla, io già diedi in una breve Nota pubblicata pure nel suddetto *Giornale* **).

Nel presente lavoro faccio per questa superficie Φ la estensione allo spazio a quattro dimensioni proprio come quella che feci per la superficie di Steiner.

*) *Atti della R. Accad. d. Scienze di Torino* (1885) — *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, Milano (1888) — *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (1888).

**) Vol. XXXII (1894). Nel corso del presente scritto occorrerà spesso di citare questa Nota: noi la ricorderemo brevemente colla notazione (G. B., 1894).

Nel § I definisco la varietà Ξ e ne indico i primi e più salienti caratteri; nel § II studio le superficie multiple della medesima; nel § III considero le intersezioni di due superficie multiple. Nel § IV mi occupo dei punti di intersezione di due curve multiple, cercandoli fra quelli in cui la varietà Ξ è incontrata da certe rette che io passo tutte in rassegna.

La varietà di cui ci occupiamo è un individuo di una numerosa famiglia nella quale sono in larga copia proprietà elegantissime, che esporremo in una prossima pubblicazione, prendendo le mosse dal metodo geometrico con cui il Segre studia la superficie di Steiner *), come in questo scritto ci poniamo nell'indirizzo analitico seguito dal Beltrami **) per il medesimo scopo. Tali varietà nascono da una doppia generalizzazione della superficie di Steiner, per il che noi proponiamo di chiamarle varietà *Ipersteineriane*.

§ I. — La varietà Ξ.

1. — In uno spazio lineare a quattro dimensioni si riferiscano i punti x ad una figura [**U**] di cinque spazi ordinari, linearmente indipendenti fra loro, $\mathbf{U}_3^{(1)},\ldots,\mathbf{U}_3^{(5)}$. Indichiamo con $\mathbf{U}_2^{(rs)}$ il piano (*faccia*) comune ai due spazi $\mathbf{U}_3^{(r)},\mathbf{U}_3^{(s)}$; con $\mathbf{U}_1^{(rs)}$ la retta (*spigolo*) opposta al piano $\mathbf{U}_2^{(rs)}$; con $\mathbf{U}_0^{(r)}$ il punto (*vertice*) opposto allo spazio $\mathbf{U}_3^{(r)}$.

La figura [**U**] ed ogni suo elemento si diranno *principali*.

Intenderemo che l'equazione $x_r=0$ rappresenti lo spazio $\mathbf{U}_3^{(r)}$.

2. — Definite le grandezze α mediante le identità

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha_r\equiv a_{r1}\omega_1+a_{r2}\omega_2+a_{r3}\omega_3+a_{r4}\omega_4\ , \\ r=1,2,3,4,5\ , \end{cases}$$

risulteranno verificate le seguenti altre:

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \alpha_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \alpha_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \alpha_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ \alpha_5 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix} = A_1\alpha_1+A_2\alpha_2+A_3\alpha_3+A_4\alpha_4+A_5\alpha_5=0\ ,$$

$$(3)\qquad A_1a_{1s}+A_2a_{2s}+A_3a_{3s}+A_4a_{4s}+A_5a_{5s}=0\ ,\quad s=1,2,3,4\ .$$

Al variare libero e continuo dei parametri $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$, lo spazio ordinario di equazione

$$(4)\qquad \frac{x_1}{\alpha_1^2}+\frac{x_2}{\alpha_2^2}+\frac{x_3}{\alpha_3^2}+\frac{x_4}{\alpha_4^2}+\frac{x_5}{\alpha_5^2}=0$$

---

*) *Su una trasformazione irrazionale dello spazio* ecc. — Giornale di Battaglini, vol. XXI (1883).

**) *Ricerche di Geometria Analitica* (dedicate alla memoria di D. Chelini) — *Memorie dell'Accad. di Bologna* (1879).

si move con continuità ed inviluppa una varietà Ξ a tre dimensioni, che ci proponiamo di studiare.

3.—Osservando che lo spazio (4) è uno spazio tangente *qualunque* della varietà Ξ, e che le sue coordinate sono della forma

$$\xi_r = \frac{1}{\alpha_r^2} \quad , \quad (r=1,2,3,4,5) \, , \tag{5}$$

approfittando della identità (2), per noi fondamentale, troviamo immediatamente l'equazione tangenziale di Ξ nella forma elegante:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi_1}}+\frac{1}{\sqrt{\xi_2}}+\frac{1}{\sqrt{\xi_3}}+\frac{1}{\sqrt{\xi_4}}+\frac{1}{\sqrt{\xi_5}}=0 \, . \tag{6}$$

Nella mia Nota (G. B., 1897) è dimostrato, senza riduzione a forma razionale dell'equazione, che la varietà $\sum_{r=1}^{5} \sqrt{x_r}=0$ è dell'ottavo ordine: ne consegue che *la varietà* Ξ *è della* 32 *classe.*

Per ottenere l'equazione locale della nostra varietà si osservi che le coordinate di ciascun suo punto devono soddisfare alle equazioni che si ottengono dalle (4) derivando separatamente rispetto ad $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$. Tali equazioni sono

$$\frac{a_{1s}}{\alpha_1^3}\cdot x_1+\frac{a_{2s}}{\alpha_2^3}\cdot x_2+\frac{a_{3s}}{\alpha_3^3}\cdot x_3+\frac{a_{4s}}{\alpha_4^3}\cdot x_4+\frac{a_{5s}}{\alpha_5^3}\cdot x_5=0$$

per

$$s=1,2,3,4 \, ;$$

esse, confrontate colle (3) scritte nella forma

$$\frac{a_{1s}}{\alpha_1^3}\cdot A_1\alpha_1^3+\frac{a_{2s}}{\alpha_2^3}\cdot A_2\alpha_2^3+\frac{a_{3s}}{\alpha_3^3}\cdot A_3\alpha_3^3+\frac{a_{4s}}{\alpha_4^3}\cdot A_4\alpha_4^3+\frac{a_{5s}}{\alpha_5^2}\cdot A_5\alpha_5^3=0 \, ,$$

dànno le coordinate del punto generico di Ξ:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = A_1\alpha_1^3 : A_2\alpha_2^3 : A_3\alpha_3^3 : A_4\alpha_4^3 : A_5\alpha_5^3 \, , \tag{7}$$

da cui si ricava

$$\sqrt[3]{A_1^2 x_1}+\sqrt[3]{A_2^2 x_2}+\sqrt[3]{A_3^2 x_3}+\sqrt[3]{A_4^2 x_4}+\sqrt[3]{A_5^2 x_5}=0 \tag{8}$$

come equazione locale della varietà Ξ.

4.—Le espressioni (7) forniscono una rappresentazione *punto per punto* della varietà Ξ sopra uno spazio ordinario $[\omega]$ quando si interpretino le ω_i come coordinate di punto in questo spazio. Le imagini delle sezioni spaziali sono allora le superficie cubiche del sistema lineare ∞^4, di equazione

$$\xi_1 A_1\alpha_1^3+\xi_2 A_2\alpha_2^3+\xi_3 A_3\alpha_3^3+\xi_4 A_4\alpha_4^3+\xi_5 A_5\alpha_5^3=0 \, , \tag{9}$$

al quale appartengono, come tripli, i cinque piani $\alpha_1=0, \alpha_2=0, \ldots, \alpha_5=0$, imagini delle sezioni fatte nella varietà Ξ dagli spazi principali.

Le imagini delle sezioni piane sono le curve del 9° ordine basi dei fasci di superficie cubiche appartenenti al sistema (9). E, siccome questo sistema non possiede punti fondamentali, le imagini delle sezioni rettilinee sono i gruppi di 27 punti basi delle reti del medesimo sistema. Di conseguenza possiamo affermare che *la varietà Ξ è del 27° ordine.*

5. — Una curva d'ordine n dello spazio rappresentativo $[\omega]$ è imagine d'una curva d'ordine $3n$ della varietà Ξ: agli n punti d'incontro della curva imagine col piano α_r corrispondono n punti d'incontro della curva obbiettiva collo spazio $U_3^{(r)}$, in ciascuno dei quali spazio e curva hanno fra loro un contatto tripunto.

In particolare, alle rette dello spazio $[\omega]$ corrispondono sovra Ξ delle cubiche razionali osculanti ciascuno dei cinque spazi principali e quindi, generalmente, gobbe. Se la retta imagine incontrasse lo spigolo (r,s) del pentaedro $[\alpha]$, la corrispondente cubica sarebbe ancora, generalmente, gobba. Ma quando la medesima retta imagine passasse pel vertice (r,s) dello stesso pentaedro, la cubica, di cui essa è imagine, osculerebbe la retta $U_1^{(rs)}$ nel punto K_{rs}, la cui imagine è il vertice suddetto. Tale cubica sarebbe allora piana ed il suo piano passerebbe per la retta principale $U_1^{(rs)}$. Se la retta imagine è situata nel piano α_r, la cubica corrispondente giace nello spazio principale $U_3^{(r)}$.

Allo spigolo (r,s) del pentaedro $[\alpha]$ corrisponde una cubica γ_{rs} del piano principale $U_2^{(rs)}$. Tale cubica, che diremo *principale*, oscula le tre rette principali $U_1^{(uv)}, U_1^{(vt)}, U_1^{(tu)}$ rispettivamente nei punti K_{uv}, K_{vt}, K_{tu}, i quali per conseguenza sono fra loro allineati. La cubica principale γ_{rs}, contata *nove* volte, costituisce la completa intersezione del piano $U_2^{(rs)}$ colla varietà Ξ. — Ne segue che la retta principale $U_1^{(hi)}$ sega Ξ in 27 punti raccolti in K_{hi}.

Finalmente, una retta dello spazio rappresentativo $[\omega]$ può uscire dal vertice (r,s) ed appoggiare in pari tempo allo spigolo (r,s) del pentaedro $[\alpha]$: le corrisponde allora sopra la varietà Ξ una cubica posta in un piano per la retta principale $U_1^{(rs)}$ e osculante l'opposto piano principale $U_2^{(rs)}$ in un punto di γ_{rs}. Tale cubica è quindi una retta tripla che proietta dal punto K_{rs} un punto dell'opposta cubica principale γ_{rs}.

6. — Ad una superficie d'ordine n dello spazio $[\omega]$ corrisponde su Ξ una superficie d'ordine $9n$. Alla curva d'ordine n intersezione della superficie data col piano α_r corrisponde una curva d'ordine $3n$ di Ξ, lungo la quale la superficie d'ordine $9n$ è toccata, con un contatto del second'ordine, dallo spazio $U_3^{(r)}$. Agli n punti d'intersezione dello spigolo (r,s) del pentaedro $[\alpha]$ colla superficie data corrispondono n punti di Ξ situati sulla cubica principale γ_{rs}, in ciascuno dei quali sono riunite *nove* intersezioni del piano principale $U_2^{(rs)}$ colla superficie d'ordine $9n$.

In particolare, ad un piano dello spazio $[\omega]$ corrisponde una superficie del 9° ordine di Ξ, che ha contatti di second'ordine coi diversi spazi principali lungo altrettante cubiche (in generale gobbe); ed ha le *nove* intersezioni con ciascun piano principale raccolte in un punto della relativa cubica principale.

Se il piano imagine passa per il vertice (r,s) dal pentaedro $[\alpha]$, la superficie del 9° ordine viene a possedere una retta tripla nella congiungente il punto K_{rs} al punto d'incontro della superficie stessa colla cubica principale γ_{rs}.

7. — Il piano diagonale θ_{rs} determinato dal vertice (r,s) collo spigolo (r,s) del pentaedro $[\alpha]$ è imagine della superficie luogo delle rette triple congiungenti il punto $\mathbf{K}_{rs}$ ai punti dell'opposta cubica principale γ_{rs}. Possiamo quindi concludere che *i coni proiettanti le cubiche principali dagli opposti punti* **K** *sono tripli per la varietà* Ξ.

8. — Un piano dello spazio $[\omega]$, il quale passi per lo spigolo (r,s) del pentaedro $[\alpha]$, ha l'equazione della forma

$$p_r\alpha_r + p_s\alpha_s = 0 \ ,$$

ed è manifesto che esso, insieme ai due altri

$$p_r\alpha_r + \varepsilon p_s\alpha_s = 0 \quad , \quad p_r\alpha_r + \varepsilon^2 p_s\alpha_s = 0 \ ,$$

dove ε è una radice cubica primitiva qualunque dell'unità, costituisce la superficie

$$p_r^3 x_r^3 + p_s^3 \alpha_s^3 = 0 \ ,$$

imagine di una sezione spaziale, quella determinata dallo spazio

$$\frac{p_r}{A_r} x_r + \frac{p_s}{A_s} x_s = 0 \ ,$$

che passa per il piano principale $\mathbf{U}_2^{(rs)}$.

Viceversa, ogni spazio passante per il piano $\mathbf{U}_2^{(rs)}$ taglia la varietà Ξ in tre superficie del 9° ordine.

Infatti, lo spazio

$$\xi_r x_r + \xi_s x_s = 0$$

sega la varietà Ξ in una superficie, la cui imagine ha l'equazione

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_r A_r \alpha_r^3 + \xi_s A_s \alpha_s^3 \\ &= (\sqrt[3]{\xi_r A_r}\alpha_r + \sqrt[3]{\xi_s A_s}\alpha_s)(\sqrt[3]{\xi_r A_r}\alpha_r + \varepsilon\sqrt[3]{\xi_s A_s}\alpha_s)(\sqrt[3]{\xi_r A_r}\alpha_r + \varepsilon^2\sqrt[3]{\xi_s A_s}\alpha_s) \ , \end{aligned}$$

e quindi risulta composta di tre piani passanti per lo spigolo (r,s). Epperò la superficie sezione di Ξ collo spazio considerato sarà spezzata in tre superficie del 9° ordine, ognuna delle quali è rappresentata univocamente sovra il piano imagine mediante un sistema lineare ∞^3 di cubiche, cui appartengono quattro rette triple. Tali superficie sono quindi della specie Φ studiata nella Nota citata (G. B., 1894).

Tra i piani del fascio (r,s) sonvi pure α_r ed α_s, in ciascuno dei quali coincidono i tre piani della terna summenzionata. Cosicchè ciascuno dei due spazi $\mathbf{U}_3^{(r)}, \mathbf{U}_3^{(s)}$ taglia Ξ in tre superficie del 9° ordine infinitamente vicine fra loro rispettivamente nelle superficie Φ_r, Φ_s, che diciamo *principali* per la varietà.

9. — Possiamo quindi riassumere, enunciando le seguenti proprietà della nostra varietà Ξ:

La varietà Ξ del 27° ordine ha un contatto del 2° ordine con ciascuno degli spazi principali $U_3^{(r)}$ lungo la rispettiva superficie principale Φ_r: ogni cubica principale γ_{rs} è tripla per la varietà Ξ e lungo essa vi hanno tre contatti consecutivi di second'ordine tra la varietà ed il piano principale $U_2^{(rs)}$ della cubica stessa. Sulla varietà Ξ esistono dieci sistemi ∞^1 di ordinarie superficie Φ del 9° ordine, essendo ogni sistema coordinato ad un piano principale, per il quale passano tutti gli spazi ordinari delle relative superficie Φ: le superficie di uno stesso sistema giacciono per terne in ciascuno di questi spazi.

*Lo spazio che congiunge un piano principale all'opposto punto **K** contiene tre superficie Φ, delle quali, però, una è ridotta ad un cono cubico triplo.*

Un qualunque spazio ordinario che esca da un piano principale U_2 taglia la varietà Ξ in tre superficie Φ e la figura [U] nel piano U_2 ed in tre altri piani formanti col primo un tetraedro che è *principale* per ciascuna di quelle superficie Φ. Tali tre superficie Φ sono dunque inscritte nel medesimo tetraedro; per due qualunque di esse si può affermare, per es., che esse *si segano in 27 cubiche* (generalmente gobbe) *).

§ II.—Superficie multiple di Ξ.

10. — Diremo *fra loro congiunti* più punti dello spazio [ω] ai quali corrisponda sopra Ξ un medesimo punto (*multiplo*). Se ω ed ω' sono due punti fra loro congiunti, e se diciamo α' ciò che diviene α nel punto ω', saranno verificate per essi le relazioni

$$\alpha'^3_1 : \ldots : \alpha'^3_5 = \alpha_1^3 : \ldots : \alpha_5^3 ,$$

e per conseguenza, in virtù della (2), sarà

$$\varepsilon^{\nu_1} A_1\alpha_1 + \varepsilon^{\nu_2} A_2\alpha_2 + \varepsilon^{\nu_3} A_3\alpha_3 + \varepsilon^{\nu_4} A_4\alpha_4 + \varepsilon^{\nu_5} A_5\alpha_5 = 0 , \tag{10}$$

dove le ν sono interi qualunque, a cui tuttavia basterà attribuire, indipendentemente gli uni dagli altri, i valori 0, 1, 2.

La (10) è soddisfatta dalle imagini di ogni punto multiplo: ne consegue che tali imagini sono distribuite sovra un certo numero di piani dello spazio [ω]. Si conclude che la varietà Ξ ammette un determinato numero di superficie doppie del 9° ordine.

Per discutere tutti i casi possibili, noi procederemo alle seguenti distinzioni.

1° Caso:

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = \nu_5 .$$

La (10) riproduce l'identità fondamentale (2) e non si ha così l'imagine di una superficie multipla.

2° Caso:

$$\nu_h = \nu_i = \nu_j = \nu_k = \nu \quad , \quad \nu_l \neq \nu .$$

---

*) È questa la estensione al caso attuale di una proprietà delle superficie di Steiner inscritte in uno stesso tetraedro, dovuta ad Eckardt (*Math. Annalen*, Bd. V), ridimostrata dal Segre (*l. c.*) e già da me estesa ai casi superiori, rimanendo sempre nello spazio ordinario (*Rend. Ist. Lomb.*, 1888). Tale proprietà di Eckardt sussiste anche per i casi superiori in spazi ad un qualunque numero di dimensioni.

La (10) assume la forma $x_l = 0$, che è l'equazione della imagine della superficie principale Φ di contatto dello spazio $\mathbf{U}_3^{(l)}$ colla varietà Ξ.

3° Caso:

$$\nu_h = \nu_i = \nu_j = \nu' \quad , \quad \nu_k = \nu_l = \nu'' \ ,$$
$$\nu' \neq \nu'' \ ,$$

La (10) prende allora la forma

$$\vartheta_{kl} \equiv A_k x_k - A_l x_l = -(A_h x_h + A_i x_i + A_j x_j) = 0 \tag{11}$$

che è l'equazione del piano diagonale del pentaedro $[x]$ congiungente il vertice (k,l) collo spigolo (k,l). E noi sappiamo infatti già (n.° 7) che tale piano è imagine di un cono cubico $\mathbf{W}_{kl}$ triplo per la nostra varietà.

4° Caso:

$$\nu_h = \nu_i = \nu_j = \nu \quad , \quad \nu_k \neq \nu_l \neq \nu \ .$$

In questo caso la (10) diviene della forma

$$\vartheta_{kl}^{(\nu)} \equiv A_k x_k - \varepsilon^\nu A_l x_l = 0 \ , \tag{12}$$

e rappresenta un piano, il quale, insieme al piano

$$\vartheta_{kl}^{(2\nu)} \equiv A_k x_k - \varepsilon^{2\nu} A_l x_l = 0 \ , \tag{12'}$$

è imagine di una superficie del 9° ordine, e della specie Φ, doppia per la varietà Ξ, e che noi indicheremo col simbolo $\mathbf{V}_{kl}$.

Dunque *la varietà Ξ possiede dieci coni tripli del terzo ordine razionali e dieci superficie doppie del 9° ordine della specie Φ.*

11. — Da quelle delle loro imagini facilmente si ricavano le equazioni di queste superficie multiple di Ξ, che sono

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_{kl} &\equiv \sqrt[3]{A_h^2 x_h} + \sqrt[3]{A_i^2 x_i} + \sqrt[3]{A_j^2 x_j} = 0 \ , \\ \Omega_{kl} &\equiv A_k^2 x + A_l^2 x_l = 0 \ , \end{aligned}\right\} \text{ per } \mathbf{W}_{kl} \ ,$$

e

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{kl} &\equiv \sqrt[3]{A_h^2 x_h} + \sqrt[3]{A_i^2 x_i} + \sqrt[3]{A_j^2 x_j} - \sqrt[3]{A_k^2 x_k} = 0 \ , \\ \Theta_{kl} &\equiv A_k^2 x_k - A_l^2 x_l = 0 \ , \end{aligned}\right\} \text{ per } \mathbf{V}_{kl} \ .$$

L'equazione $\Sigma = 0$ rappresenta, nel piano $\mathbf{U}_2^{(kl)}$, la cubica principale γ_{kl}; e nello spazio a quattro dimensioni rappresenta la varietà (bi-conica) che proietta questa cubica γ_{kl} dall'opposta retta principale $\mathbf{U}_1^{(kl)}$. Quanto allo spazio $\Omega_{kl} = 0$, esso proietta il piano principale $\mathbf{U}_2^{(kl)}$ dall'opposto punto $\mathbf{K}_{kl}$, segando nella suddetta varietà bi-conica il cono $\mathbf{W}_{kl}$.

L'equazione $\Psi_{kl} = 0$ rappresenta nello spazio $\mathbf{U}_3^{(l)}$ una superficie del 9° ordine e

di specie Φ, per la quale è γ_{kl} la cubica di contatto col piano $\mathbf{U}_2^{(kl)}$. Nello spazio a quattro dimensioni, poi, essa rappresenta la varietà conica che dal vertice $\mathbf{U}_0^{(l)}$ della figura [**U**] proietta l'anzidetta superficie del 9° ordine di $\mathbf{U}_3^{(l)}$. La varietà Ψ_{kl} può esser sostituita dalla varietà analoga

$$\Psi_{lk} \equiv \sqrt[3]{A_h^2 x_h} + \sqrt[3]{A_i^2 x_i} + \sqrt[3]{A_j^2 x_j} - \sqrt[3]{A_l^2 x_l} = 0 \ ,$$

quando si tratta della determinazione della superficie $\mathbf{V}_{kl}$ mercè l'intervento dell'equazione $\Theta_{kl} = 0$.

12. — Il punto $\mathbf{K}_{kl}$ ha le coordinate

$$A_h^2 x_h : A_i^2 x_i : A_j^2 x_j : A_k^2 x_k : A_l^2 x_l = 0 : 0 : 0 : 1 : -1 \ , \tag{13}$$

dalle quali espressioni appare evidente che *i dieci punti* **K** *appartengono allo spazio* Π *di equazione*

$$A_h^2 x_h + A_i^2 x_i + A_j^2 x_j + A_k^2 x_k + A_l^2 x_l = 0 \ . \tag{14}$$

I dieci spazi Θ passano tutti per il punto **O** di coordinate $\frac{1}{A_1^2} : \frac{1}{A_2^2} : \frac{1}{A_3^2} : \frac{1}{A_4^2} : \frac{1}{A_5^2}$ polo dello spazio Π rispetto alla quadrica

$$A_1^4 x_1^2 + A_2^4 x_2^2 + A_3^4 x_3^2 + A_4^4 x_4^2 + A_5^4 x_5^2 = 0 \ . \tag{15}$$

Il punto **O** si dirà *centrale* per la varietà Ξ.

13. — Lo spazio Ω_{kl} passa per $\mathbf{U}_2^{(kl)}$ e taglia quindi le varietà Ξ, oltre che nel cono triplo $\mathbf{W}_{kl}$ ancora in due superficie del 9° ordine di specie Φ, le cui imagini sono rispettivamente

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_{kl}^{(1)} &\equiv A_k \alpha_k + \varepsilon A_l \alpha_l = 0 \ , \\ \theta_{kl}^{(2)} &\equiv A_k \alpha_k + \varepsilon^2 A_l \alpha_l = 0 \ . \end{aligned} \right. \tag{16}$$

Noi le indicheremo rispettivamente con $W_{kl}^{(1)}$ e $W_{kl}^{(2)}$.

Similmente lo spazio Θ_{kl} sega la varietà Ξ, oltre che nella superficie doppia $\mathbf{V}_{kl}$, ancora in una superficie semplice V_{kl}, che ha per imagine il piano

$$\vartheta_{kl}^{(0)} = A_k \alpha_k - A_l \alpha_l = 0 \ . \tag{17}$$

14. — Due spazi Ω o Φ, come pure due superficie doppie **V** o due coni tripli **W**, od una superficie doppia ed un cono triplo, ecc. ecc., si diranno fra loro *associati* quando avranno un indice a comune. Più specialmente si diranno *associati in terna* tre di tali enti geometrici allorchè le loro coppie di indici siano le combinazioni binarie di *tre* determinati.

Tre o quattro di quelli elementi si diranno fra loro *legati* da un dato indice h quando essi avranno a comune tale indice h.

Finalmente, tre o quattro qualunque degli stessi elementi si diranno *in catena* fra loro quando si potranno disporre in tale ordine, per cui il secondo indice di uno sia eguale al primo del successivo. Quando non si dica altro, di più elementi in catena, s'intenderà che il primo indice del primo sia diverso dal secondo indice dell'ultimo elemento, o, come si potrebbe dire, che la catena sia *aperta*: perchè, se ciò non fosse, la catena si potrebbe dire *chiusa*. Per esempio, tre elementi associati in terna formano una catena chiusa.

Due di quegli elementi si dicono fra loro *estranei* quando non abbiano alcun indice a comune. È evidente che in tal caso ce ne sono altri quattro ciascuno dei quali forma con quei due una terna in catena, costituendo ognuno di essi l'anello di congiunzione dei due primi estranei fra loro.

15. — Tre coni tripli associati in terna proiettano dai tre punti **K** che sono in un piano principale (flessi della relativa cubica γ) ordinatamente le tre cubiche principali i cui piani passano per la opposta retta principale.

Quattro coni tripli fra loro legati dall'indice h proiettano le quattro cubiche principali che sono nello spazio $\mathbf{U}_3^{(h)}$ dagli opposti punti **K**, che sono sulle quattro rette principali passanti per $\mathbf{U}_0^{(h)}$. Osserviamo che con questi quattro coni si ponno formare sei coppie, ciascuna delle quali è associata in terna ad uno dei rimanenti sei coni tripli.

Ecc., ecc. Naturalmente questi diversi aggruppamenti si ponno considerare anche con superficie doppie, ecc.

Allo stesso argomento si accostano le identità

$$\Theta_{hi}+\Theta_{ij}+\Theta_{jh}=0\ ,$$
$$\Theta_{hi}+\Theta_{ij}+\Theta_{jk}+\Theta_{kh}=0\ ,$$
$$\Theta_{hi}+\Theta_{ij}+\Theta_{jk}+\Theta_{kl}+\Theta_{lh}=0\ ,$$
$$\Omega_{hi}+\Omega_{ij}+\Theta_{jh}=0\ , \qquad \text{ecc.}$$

§ III.—Curve comuni a due o più superficie multiple.

16. — Volendo studiare la mutua intersezione di due superficie multiple qualunque, cominciamo dall'osservare che esse appartengono a spazi *diversi*. Questi due spazi si tagliano secondo un piano nel quale giace la completa intersezione delle superficie stesse. Noi, pertanto, ricercheremo la sezione fatta nella varietà Ξ da tale piano, e fra le varie parti onde è composta questa sezione *) indicheremo quelle comuni alle due superficie multiple.

17. — Intersezione di due coni tripli associati. — Consideriamo i due coni tripli $\mathbf{W}_{hi}, \mathbf{W}_{hj}$, appartenenti ai due spazi Ω_{hi}, Ω_{hj}. Questi spazi si tagliano nel piano $\Delta_{ij}^{(h)}$, sul quale il punto corrente ha le coordinate espresse dalle formole

$$A_h^2 x_h : A_i^2 x_i : A_j^2 x_j : A_k^2 x_k : A_l^2 x_l = -\mu_1 : \mu_1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3\ . \tag{18}$$

---

*) Il piano che si considera è intersezione di spazi Ω o Θ, ognuno dei quali, passando per un piano $\mathbf{U}_2$ taglia la varietà Ξ in una superficie spezzata; e siccome la sezione di questa superficie col piano è anche la sezione della varietà Ξ, così si vede che tale sezione piana di Ξ è decomposta in parti.

In virtù dell'identità

$$\Omega_{hi} - \Omega_{hj} = \Theta_{ij}$$

si vede che il piano $\Delta_{ij}^{(h)}$ deve contenere ancora le intersezioni di ciascuno dei coni suddetti colla superficie doppia $\mathbf{V}_{ij}$ loro associata in terna.

Le intersezioni del piano $\Delta_{ij}^{(h)}$ colla varietà Ξ hanno le imagini

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\text{I)} & (00)\ldots\ A_h\alpha_h : A_i\alpha_i : A_j\alpha_j : A_k\alpha_k : A_l\alpha_l & = -\ \lambda_1 : \lambda_1 : \lambda_1 : \lambda_2 : -(\lambda_1+\lambda_2)\ , \\
\text{II)} & (01)\ldots\quad \text{»} & = -\varepsilon\lambda_1 : \varepsilon\lambda_1 : \lambda_1 : \lambda_2 : -(\lambda_1+\lambda_2)\ , \\
\text{III)} & (02)\ldots\quad \text{»} & = -\varepsilon^2\lambda_1 : \varepsilon^2\lambda_1 : \lambda_1 : \lambda_2 : -(\lambda_1+\lambda_2)\ , \\
\text{IV)} & (10)\ldots\quad \text{»} & = -\varepsilon\lambda_1 : \lambda_1 : \varepsilon\lambda_1 : \lambda_2 : -(\lambda_1+\lambda_2)\ , \\
\text{V)} & (11)\ldots\quad \text{»} & = -\varepsilon\lambda_1 : \lambda_1 : \lambda_1 : \lambda_2 : (\varepsilon-2)\lambda_1 - \lambda_2\ , \\
\text{VI)} & (12)\ldots\quad \text{»} & = -\ \lambda_1 : \varepsilon^2\lambda_1 : \varepsilon\lambda_1 : \lambda_2 : 2\lambda_1 - \lambda_2\ , \\
\text{VII)} & (20)\ldots\quad \text{»} & = -\varepsilon^2\lambda_1 : \lambda_1 : \varepsilon^2\lambda_1 : \lambda_2 : -(\lambda_1+\lambda_2)\ , \\
\text{VIII)} & (21)\ldots\quad \text{»} & = -\ \lambda_1 : \varepsilon\lambda_1 : \varepsilon^2\lambda_1 : \lambda_2 : 2\lambda_1 - \lambda_2\ , \\
\text{IX)} & (22)\ldots\quad \text{»} & = -\varepsilon^2\lambda_1 : \lambda_1 : \lambda_1 : \lambda_2 : (\varepsilon^2-2)\lambda_1 - \lambda_2\ ,
\end{array}\right.$$

che sono nello spazio [ω] le rette soluzioni del sistema

$$\left.\begin{array}{l}
\theta_{hi}^{(0)}\theta_{hi}^{(1)}\theta_{hi}^{(2)} = 0\ , \\
\theta_{hj}^{(0)}\theta_{hj}^{(1)}\theta_{hj}^{(2)} = 0\ ,
\end{array}\right\}\ (rs) \equiv \left(\theta_{hi}^{(r)} = 0\ ,\ \theta_{hj}^{(s)} = 0\right)\ .$$

La retta I) del quadro (19) è imagine della intersezione dei due coni tripli considerati, la quale possiede quindi le coordinate correnti *).

$$(20)\qquad A_h^2 x_h : A_i^2 x_i : A_j^2 x_j : A_k^2 x_k : A_l^2 x_l = -\lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_2^3 : -(\lambda_1+\lambda_2)^3\ ,$$

ed è perciò una cubica $Z_{ij}^{(h)}$.

Ma si osserva che questa cubica ha pure le imagini II), III), IV), VII): epperò si potrà concludere che *due coni tripli fra loro associati, come* $\mathbf{W}_{hi}$ *e* $\mathbf{W}_{hj}$, *si intersecano in una cubica piana* $Z_{ij}^{(h)}$ *quintupla per la varietà* Ξ. E dal significato che hanno le rette II), III), IV), VII) si argomenta che *per la cubica quintupla* $Z_{ij}^{(h)}$ *passano le coppie di superficie conspaziali di ciascuno dei coni tripli considerati* $\mathbf{W}_{hi}$, $\mathbf{W}_{hj}$.

18. — Sono facili a verificarsi le seguenti identità:

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\vartheta_{ij}^{(0)} = \theta_{hi}^{(0)} - \theta_{hj}^{(0)} = \varepsilon^2(\theta_{hi}^{(1)} - \theta_{hj}^{(1)}) = \varepsilon(\theta_{hi}^{(2)} - \theta_{hj}^{(2)})\ , \\
\vartheta_{ij}^{(1)} = \theta_{hi}^{(0)} - \theta_{hj}^{(1)} = \varepsilon^2(\theta_{hi}^{(1)} - \theta_{hj}^{(2)}) = \varepsilon(\theta_{hi}^{(2)} - \theta_{hj}^{(0)})\ , \\
\vartheta_{ij}^{(2)} = \theta_{hi}^{(0)} - \theta_{hj}^{(2)} = \varepsilon^2(\theta_{hi}^{(1)} - \theta_{hj}^{(0)}) = \varepsilon(\theta_{hi}^{(2)} - \theta_{hj}^{(1)})\ .
\end{array}\right.$$

*) Le coordinate dei punti sono le x_r e non le $A_r^2 x_r$: tuttavia, per brevità di linguaggio, noi diremo spesso che sono le $A_r^2 x_r$, sperando di non essere fraintesi.

Da esse risulta che *la cubica $Z_{ij}^{(h)}$ quintupla per le varietà Ξ ed intersezione dei due coni tripli* $\mathbf{W}_{hi}$, $\mathbf{W}_{hj}$, *è doppia per la superficie doppia* $\mathbf{V}_{ij}$ *associata in terna con questi coni, ed è semplice per ciascuna delle superficie conspaziali rispettivamente di tali coni tripli e di tale superficie doppia.*

19. — *Sulla varietà Ξ esistono trenta cubiche quintuple Z: per ogni cubica quintupla passano due coni tripli ed una superficie doppia di Ξ. Su ogni cono triplo sono sei cubiche quintuple, e ve ne sono tre sopra ogni superficie doppia.*

E precisamente: sul cono triplo $\mathbf{W}_{hi}$ sono le sei cubiche quintuple

$$Z_{ij}^{(h)}, \quad Z_{ik}^{(h)}, \quad Z_{il}^{(h)},$$
$$Z_{hj}^{(i)}, \quad Z_{hk}^{(i)}, \quad Z_{hl}^{(i)};$$

e sulla superficie doppia $\mathbf{V}_{hi}$ sono le tre cubiche quintuple

$$Z_{hi}^{(j)}, \quad Z_{hi}^{(k)}, \quad Z_{hi}^{(l)}.$$

20. — Il piano $\Delta_{ij}^{(h)}$ taglia la varietà Ξ, oltre che nella cubica quintupla $Z_{ij}^{(h)}$, ancora in una cubica $L_{ij}^{(h)}$, che ha le imagini VI) e VIII), e che quindi è doppia per la varietà. Tale cubica ha le coordinate correnti espresse dalle formole

$$A_h^2 x_h : A_i^2 x_i : A_j^2 x_j : A_k^2 x_k : A_l^2 x_l = -\lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_2^3 : (2\lambda_1 - \lambda_2)^3 . \tag{22}$$

Per essa passano la superficie doppia $\mathbf{V}_{ij}$ e le due coppie di superficie W conspaziali dei due coni tripli $\mathbf{W}_{hi}$, $\mathbf{W}_{hj}$.

Finalmente quella sezione piana di Ξ contiene le due cubiche $\mathcal{A}_{ij}^{'(h)}$, $\mathcal{A}_{ij}^{''(h)}$ le cui imagini sono le rette V) e IX) del quadro precedente, e per le quali le coordinate del punto corrente sono:

$$(23) \quad \begin{cases} A_h^2 x_h : A_i^2 x_i : A_j^2 x_j : A_k^2 x_k : A_l^2 x_l = -\lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_2^3 : [(\varepsilon -2)\lambda_1 - \lambda_2]^3 , \\ \qquad\qquad » \qquad\qquad = -\lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_2^3 : [(\varepsilon^2 -2)\lambda_1 - \lambda_2]^3 , \end{cases}$$

rispettivamente. Per ognuna di queste curve passa la superficie V_{ij} conspaziale della doppia $\mathbf{V}_{ij}$, mentre per la prima passano le due $W_{hi}^{(1)}$, $W_{hi}^{(2)}$ conspaziali del cono triplo $\mathbf{W}_{hi}$, e per la seconda passano le $W_{hj}^{(1)}$, $W_{hj}^{(2)}$ conspaziali del cono $\mathbf{W}_{hj}$.

21. — È evidente che ciascuna delle cubiche $Z_{ij}^{(h)}$, $L_{ij}^{(h)}$, $\mathcal{A}_{ij}^{'(h)}$, $\mathcal{A}_{ij}^{''(h)}$ è osculata dalla retta principale $\mathbf{U}_1^{(kl)}$ nel punto $\mathbf{K}_{kl}$, che sopra ognuna di esse è il punto $\lambda_1 = 0$.

22. — Intersezione di due coni tripli estranei fra loro. — Gli spazi Ω_{hi}, Ω_{jk} dei due coni tripli estranei $\mathbf{W}_{hi}$, $\mathbf{W}_{jk}$ si tagliano secondo il piano definito dalle coordinate correnti del suo punto:

$$A_h^2 x_h : A_i^2 x_i : A_j^2 x_j : A_k^2 x_k : A_l^2 x_l = -\mu_1 : \mu_1 : -\mu_2 : \mu_2 : \mu_3 , \tag{24}$$

piano che noi designeremo col simbolo $\Delta_l^{(3)}$ *). La sezione di questo piano nella varietà Ξ è rappresentata nello spazio $[\omega]$ dal seguente sistema di rette

$$
(25)\left\{
\begin{array}{lll}
\text{I)} & (00)\ldots A_h\alpha_h : A_i\alpha_i : A_j\alpha_j : A_k\alpha_k : A_l\alpha_l = & -\lambda_1 : \lambda_1 : -\lambda_2 : \lambda_2 : 0 ,\\
\text{II)} & (01)\ldots \quad » & = -\lambda_1 : \lambda_1 : -\varepsilon\lambda_2 : \lambda_2 : (\varepsilon-1)\lambda_2 ,\\
\text{III)} & (02)\ldots \quad » & = -\lambda_1 : \lambda_1 : -\varepsilon^2\lambda_2 : \lambda_2 : (\varepsilon^2-1)\lambda_2 ,\\
\text{IV)} & (10)\ldots \quad » & = -\varepsilon\lambda_1 : \lambda_1 : -\lambda_2 : \lambda_2 : (\varepsilon-1)\lambda_1 ,\\
\text{V)} & (11)\ldots \quad » & = -\varepsilon\lambda_1 : \lambda_1 : -\varepsilon\lambda_2 : \lambda_2 : (\varepsilon-1)(\lambda_1+\lambda_2) ,\\
\text{VI)} & (12)\ldots \quad » & = -\varepsilon\lambda_1 : \lambda_1 : -\lambda_2 : \varepsilon\lambda_2 : (\varepsilon-1)(\lambda_1-\lambda_2) ,\\
\text{VII)} & (20)\ldots \quad » & = -\varepsilon^2\lambda_1 : \lambda_1 : -\lambda_2 : \lambda_2 : (\varepsilon^2-1)\lambda_1 ,\\
\text{VIII)} & (21)\ldots \quad » & = -\varepsilon^2\lambda_1 : \lambda_1 : -\lambda_2 : \varepsilon^2\lambda_2 : (\varepsilon^2-1)(\lambda_1-\lambda_2) ,\\
\text{IX)} & (22)\ldots \quad » & = -\varepsilon^2\lambda_1 : \lambda_1 : -\varepsilon^2\lambda_2 : \lambda_2 : (\varepsilon^2-1)(\lambda_1+\lambda_2) ,
\end{array}\right.
$$

che sono le soluzioni del sistema

$$\theta_{hi}^{(0)}\,\theta_{hi}^{(1)}\,\theta_{hi}^{(2)} = 0 ,$$
$$\theta_{jk}^{(0)}\,\theta_{jk}^{(1)}\,\theta_{jk}^{(2)} = 0 .$$

L'intersezione di questi due coni tripli fra loro estranei è così la retta tripla di imagine I) e di punto corrente **).

$$(26)\qquad A_h^2 x_h : A_i^2 x_i : A_j^2 x_j : A_k^2 x_k : A_l^2 x_l = -\mu_1 : \mu_1 : -\mu_2 : \mu_2 : 0 .$$

Tale retta non è altro che una delle rette triple della superficie principale Φ_l: il che potevasi vedere per altra via.—Per la retta principale $\mathbf{U}_1^{(hi)}$ passano gli spazi principali $\mathbf{U}_3^{(j)}$, $\mathbf{U}_3^{(k)}$, $\mathbf{U}_3^{(l)}$ i quali segano sull'opposto piano principale $\mathbf{U}_2^{(hi)}$ le tre rette $\mathbf{U}_1^{(kl)}$, $\mathbf{U}_1^{(lj)}$, $\mathbf{U}_1^{(jk)}$ osculatrici della cubica principale γ_{hi} ordinatamente nei punti $\mathbf{K}_{kl}$, $\mathbf{K}_{lj}$, $\mathbf{K}_{jk}$. Cosicchè il cono triplo $\mathbf{W}_{hi}$ ha un contatto trirette con ciascuno degli spazi suddetti, ri-

*) L'intersezione di due spazi Ω sarà sempre indicata con Δ, quella di due spazi Θ avrà il simbolo ∇, e quella di un Ω con un Θ sarà designata con $\lhd$. Quanto all'applicazione di indici qualora i due spazi siano fra loro estranei, terremo costantemente questa norma: i due spazi hanno ordinatamente una coppia di indici h, i, j, k, l nei quali intendiamo che vi sia costantemente l'ordine circolare di successione. Ad ogni accoppiamento di combinazioni binarie di tali indici sostituiremo quelli che indicano d'ordinario le diagonali del quadrangolo, che rimane sopprimendo l'indice escluso, il quale, viceversa, si porrà in vista. Così avremo i seguenti simboli:

per $*\ ijkl$	per $*\ jklh$	per $*\ klhi$	per $*\ lhij$	per $*\ hijk$
$(jk, il) \equiv 1, h$,	$(kl, jh) \equiv 1, i$,	$(lh, ki) \equiv 1, j$,	$(hi, hj) \equiv 1, k$,	$(ij, hk) \equiv 1, l$,
$(ki, jl) \equiv 2, h$,	$(lj, kh) \equiv 2, i$,	$(hk, li) \equiv 2, j$,	$(il, lj) \equiv 2, k$,	$(jh, ik) \equiv 2, l$,
$(ij, kl) \equiv 3, h$;	$(jk, lh) \equiv 3, i$;	$(kl, hi) \equiv 3, j$;	$(lh, ij) \equiv 3, k$;	$(hi, jk) \equiv 3, l$.

Ed occorrendo considerare gli accoppiamenti omologhi di queste nuove simboleggiature, porremo, come d'uso,

$$(2,p)(3,p) \equiv \mathrm{I}_p \quad ; \quad (3,p)(1,p) \equiv \mathrm{II}_p \quad ; \quad (1,p)(2,p) \equiv \mathrm{III}_p .$$

**) Essendosi qui messi μ_1 e μ_2 per λ_1^3 e λ_2^3, si ha un punto solo per λ_1, $\varepsilon\lambda_1$, $\varepsilon^2\lambda_1$.

spettivamente lungo le generatrici $\mathbf{K}_{hi}\mathbf{K}_{kl}$, $\mathbf{K}_{hi}\mathbf{K}_{lj}$, $\mathbf{K}_{hi}\mathbf{K}_{jk}$. Similmente il cono triplo $\mathbf{U}_{jk}$ ha un contatto trirette con ciascuno degli spazi $\mathbf{U}_3^{(l)}$, $\mathbf{U}_3^{(h)}$, $\mathbf{U}_3^{(i)}$ rispettivamente lungo le generatrici $\mathbf{K}_{jk}\mathbf{K}_{hi}$, $\mathbf{K}_{jk}\mathbf{K}_{il}$, $\mathbf{K}_{jk}\mathbf{K}_{lh}$. Dunque i coni tripli $\mathbf{W}_{hi}$, $\mathbf{W}_{jk}$ hanno in comune la generatrice $\mathbf{K}_{hi}\mathbf{K}_{jk}$, lungo la quale essi hanno un contatto trirette collo spazio $\mathbf{U}_3^{(l)}$. Nello spazio principale $\mathbf{U}_3^{(l)}$, poi, la superficie principale Φ_l possiede le tre rette triple *).

$$\mathcal{R}_l^{(1)} \equiv \mathbf{K}_{ij}\mathbf{K}_{hk} \quad , \quad \mathcal{R}_l^{(2)} \equiv \mathbf{K}_{jh}\mathbf{K}_{ik} \quad , \quad \mathcal{R}_l^{(3)} \equiv \mathbf{K}_{hi}\mathbf{K}_{jk} \ .$$

La retta (26) comune ai due coni tripli considerati è appunto quest'ultima $\mathcal{R}_l^{(3)}$.

Le 15 rette $\mathcal{R}$ giacciono, manifestamente, a tre a tre nei cinque piani in cui lo spazio Π (v. num. 12) taglia i cinque spazi principali. Inoltre esse, proiettando dai punti $\mathbf{K}$ i flessi delle opposte cubiche principali, escono a tre a tre da ciascun punto $\mathbf{K}$ giacendo in un piano, che è intersezione dello spazio Π collo spazio Ω che da questo punto $\mathbf{K}$ proietta l'opposto piano principale. Così per $\mathbf{K}_{hi}$ passano le tre rette $\mathcal{R}_j^{(3)}$, $\mathcal{R}_k^{(1)}$, $\mathcal{R}_l^{(3)}$.

23. — Sebbene non entrino in queste nostre considerazioni speciali, registreremo ancora le rimanenti parti della intersezione del piano $\Delta_l^{(3)}$ colla varietà Ξ.

Si hanno le quattro rette triple $\mathcal{T}_{l,01}^{(3)}$, $\mathcal{T}_{l,02}^{(3)}$, $\mathcal{T}_{l,10}^{(3)}$, $\mathcal{T}_{l,20}^{(3)}$ di imagini II), III), IV), VII) ordinatamente, e rispettivamente di coordinate correnti

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} A_h{}^2x_h : \ldots : A_l{}^2x_l &= -\mu_1 : \mu_1 : -\mu_2 : \mu_2 : (\varepsilon\ -1)^3\mu_2 \ , \\ \text{»} \qquad &= -\mu_1 : \mu_1 : -\mu_2 : \mu_2 : (\varepsilon^2 - 1)^3\mu_2 \ , \\ \text{»} \qquad &= -\mu_1 : \mu_1 : -\mu_2 : \mu_2 : (\varepsilon\ -1)^3\mu_1 \ , \\ \text{»} \qquad &= -\mu_1 : \mu_1 : -\mu_2 : \mu_2 : (\varepsilon^2 - 1)^3\mu_1 \ . \end{aligned}\right.$$

Si hanno inoltre le quattro cubiche $\mathcal{B}_{l,11}^{(3)}$, $\mathcal{B}_{l,12}^{(3)}$, $\mathcal{B}_{l,21}^{(3)}$, $\mathcal{B}_{l,22}^{(3)}$ che hanno le imagini V), VI), VIII), IX), ed i cui punti correnti hanno rispettivamente le coordinate

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} A_h{}^2x_h : \ldots : A_l{}^2x_l &= -\lambda_1{}^3 : \lambda_1{}^3 : -\lambda_2{}^3 : \lambda_2{}^3 : (\varepsilon\ -1)^3(\lambda_1 + \lambda_2)^3 \ , \\ \text{»} \qquad &= -\lambda_1{}^3 : \lambda_1{}^3 : -\lambda_2{}^3 : \lambda_2{}^3 : (\varepsilon\ -1)^3(\lambda_1 - \lambda_2)^3 \ , \\ \text{»} \qquad &= -\lambda_1{}^3 : \lambda_1{}^3 : -\lambda_2{}^3 : \lambda_2{}^3 : (\varepsilon^2 - 1)^3(\lambda_1 - \lambda_2)^3 \ , \\ \text{»} \qquad &= -\lambda_1{}^3 : \lambda_1{}^3 : -\lambda_2{}^3 : \lambda_2{}^3 : (\varepsilon^2 - 1)^3(\lambda_1 + \lambda_2)^3 \ . \end{aligned}\right.$$

Ponendo mente al quadro delle imagini, si vede che le rette $\mathcal{T}_{l,01}^{(3)}$ e $\mathcal{T}_{l,02}^{(3)}$ sono triple rispettivamente per le superficie $W_{jk}^{(1)}$, $W_{jk}^{(2)}$, su cui sono tagliate dal cono triplo $\mathbf{W}_{hi}$: è manifesto che le rimanenti rette triple di tali superficie semplici saranno tagliate dai due coni tripli rimanenti, estranei ad esse, $\mathbf{W}_{hl}$ e $\mathbf{W}_{il}$ **).

---

*) Veggasi, mutando i simboli, la mia Nota (G. B., 1894).

**) E poichè siamo sull'argomento delle rette triple di una superficie W conspaziale di un cono triplo, svolgiamolo alquanto toccando ancora quello delle cubiche doppie, prendendo ad esempio la W_{hi}. Nello spazio Ω_{hi}, cui appartiene la W_{hi} possiamo porre

$$A_h{}^2x_h : \ldots : A_l{}^2x_l = -z_1 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 \ ,$$

24. — Intersezione di due superficie doppie associate. — Poichè le due superficie doppie $\mathbf{V}_{hi}$, $\mathbf{V}_{hj}$ sono ordinatamente negli spazi Θ_{hi}, Θ_{hj}, la curva comune a tali superficie giacerà nel piano ∇_{kl} di coordinate correnti

$$A_h^2 x_h : \dots A_l^2 x_l = \mu_1 : \mu_1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 \,, \tag{29}$$

cosicchè, riguardando le z come coordinate di punto in Ω_{hi}, quelle del punto corrente di W_{hi} saranno espresse da

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \varkappa_1^3 : \varkappa_2^3 : \varkappa_3^3 : \varkappa_4^3 \,,$$

colla condizione

$$(1-\varepsilon)\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \varkappa_4 = 0 \,.$$

Allora le imagini delle tre rette triple (v. Nota G. B., 1894), quando si rappresenta la superficie W_{hi} sul piano $[\varkappa]$, sono

$$\varkappa_3 + \varkappa_4 = -[\varkappa_2 - (\varepsilon-1)\varkappa_1] = 0 \,,$$
$$\varkappa_4 + \varkappa_2 = -[\varkappa_3 - (\varepsilon-1)\varkappa_1] = 0 \,,$$
$$\varkappa_2 + \varkappa_3 = -[\varkappa_4 - (\varepsilon-1)\varkappa_1] = 0 \,,$$

epperò tali rette triple espresse nelle x sono

$$A_h^2 x_h : \dots : A_l^2 x_l = -\mu_1 : \mu_1 : (\varepsilon-1)^3\mu_1 : \quad -\mu_2 \quad : \quad \mu_2 \quad ,$$
$$\text{»} \qquad = -\mu_1 : \mu_1 : \quad \mu_2 \quad : (\varepsilon-1)^3\mu_1 : \quad -\mu_2 \quad ,$$
$$\text{»} \qquad = -\mu_1 : \mu_1 : \quad -\mu_2 \quad : \quad \mu_2 \quad : (\varepsilon-1)^3\mu_1 \,.$$

I vertici del triangolo di queste tre rette (G. B., 1894) sono i punti di coordinate:

$$A_h^2 x_h : \dots : A_l^2 x_l = -1 : 1 : -(\varepsilon-1)^3 : \ (\varepsilon-1)^3 \ : \ (\varepsilon-1)^3 \ ,$$
$$\text{»} \qquad = -1 : 1 : \ (\varepsilon-1)^3 \ : -(\varepsilon-1)^3 : \ (\varepsilon-1)^3 \ ,$$
$$\text{»} \qquad = -1 : 1 : \ (\varepsilon-1)^3 \ : \ (\varepsilon-1)^3 \ : -(\varepsilon-1)^3 \,.$$

che incontreremo ancora più oltre (n.° 39).

Quanto alle cubiche doppie della superficie W_{hi}, esse hanno per imagini le seguenti sei coppie di rette (G. B., 1894).

$$\varkappa_3 - \varepsilon\varkappa_4 = 0 \quad \text{e} \quad \varkappa_3 - \varepsilon^2\varkappa_4 = 0 \,,$$
$$\varkappa_4 - \varepsilon\varkappa_2 = 0 \quad \text{»} \quad \varkappa_4 - \varepsilon^2\varkappa_2 = 0 \,,$$
$$\varkappa_2 - \varepsilon\varkappa_3 = 0 \quad \text{»} \quad \varkappa_2 - \varepsilon^2\varkappa_3 = 0 \,,$$
$$\varkappa_2 + \varepsilon(\varepsilon-1)\varkappa_1 = 0 \quad \text{»} \quad \varkappa_2 + \varepsilon^2(\varepsilon-1)\varkappa_1 = 0 \,,$$
$$\varkappa_3 + \varepsilon(\varepsilon-1)\varkappa_1 = 0 \quad \text{»} \quad \varkappa_3 + \varepsilon^2(\varepsilon-1)\varkappa_1 = 0 \,,$$
$$\varkappa_4 + \varepsilon(\varepsilon-1)\varkappa_1 = 0 \quad \text{»} \quad \varkappa_4 + \varepsilon^2(\varepsilon-1)\varkappa_1 = 0 \,.$$

Di conseguenza, le coordinate correnti sopra tali cubiche sono rispettivamente:

$$A_h^2 x_h : \dots : A_l^2 x_l = -(\lambda_1-\lambda_2)^3 : (\lambda_1-\lambda_2)^3 : (\varepsilon-1)^3\lambda_1^3 : (\varepsilon-1)^3\lambda_2^3 : (\varepsilon-1)^3\lambda_2^3 \,,$$
$$\text{»} \qquad = -(\lambda_1-\lambda_2)^3 : (\lambda_1-\lambda_2)^3 : (\varepsilon-1)^3\lambda_2^3 : (\varepsilon-1)^3\lambda_1^3 : (\varepsilon-1)^3\lambda_2^3 \,,$$
$$\text{»} \qquad = -(\lambda_1-\lambda_2)^3 : (\lambda_1-\lambda_2)^3 : (\varepsilon-1)^3\lambda_2^3 : (\varepsilon-1)^3\lambda_2^3 : (\varepsilon-1)^3\lambda_1^3 \,,$$
$$\text{»} \qquad = \lambda_1^3 : -\lambda_1^3 : \quad (\varepsilon-1)^3\lambda_1^3 \quad : \quad (\varepsilon-1)^3\lambda_2^3 \quad : (\varepsilon-1)^3(\lambda_1-\lambda_2)^3 \,,$$
$$\text{»} \qquad = \lambda_1^3 : -\lambda_1^3 : (\varepsilon-1)^3(\lambda_1-\lambda_2)^3 : \quad (\varepsilon-1)^3\lambda_1^3 \quad : (\varepsilon-1)^3\lambda_2 \,,$$
$$\text{»} \qquad = \lambda_1^3 : -\lambda_1^3 : \quad (\varepsilon-1)^3\lambda_2^3 \quad : (\varepsilon-1)^3(\lambda_1-\lambda_2)^3 : (\varepsilon-1)^3\lambda_1^3 \,.$$

pel quale passa pure lo spazio Θ_{ij} associato in terna coi due primi, perchè ha luogo l' identità

$$\Theta_{ij} + \Theta_{jh} + \Theta_{hi} = 0 \ .$$

La sezione determinata nella varietà Ξ da questo piano è rappresentata nello spazio $[\omega]$ dal sistema

$$(30) \qquad \begin{cases} \overset{(0)}{\vartheta}_{hi} \overset{(1)}{\vartheta}_{hi} \overset{(2)}{\vartheta}_{hi} = 0 \ , \\ \overset{(0)}{\vartheta}_{hj} \overset{(1)}{\vartheta}_{hj} \overset{(2)}{\vartheta}_{hj} = 0 \ , \end{cases}$$

le cui soluzioni sono le rette del quadro seguente:

$$(31) \qquad \left\{ \begin{array}{lllllllll} \text{I)} & (00)\, A_h\alpha_h : \ldots : A_l\alpha_l = & \lambda_1 : & \lambda_1 : & \lambda_1 : \lambda_2 : & -(3\lambda_1 + \lambda_2) \ , \\ \text{II)} & (01) \quad » & = \lambda_1 : & \lambda_1 : & \varepsilon^2\lambda_1 : \lambda_2 : & (\varepsilon - 1)\lambda_1 - \lambda_2 \ , \\ \text{III)} & (02) \quad » & = \lambda_1 : & \lambda_1 : & \varepsilon\lambda_1 : \lambda_2 : & (\varepsilon^2 - 1)\lambda_1 - \lambda_2 \ , \\ \text{IV)} & (10) \quad » & = \lambda_1 : & \varepsilon^2\lambda_1 : & \lambda_1 : \lambda_2 : & (\varepsilon - 1)\lambda_1 - \lambda_2 \ , \\ \text{V)} & (11) \quad » & = \varepsilon\lambda_1 : & \lambda_1 : & \lambda_1 : \lambda_2 : & (\varepsilon^2 - 1)\lambda_1 - \lambda_2 \ , \\ \text{VI)} & (12) \quad » & = \varepsilon^2\lambda_1 : & \varepsilon\lambda_1 : & \lambda_1 : \lambda_2 : & -\lambda_2 \ , \\ \text{VII)} & (20) \quad » & = \lambda_1 : & \varepsilon\lambda_1 : & \lambda_1 : \lambda_2 : & (\varepsilon^2 - 1)\lambda_1 - \lambda_3 \ , \\ \text{VIII)} & (21) \quad » & = \varepsilon^2\lambda_1 : & \lambda_1 : & \varepsilon\lambda_1 : \lambda_2 : & -\lambda_2 \ , \\ \text{IX)} & (22) \quad » & = \varepsilon^2\lambda_1 : & \lambda_1 : & \lambda_1 : \lambda_2 : & (\varepsilon - 1)\lambda_1 - \lambda_2 \ . \end{array} \right.$$

Da questo quadro risulta che sono intersezioni delle due superficie doppie considerate le linee d'imagini VI) e VIII); II), IV) e IX); III), V) e VII). Le rette VI) e VIII) sono imagini della retta

$$(32) \qquad A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = \mu_1 : \mu_1 : \mu_1 : \mu_2 : -\mu_2 \ ,$$

che indicheremo col simbolo S_{kl}, la quale, essendo rappresentata tre volte su ciascuna delle proprie imagini, è *sestupla* per la varietà Ξ. Le due terne di rette II), IV), IX) e III), V), VII) rappresentano invece due cubiche O'_{kl}, O''_{kl} le cui coordinate correnti sono rispettivamente:

$$(33) \qquad \begin{cases} A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_2^3 : [(\varepsilon - 1)\lambda_1 - \lambda_2]^3 \ , \\ \qquad » \qquad\qquad = \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_2^3 : [(\varepsilon^2 - 1)\lambda_1 - \lambda_2]^3 \ , \end{cases}$$

triple, manifestamente, per la varietà Ξ.

Le due superficie V_{hi}, V_{hj} conspaziali delle due doppie s'intersecano nella cubica semplice

$$(34) \qquad A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_2^3 : -(3\lambda_1 + \lambda_2)^3 \ ,$$

di imagine I) e che noi designeremo con C_{kl}.

25. — Dalle identità:

$$\mathfrak{I}_{rs}^{(\nu)} = -\varepsilon^{\nu}\mathfrak{I}_{sr}^{(-\nu)}$$

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{I}_{ij}^{(0)} + \mathfrak{I}_{jh}^{(0)} + \mathfrak{I}_{hi}^{(0)} = 0 \, , \\ \mathfrak{I}_{ij}^{(1)} + \mathfrak{I}_{jh}^{(1)} + \mathfrak{I}_{hi}^{(1)} = 0 \, , \\ \mathfrak{I}_{ij}^{(2)} + \mathfrak{I}_{jh}^{(2)} + \mathfrak{I}_{hi}^{(2)} = 0 \, , \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{I}_{ij}^{(0)} = -\varepsilon^2(\mathfrak{I}_{hi}^{(1)} - \mathfrak{I}_{hj}^{(1)}) = -\varepsilon(\mathfrak{I}_{hi}^{(2)} - \mathfrak{I}_{hj}^{(2)}) \, , \\ \mathfrak{I}_{jh}^{(0)} = -\varepsilon^2(\mathfrak{I}_{ij}^{(1)} - \mathfrak{I}_{ih}^{(1)}) = -\varepsilon(\mathfrak{I}_{ij}^{(2)} - \mathfrak{I}_{ih}^{(2)}) \, , \\ \mathfrak{I}_{hi}^{(0)} = -\varepsilon^2(\mathfrak{I}_{jh}^{(1)} - \mathfrak{I}_{ji}^{(1)}) = -\varepsilon(\mathfrak{I}_{jh}^{(2)} - \mathfrak{I}_{ji}^{(2)}) \, , \end{array} \right. \end{array} \right.$$

risulta che la superficie doppia $\mathbf{V}_{ij}$, associata in terna colle due considerate, passa anch'essa per la retta sestupla S_{hl} e per le due cubiche triple O'_{hl}, O''_{hl}.

Possiamo enunciare le seguenti proprietà riassuntive: *tre superficie doppie associate in terna si intersecano in due cubiche triple per la varietà e semplici per ciascuna superficie, ed in una retta sestupla per la varietà e tripla per ciascuna superficie.*

Le superficie semplici conspaziali delle tre doppie si intersecano pure nelle due cubiche triple ora dette, le quali sono semplici per ciascuna di esse, ed in una terza cubica pure semplice (naturalmente) per esse.

26. — Si osservi che la retta sestupla S_{kl} proietta dal punto $\mathbf{K}_{kl}(\mu_1 = 0)$ il punto doppio $(\mu_2 = 0)$ della cubica principale opposta γ_{kl} *).

Ne segue chiaramente che *la generatrice doppia di ogni cono triplo è sestupla per la varietà* Ξ, *ed è tripla per ciascuna delle tre superficie doppie estranee a quel cono triplo* (e quindi associate in terna tra loro).

Contemporaneamente è evidente che *le rette triple della superficie doppia* $\mathbf{V}_{hi}$ *sono le generatrici doppie* S_{kl}, S_{lj}, S_{jk} *dei tre coni tripli ad essa estranei* **).

---

*) Veggasi la Nota (G. B., 1894), n. 12.

**) Tali rette hanno ordinatamente le coordinate correnti

$$\begin{array}{rl} A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = & \mu_1 : \mu_1 : \quad \mu_1 : \quad \mu_2 : -\mu_2 \, , \\ » \qquad = & \mu_1 : \mu_1 : -\mu_2 : \quad \mu_1 : \quad \mu_2 \, , \\ » \qquad = & \mu_1 : \mu_1 : \quad \mu_2 : -\mu_2 : \quad \mu_1 \, , \end{array}$$

e s'incontrano a due a due (v. Nota G. B., 1894) in tre punti, che incontreremo anche più tardi (n.° 44):

$$\begin{array}{rl} S_{ij}S_{jk} \equiv A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = & 1 : 1 : -1 : \quad 1 : \quad 1 \, , \\ S_{jk}S_{kl} \equiv \qquad » \qquad = & 1 : 1 : \quad 1 : -1 : \quad 1 \, , \\ S_{kl}S_{lj} \equiv \qquad » \qquad = & 1 : 1 : \quad 1 : \quad 1 : -1 \, . \end{array}$$

Il piano π_{hi} di tali rette è quindi base del fascio di spazi ordinari $\varkappa_1\Theta_{hi} + \varkappa_2\Gamma_{hi}$, dove

$$\Gamma_{hi} = A_h^2 x_h + A_i^2 x_i - 2A_j^2 x_j - 2A_k^2 x_k - 2A_l^2 x_l \, .$$

27. — Intersezione di due superficie doppie estranee fra loro. — I due spazi Θ_{hi}, Θ_{jk} contenenti le due superficie doppie fra loro estranee $\mathbf{V}_{hi}$ e $\mathbf{V}_{jk}$, si tagliano nel piano $\nabla_l^{(3)}$, sul quale sono

$$A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = \mu_1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_2 : \mu_3 \tag{36}$$

sono le coordinate correnti.

In questo piano giacciono le intersezioni delle due superficie anzidette, intersezioni che bisogna dunque ricercare fra le curve, le cui imagini sono soluzioni del sistema

$$\left\{ \begin{aligned} & \vartheta_{hi}^{(0)} \vartheta_{hi}^{(1)} \vartheta_{hi}^{(2)} = 0 \,, \\ & \vartheta_{jk}^{(0)} \vartheta_{jk}^{(1)} \vartheta_{jk}^{(2)} = 0 \,, \end{aligned} \right. \tag{37}$$

ossia sono le rette del quadro seguente:

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} \text{I)} & (00) \ldots A_h \alpha_h : \ldots : A_l \alpha_l = & \lambda_1 : & \lambda_1 : & \lambda_2 : & \lambda_2 : & -2(\lambda_1 + \lambda_2) \,, \\ \text{II)} & (01) \ldots \quad » & = \lambda_1 : & \lambda_1 : & \varepsilon^2\lambda_2 : & \varepsilon\lambda_2 : & -2\lambda_1 + \lambda_2 \,, \\ \text{III)} & (02) \ldots \quad » & = \lambda_1 : & \lambda_1 : & \varepsilon\lambda_2 : & \varepsilon^2\lambda_2 : & -2\lambda_1 + \lambda_2 \,, \\ \text{IV)} & (10) \ldots \quad » & = \varepsilon^2\lambda_1 : & \varepsilon\lambda_1 : & \lambda_2 : & \lambda_2 : & \lambda_1 - 2\lambda_2 \,, \\ \text{V)} & (11) \ldots \quad » & = \varepsilon^2\lambda_1 : & \varepsilon\lambda_1 : & \varepsilon^2\lambda_2 : & \varepsilon\lambda_2 : & \lambda_1 + \lambda_2 \,, \\ \text{VI)} & (12) \ldots \quad » & = \varepsilon^2\lambda_1 : & \varepsilon\lambda_1 : & \varepsilon\lambda_2 : & \varepsilon^2\lambda_2 : & \lambda_1 + \lambda_2 \,, \\ \text{VII)} & (20) \ldots \quad » & = \varepsilon\lambda_1 : & \varepsilon^2\lambda_1 : & \lambda_2 : & \lambda_2 : & \lambda_1 - 2\lambda_2 \,, \\ \text{VIII)} & (21) \ldots \quad » & = \varepsilon\lambda_1 : & \varepsilon^2\lambda_1 : & \varepsilon^2\lambda_2 : & \varepsilon\lambda_2 : & \lambda_1 + \lambda_2 \,, \\ \text{IX)} & (22) \ldots \quad » & = \varepsilon\lambda_1 : & \varepsilon^2\lambda_1 : & \varepsilon\lambda_2 : & \varepsilon^2\lambda_2 : & \lambda_1 + \lambda_2 \,. \end{array} \right. \tag{38}$$

Ora, l'intersezione delle due superficie doppie $\mathbf{V}_{hi}$, $\mathbf{V}_{jk}$ è, manifestamente, rappresentata dalle rette V), VI), VIII), IX) del quadro, ed è quindi la cubica quadrupla $Y_l^{(3)}$ lungo la quale sono

$$A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_2^3 : \lambda_2^3 : (\lambda_1 + \lambda_2)^3 \tag{39}$$

le coordinate correnti.

È pure evidente che questa cubica Y è doppia per ciascuna delle due superficie doppie che s'intersecano in essa. Cosicchè della superficie $\mathbf{V}_{hi}$, ad esempio, noi possiamo ora indicare le sei cubiche doppie (v. la Nota G. B., 1894): le tre cubiche quintuple per la varietà Ξ, $Z_{hi}^{(j)}$, $Z_{hi}^{(k)}$, $Z_{hi}^{(l)}$ (n.° 19) e le tre cubiche quadruple $Y_j^{(3)}$, $Y_k^{(1)}$, $Y_l^{(3)}$. — Che i piani di queste sei cubiche doppie di $\mathbf{V}_{hi}$ passino tutti per uno stesso punto (v. Nota ora citata, n.° 5) risulta chiaro da ciò che le coppie di spazi Ω_{hj} e Ω_{ij}; Ω_{hk} e Ω_{ik}; Ω_{hl} e Ω_{il} segantisi nei piani $\Delta_{hi}^{(j)}$, $\Delta_{hi}^{(k)}$, $\Delta_{hi}^{(l)}$ concorrono nel punto di coordinate

$$A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = -1 : -1 : 1 : 1 : 1 \,,$$

pel quale passano, oltre lo spazio Θ_{hi}, ancora gli altri Θ_{hl}, Θ_{lj}, Θ_{jk}. — Il tetraedro principale della superficie doppia $\mathbf{V}_{hi}$ ha per facce i piani: $\mathbf{U}_2^{(hi)}$; $\Theta_{hi}=0$, $x_j=0$; $\Theta_{hi}=0$, $x_k=0$; $\Theta_{hi}=0$, $x_l=0$: ora è facile verificare che i piani delle tre cubiche doppie Y

della superficie medesima proiettano i tre spigoli di tale tetraedro concorrenti nel vertice opposto ad $\mathbf{U}_2^{(hi)}$, che è il punto

$$A_h^2 x_h : \dots : A_l^2 x_l = 1 : 1 : 0 : 0 : 0 ;$$

mentre i piani delle tre cubiche doppie Z proiettano i tre spigoli dello stesso tetraedro che giacciono nel piano $\mathbf{U}_2^{(hi)}$.

28. — Le rimanenti intersezioni del piano $\nabla_l^{(3)}$ colla varietà Ξ sono: la cubica semplice $\mathcal{D}_l^{(3)}$, di imagine I); e le due cubiche $\mathcal{M}_l'^{(3)}$, $\mathcal{M}_l''^{(3)}$ rispettivamente di imagini II) e III), IV) e VII), e quindi doppie entrambe per la varietà.

Le coordinate correnti lungo $\mathcal{D}_l^{(3)}$ sono

$$A_h^2 x_h : \dots : A_l^2 x_l = \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_2^3 : \lambda_2^3 : -8(\lambda_1 + \lambda_2) \; ; \tag{40}$$

mentre lungo le altre due cubiche $\mathcal{M}_l'^{(3)}$, $\mathcal{M}_l''^{(3)}$ sono rispettivamente

$$\begin{cases} A_h^2 x_h : \dots A_l^2 x_l = \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_2^3 : \lambda_2^3 : (-2\lambda_1 + \lambda_2)^3 \, , \\ \qquad \text{»} \qquad\quad = \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_2^3 : \lambda_2^3 : (\lambda_1 - 2\lambda_2)^3 \, . \end{cases} \tag{41}$$

Nella cubica $\mathcal{D}_l^{(3)}$ si intersecano le due superficie semplici V_{hi}, V_{jk} conspaziali delle due doppie considerate.

Invece nella cubica $\mathcal{M}_l'^{(3)}$ s'incrociano la superficie semplice V_{hi} colla doppia $\mathbf{V}_{jk}$: in essa la $\mathbf{V}_{jk}$ ha una cubica semplice e la V_{hi} una doppia. Similmente la $\mathcal{M}_l''^{(3)}$ è semplice per $\mathbf{V}_{hi}$ e doppia per la V_{jk} *).

---

*) Così si vede che tre cubiche doppie di V_{hi} sono $\mathcal{M}_j'^{(3)}, \mathcal{M}_k'^{(1)}, \mathcal{M}_l'^{(3)}$, e per la V_{jk} sono $\mathcal{M}_l''^{(3)}$, $\mathcal{M}_h''^{(1)}, \mathcal{M}_i''^{(3)}$. Ma è facile svolgere direttamente quest' argomento.

Nello spazio Θ_{hi} della superficie V_{hi} possiamo porre

$$A_h^2 x_h : \dots : A_l^2 x_l = z_1 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 \; ,$$

con che la superficie V_{hi} viene rappresentata dalle formole

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \varkappa_1^3 : \varkappa_2^3 : \varkappa_3^3 : \varkappa_4^3 \; ,$$

colla condizione

$$2\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \varkappa_4 = 0 \; ,$$

formole che dànno la rappresentazione univoca delle superficie sopra un piano [$\varkappa$]. In questa rappresentazione sono imagini delle tre rette triple (v. mia Nota: G. B., 1894) le rette

$$\varkappa_3 + \varkappa_4 = -(\varkappa_2 + 2\varkappa_1) = 0 \; ,$$
$$\varkappa_4 + \varkappa_2 = -(\varkappa_3 + 2\varkappa_1) = 0 \; ,$$
$$\varkappa_2 + \varkappa_3 = -(\varkappa_4 + 2\varkappa_1) = 0 \; .$$

29. — Riassumiamo adunque concludendo che *due superficie doppie estranee fra loro si intersecano in una cubica piana razionale quadrupla per la varietà Ξ e doppia per ciascuna di esse.* — *Ciascuna di esse, poi, taglia la superficie semplice conspaziale dell' altra in una cubica doppia per questa ultima superficie e complanare della prima cubica. Le due superficie semplici conspaziali di ciascuna superficie doppia si intersecano in un'ultima cubica semplice complanare delle prime tre.*

30. — Le cubiche quadruple Y sono in numero di 15, giacendone tre su di ogni superficie doppia e passando per ognuna di esse due superficie doppie.

31. — Intersezione di un cono triplo con una superficie doppia. — Il caso di un cono triplo con una superficie doppia fra loro associati è già stato assorbito da quello di due coni tripli fra loro associati (num. 17-21), quindi non c'è più bisogno di esaminarlo qui. Ci occuperemo dunque ora di un cono triplo $\mathbf{W}_{hi}$ ed una superficie doppia $\mathbf{V}_{jk}$ fra loro estranei.

Tali due superficie giacciono nei piani Ω_{hi}, Θ_{jk} rispettivamente i quali si segano reciprocamente nel piano $\triangleleft_l^{(jk)}$ di coordinate correnti

$$A_h^2 x_h : \dots : A_l^2 x_l = -\mu_1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_2 : \mu_3 \ . \tag{42}$$

Le rette triple sono dunque date dalle formole

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 : z_3 : z_4 &= \mu_1 : -8\mu_1 : \mu_2 : -\mu_2 \ , \\ \text{»} \quad &= \mu_1 : -\mu_2 : -8\mu_1 : \mu_2 \ , \\ \text{»} \quad &= \mu_1 : \mu_2 : -\mu_2 : -8\mu_1 \ , \end{aligned}$$

da cui si sale immediatamente alle espressioni delle x [Cfr. le formole (45)].

Quanto alle cubiche doppie della superficie stessa (G. B., 1894) esse hanno le imagini

$$\begin{array}{ll|ll} \varkappa_3 - \varepsilon\varkappa_4 = 0 \quad \text{e} & \varkappa_3 - \varepsilon^2\varkappa_4 = 0 \ , & \varkappa_2 - 2\varepsilon\varkappa_1 = 0 \quad \text{e} & \varkappa_2 - 2\varepsilon^2\varkappa_1 = 0 \ , \\ \varkappa_4 - \varepsilon\varkappa_2 = 0 \quad \text{»} & \varkappa_4 - \varepsilon^2\varkappa_2 = 0 \ , & \varkappa_3 - 2\varepsilon\varkappa_1 = 0 \quad \text{»} & \varkappa_3 - 2\varepsilon^2\varkappa_1 = 0 \ , \\ \varkappa_2 - \varepsilon\varkappa_3 = 0 \quad \text{»} & \varkappa_2 - \varepsilon^2\varkappa_3 = 0 \ , & \varkappa_4 - 2\varepsilon\varkappa_1 = 0 \quad \text{»} & \varkappa_4 - 2\varepsilon^2\varkappa_1 = 0 \ , \end{array}$$

epperò sono rappresentate dalle coordinate correnti x:

$$\begin{aligned} A_h^2 x_h : \dots : A_l^2 x_l &= (\lambda_1 - \lambda_2)^3 : (\lambda_1 - \lambda_2)^3 : 8\lambda_2^3 : 8\lambda_1^3 : 8\lambda_1^3 \ , \\ \text{»} \quad &= (\lambda_1 - \lambda_2)^3 : (\lambda_1 - \lambda_2)^3 : 8\lambda_1^3 : 8\lambda_1^3 : 8\lambda_1^3 \ , \\ \text{»} \quad &= (\lambda_1 - \lambda_2)^3 : (\lambda_1 - \lambda_2)^3 : 8\lambda_1^3 : 8\lambda_1^3 : 8\lambda_2^3 \ , \\ \text{»} \quad &= \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : 8(\lambda_1 - \lambda_2)^3 : 8\lambda_1^3 : 8\lambda_2^3 \ , \\ \text{»} \quad &= \lambda_1^3 : \lambda_1^3 : 8\lambda_2^3 : 8(\lambda_1 - \lambda_2)^3 : 8\lambda_1^3 \ , \\ \text{»} \quad &= \lambda_1^3 : \lambda_1^8 : 8\lambda_1^3 : 8\lambda_2^3 : 8(\lambda_1 - \lambda_2)^3 \ . \end{aligned}$$

Le prime tre di queste cubiche sono le M, suindicate di V_{hi} e soltanto differiscono per la determinazione parametrica su di esse. Per es., se nella prima delle (41) si pongono $\lambda_1 - \lambda_2$ in luogo di λ_1 e $2\lambda_1$ in vece di λ_2 si ottiene la terza delle attuali formole.

Questo piano taglia la varietà Ξ secondo un gruppo di linee le cui imagini nello spazio rappresentativo $[\omega]$ sono le soluzioni del sistema

$$(43) \qquad \begin{cases} \theta_{hi}^{(0)}\theta_{hi}^{(1)}\theta_{hi}^{(2)}=0 \; , \\ \mathfrak{I}_{jk}^{(0)}\mathfrak{I}_{jk}^{(1)}\mathfrak{I}_{jk}^{(2)}=0 \; , \end{cases}$$

epperò sono le rette del quadro

$$(44) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \text{I)} & (00)\ldots A_h\alpha_h:\ldots:A_l\alpha_l= & -\lambda_1:\lambda_1:\lambda_2:\lambda_2:-2\lambda_2 \; , \\ \text{II)} & (01)\ldots \quad » & =-\lambda_1:\lambda_1:\varepsilon^2\lambda_2:\varepsilon\lambda_2:\lambda_2 \; , \\ \text{III)} & (02)\ldots \quad » & =-\lambda_1:\lambda_1:\varepsilon\lambda_2:\varepsilon^2\lambda_2:\lambda_2 \; , \\ \text{IV)} & (10)\ldots \quad » & =-\varepsilon\lambda_1:\lambda_1:\lambda_2:\lambda_2:(\varepsilon-1)\lambda_1-2\lambda_2 \; , \\ \text{V)} & (11)\ldots \quad » & =-\varepsilon\lambda_1:\lambda_1:\varepsilon^2\lambda_2:\varepsilon\lambda_2:(\varepsilon-1)\lambda_1+\lambda_2 \; , \\ \text{VI)} & (12)\ldots \quad » & =-\varepsilon\lambda_1:\lambda_1:\varepsilon\lambda_2:\varepsilon^2\lambda_2:(\varepsilon-1)\lambda_1+\lambda_2 \; , \\ \text{VII)} & (20)\ldots \quad » & =-\varepsilon^2\lambda_1:\lambda_1:\lambda_2:\lambda_2:(\varepsilon^2-1)\lambda_1-2\lambda_2 \; , \\ \text{VIII)} & (21)\ldots \quad » & =-\varepsilon^2\lambda_1:\lambda_1:\varepsilon^2\lambda_2:\varepsilon\lambda_2:(\varepsilon^2-1)\lambda_1+\lambda_2 \; , \\ \text{IX)} & (22)\ldots \quad » & =-\varepsilon^2\lambda_1:\lambda_1:\varepsilon\lambda_2:\varepsilon^2\lambda_2:(\varepsilon^2-1)\lambda_1-2\lambda_2 \; . \end{array} \right.$$

Le imagini dell'intersezione del cono triplo e della superficie doppia considerati sono le due rette II) e III) le quali rappresentano una retta sestupla della varietà Ξ e tripla per la superficie doppia $\mathbf{V}_{jk}$ (v. n.° 24), e che ha le coordinate correnti

$$A_h^2 x_h:\ldots:A_l^2 x_l=-\mu_2:\mu_2:\mu_1:\mu_1:\mu_1 \; ,$$

epperò è la retta sestupla S_{hi}.

Ma nello stesso piano $\triangleleft_l^{(jk)}$ trovasi pure la retta tripla di imagine I), retta tripla della superficie V_{jk} e generatrice del cono $\mathbf{W}_{hi}$, e di coordinate correnti

$$(45) \qquad A_h^2 x_h:\ldots:A_l^2 x_l=-\mu_1:\mu_1:\mu_2:\mu_2:-8\mu_2 \; .$$

Indicheremo questa retta col simbolo $Q_l^{(jk)}$ *).

Sono ancora nello stesso piano le due cubiche doppie che hanno per imagini le coppie V), VI) ed VIII), IX) di rette del quadro precedente, e quindi rispettivamente le coordinate correnti:

$$(46) \qquad \begin{cases} A_h^2 x_h:\ldots:A_l^2 x_l=-\lambda_1^3:\lambda_1^3:\lambda_2^3:\lambda_2^3:[(\varepsilon-1)\lambda_1+\lambda_2]^3 \; , \\ \qquad » \qquad\qquad =-\lambda_1^3:\lambda_1^3:\lambda_2^3:\lambda_2^3:[(\varepsilon^2-1)\lambda_1+\lambda_2]^3 \; , \end{cases}$$

---

*) Così le rette triple della superficie V_{jk} sono le $Q_l^{(jk)}$, $Q_h^{(jk)}$, $Q_i^{(jk)}$ (veggasi la nota al num. 28). I vertici del triangolo di queste rette sono i punti

$$\begin{array}{rl} A_h^2 x_h:\ldots:A_l^2 x_l = & -8:-8:1:1:\;\;8 \\ » \quad = & \;\;8:-8:1:1:-8 \\ » \quad = & -8:\;\;8:1:1:-8 \end{array}$$

ed il loro piano è base del fascio di spazi ordinari

$$\rho_1(A_h^2 x_h+A_i^2 x_i+A_j^2 x_j+A_l^2 x_l)+\rho(A_h^2 x_h+A_i^2 x_i+A_k^2 x_k+A_l^2 x_l)=0 \; .$$

e che noi designeremo ordinatamente coi simboli $\mathcal{N}_l^{\prime(jk)}$, $\mathcal{N}_l^{\prime\prime(jk)}$. La prima di queste cubiche è pure doppia per la superficie $W_{hi}^{(1)}$, come la seconda è doppia per $W_{hi}^{(2)}$ *), mentre esse sono semplici per la superficie doppia $\mathbf{V}_{jk}$.

Finalmente rimangono a computare ancora le due cubiche semplici $E_l^{\prime(jk)}, E_l^{\prime\prime(jk)}$ di imagini IV) e VII) ordinatamente, e di coordinate correnti

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l &= -\lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_2^3 : \lambda_2^3 : [(\varepsilon-1)\lambda_1 - 2\lambda_2]^3 \,, \\ \text{»} \qquad &= -\lambda_1^3 : \lambda_1^3 : \lambda_2^3 : \lambda_2^3 : [(\varepsilon^2-1)\lambda_1 - 2\lambda_2]^3 \,. \end{aligned}\right.$$

Esse non sono altro che le intersezioni della superficie V_{jk} colle due superficie $W_{hi}^{(1)}$, $W_{hi}^{(2)}$ ordinatamente.

§ IV. — Punti di concorso delle curve multiple.

32. — I punti di concorso di due o più curve multiple, che noi considereremo, saranno solamente quelle che giacciono in piani Δ, ∇, $\triangleleft$ differenti, e non appartenenti ad uno stesso spazio ordinario. Ciò torna a dire che tali punti devono essere fra quelli di intersezione della varietà Ξ con ciascuna delle rette comuni a tre spazi Ω e Θ.

33. — Tracce di Ξ sulla retta comune agli spazi $\Omega_{hi}, \Omega_{hj}, \Omega_{hk}$. — Codesti tre spazi si tagliano complessivamente nella retta $\mathbf{r}_l^{(h)}$ di coordinate correnti

$$(48)\qquad A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = -\mu_1 : \mu_1 : \mu_1 : \mu_1 : \mu_2 \,,$$

e a due a due si tagliano nei tre piani

$$\begin{aligned} &\Delta_{jk}^{(h)} \quad \text{pel quale} \quad A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = -\mu_1 : \mu_2 : \mu_1 : \mu_1 : \mu_3 \,, \\ &\Delta_{ki}^{(h)} \qquad \text{»} \qquad\qquad \text{»} \qquad\qquad = -\mu_1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_1 : \mu_3 \,, \\ &\Delta_{ij}^{(h)} \qquad \text{»} \qquad\qquad \text{»} \qquad\qquad = -\mu_1 : \mu_1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 \,, \end{aligned}$$

tutti passanti, naturalmente, per la retta $\mathbf{r}_l^{(h)}$.

In questi piani sono, rispettivamente, le curve di Ξ:

$$\begin{aligned} &Z_{jk}^{(h)} \,,\; L_{jk}^{(h)} \,,\; \mathcal{A}_{jk}^{\prime(h)} \,,\; \mathcal{A}_{jk}^{\prime\prime(h)} \qquad (\text{in } \Delta_{jk}^{(h)}) \,, \\ &Z_{ki}^{(h)} \,,\; L_{ki}^{(h)} \,,\; \mathcal{A}_{ki}^{\prime(h)} \,,\; \mathcal{A}_{ki}^{\prime\prime(h)} \qquad (\text{in } \Delta_{ki}^{(h)}) \,, \\ &Z_{ij}^{(h)} \,,\; L_{ij}^{(h)} \,,\; \mathcal{A}_{ij}^{\prime(h)} \,,\; \mathcal{A}_{ij}^{\prime\prime(h)} \qquad (\text{in } \Delta_{ij}^{(h)}) \,, \end{aligned}$$

---

*) Le tre cubiche doppie della superficie $W_{hi}^{(1)}$ qui indicate sono state già incontrate alla nota di piè pagina del n.° 23. Se nelle formole rappresentanti $\mathcal{N}_l^{\prime(jk)}$ si pongono $\lambda_1 - \lambda_2$ in luogo di λ_1 ed $(\varepsilon-1)\lambda_2$ in luogo di λ_2 si trovano infatti le formole di terza orizzontale dell'ultimo quadro in quella nota esposto. Le due prime della stessa nota sono $\mathcal{N}_j^{\prime(ki)}$ e $\mathcal{N}_k^{\prime(ij)}$ ordinatamente.

le quali segano la retta $\mathbf{r}_l^{(h)}$ complessivamente nei punti:

$$
(49)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
\mathbf{P}^{(h)} & \text{di coordinate} & A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = -1:1:1:1:1 & , \\
\mathbf{Q}_l^{(h)} & \text{»} & \text{»} \quad = -1:1:1:1:-8 & , \\
\mathbf{E}_l^{\prime(h)} & \text{»} & \text{»} \quad = -1:1:1:1:(2-\varepsilon)^3 & , \\
\mathbf{E}_l^{\prime\prime(h)} & \text{»} & \text{»} \quad = -1:1:1:1:(2-\varepsilon^2)^3 & , \\
\mathbf{A}_l^{\prime(h)} & \text{»} & \text{»} \quad = -1:1:1:1:(\varepsilon-3)^3 & , \\
\mathbf{A}_l^{\prime\prime(h)} & \text{»} & \text{»} \quad = -1:1:1:1:(\varepsilon^2-3)^3 & .
\end{array}\right.
$$

Il punto $\mathbf{P}^{(h)}$ *è multiplo secondo il numero 12 per la varietà* Ξ *), *doppio per ognuna delle cubiche quintuple* $Z_{jk}^{(h)}, Z_{ki}^{(h)}, Z_{ij}^{(h)}$ *e semplice per le cubiche doppie* $L_{jk}^{(h)}, L_{ki}^{(h)}, L_{ij}^{(h)}$.

Il punto $\mathbf{Q}_l^{(h)}$ *è multiplo secondo il numero 7 per la varietà* Ξ **), e per esso passano semplicemente le $Z_{jk}^{(h)}, Z_{ki}^{(h)}, Z_{ij}^{(h)}$ anzidette, poi le cubiche semplici $\mathcal{A}_{jk}^{\prime(h)}$ ed $\mathcal{A}_{jk}^{\prime\prime(h)}$, $\mathcal{A}_{ki}^{\prime(h)}$ ed $\mathcal{A}_{ki}^{\prime\prime(h)}$, $\mathcal{A}_{ij}^{\prime(h)}$ ed $\mathcal{A}_{ij}^{\prime\prime(h)}$.

I due punti $\mathbf{E}_l^{\prime(h)}$ *ed* $\mathbf{E}_l^{\prime\prime(h)}$ *sono tripli entrambi per la varietà* Ξ ***). Il punto $\mathbf{E}_l^{\prime(h)}$ è semplice per le curve $L_{jk}^{(h)}, L_{ki}^{(h)}, L_{ij}^{(h)}$ e per le $\mathcal{A}_{jk}^{\prime\prime(h)}, \mathcal{A}_{ki}^{\prime\prime(h)}, \mathcal{A}_{ij}^{\prime\prime(h)}$; mentre il punto $\mathbf{E}_l^{\prime\prime(h)}$ lo è per le curve $L_{jk}^{(h)}, L_{ki}^{(h)}, L_{ij}^{(h)}$ e per le $\mathcal{A}_{jk}^{\prime(h)}, \mathcal{A}_{ki}^{\prime(h)}, \mathcal{A}_{ij}^{\prime(h)}$.

Finalmente i due punti $\mathbf{A}_l^{\prime(h)}$ ed $\mathbf{A}_l^{\prime\prime(h)}$ sono semplici per la varietà Ξ ****).

Intanto è evidente che dai punti $\mathbf{P}^{(h)}, \mathbf{Q}_l^{(h)}, \mathbf{E}_l^{\prime(h)}, \mathbf{E}_l^{\prime\prime(h)}, \mathbf{A}_l^{\prime(h)}, \mathbf{A}_l^{\prime\prime(h)}$ sono esaurite tutte le intersezioni possibili della retta $\mathbf{r}_l^{(h)}$ colla varietà Ξ, perchè, infatti,

$$12+7+3+3+1+1=27 .$$

---

*) Le imagini del punto $\mathbf{P}^{(h)}$ sono:

$$
\begin{array}{llll}
[-1:1:1:\varepsilon:\varepsilon^2] , & [-1:1:\varepsilon:\varepsilon^2:1] , & [-1:\varepsilon:\varepsilon^2:1:1] , & [-1:\varepsilon^2:1:1:\varepsilon] \\
[-1:1:\varepsilon:1:\varepsilon^2] , & [-1:\varepsilon:1:\varepsilon^2:1] , & [-1:1:\varepsilon^2:1:\varepsilon] , & [-1:\varepsilon^2:1:\varepsilon:1] \\
[-1:\varepsilon:1:1:\varepsilon^2] , & [-1:1:1:\varepsilon^2:\varepsilon] , & [-1:1:\varepsilon^2:\varepsilon:1] , & [-1:\varepsilon^2:\varepsilon:1:1] .
\end{array}
$$

**) Le imagini del punto $\mathbf{Q}_l^{(h)}$ sono

$$
\begin{array}{ccc}
& [-1:1:1:1:-2] , & \\
[-1:1:\varepsilon:\varepsilon:-2\varepsilon] , & [-1:\varepsilon:1:\varepsilon:-2\varepsilon] , & [-1:\varepsilon:\varepsilon:1:-2\varepsilon] , \\
[-1:1:\varepsilon^2:\varepsilon^2:-2\varepsilon^2] , & [-1:\varepsilon^2:1:\varepsilon^2:-2\varepsilon^2] , & [-1:\varepsilon^2:\varepsilon^2:1:-2\varepsilon^2] .
\end{array}
$$

***) Le imagini di questi punti $\mathbf{E}_l^{\prime(h)}$ ed $\mathbf{E}_l^{\prime\prime(h)}$ sono rispettivamente

$$
\left|\begin{array}{l}
[-1:\varepsilon^2:\varepsilon:\varepsilon:2-\varepsilon] , \\
[-1:\varepsilon:\varepsilon^2:\varepsilon:2-\varepsilon] , \\
[-1:\varepsilon:\varepsilon:\varepsilon^2:2-\varepsilon] ,
\end{array}\right. \quad \text{e} \quad
\left|\begin{array}{l}
[-1:\varepsilon:\varepsilon^2:\varepsilon^2:2-\varepsilon^2] , \\
[-1:\varepsilon^2:\varepsilon:\varepsilon^2:2-\varepsilon^2] , \\
[-1:\varepsilon^2:\varepsilon^2:\varepsilon:2-\varepsilon^2] .
\end{array}\right.
$$

****) Le imagini di questi due punti sono ordinatamente

$$[-\varepsilon:1:1:1:\varepsilon-3] \quad \text{e} \quad [-\varepsilon^2:1:1:1:\varepsilon^2-3] .$$

34. — Dalla simmetria delle coordinate del punto dodecuplo $\mathbf{P}^{(h)}$ rispetto agli indici i, j, k, l appare manifesto che per esso passano ancora le cubiche quintuple

$$Z_{il}^{(h)}\ ,\ Z_{jl}^{(h)}\ ,\ Z_{kl}^{(h)}$$

e le cubiche doppie

$$L_{il}^{(h)}\ ,\ L_{jl}^{(h)}\ ,\ L_{kl}^{(h)}\ ,$$

oltre le rette $\mathbf{r}_i^{(h)}, \mathbf{r}_j^{(h)}, \mathbf{r}_k^{(h)}$. Ciò è in armonia con quanto segue.

I quattro spazi $\Omega_{hi}, \Omega_{hj}, \Omega_{hk}, \Omega_{hl}$, legati fra loro e legati al punto $\mathbf{P}^{(h)}$ dall'indice h, passano tutti per il punto $\mathbf{P}^{(h)}$, dal quale proiettano i quattro piani principali $\mathbf{U}_2^{(hi)}$, $\mathbf{U}_2^{(hj)}$ $\mathbf{U}_2^{(hk)}$, $\mathbf{U}_2^{(hl)}$ appartenenti allo spazio principale $\mathbf{U}_3^{(h)}$. I sei piani secondo cui si intersecano a due a due quegli spazi Ω sono

$$\Delta_{jk}^{(h)}\ ,\ \Delta_{ki}^{(h)}\ ,\ \Delta_{ij}^{(h)}\ ,\ \Delta_{il}^{(h)}\ ,\ \Delta_{jl}^{(h)}\ ,\ \Delta_{kl}^{(h)}\ ,$$

i quali proiettano dal punto $\mathbf{P}^{(h)}$ le sei rette principali che sono nello spazio principale $\mathbf{U}_3^{(h)}$ menzionato, e che convergono a tre a tre nei vertici $\mathbf{U}_0$ appartenenti allo stesso spazio principale. Ne consegue che quei quattro spazi Ω passano a tre a tre per le rette proiettanti dal punto $\mathbf{P}^{(h)}$ i quattro punti principali $\mathbf{U}_0^{(i)}$, $\mathbf{U}_0^{(j)}$, $\mathbf{U}_0^{(k)}$, $\mathbf{U}_0^{(l)}$. Tali adunque sono le rette $\mathbf{r}_i^{(h)}, \mathbf{r}_j^{(h)}, \mathbf{r}_k^{(h)}, \mathbf{r}_l^{(h)}$.

In conclusione: *ogni punto dodecuplo* $\mathbf{P}^{(h)}$ *di* Ξ *è doppio per le sei cubiche quintuple della varietà legate ad esso, le quali passano semplicemente a tre a tre per certi quattro punti* $\mathbf{Q}_i^{(h)}, \mathbf{Q}_j^{(h)}, \mathbf{Q}_k^{(h)}, \mathbf{Q}_l^{(h)}$, *settupli per la varietà e giacenti uno ad uno sopra i quattro raggi che dal punto* $\mathbf{P}^{(h)}$ *proiettano i quattro punti principali appartenenti allo spazio principale legato a* $\mathbf{P}^{(h)}$ *dall'indice* h. *Su ogni cubica quintupla* $Z_{ij}^{(h)}$ *sono due punti settupli* $\mathbf{Q}_k^{(h)}$ *e* $\mathbf{Q}_l^{(h)}$.

35. — Se poniam mente alle (32) (n.° 24) esprimenti la forma delle coordinate correnti lungo una retta sestupla della varietà Ξ, vediamo che per il punto dodecuplo $\mathbf{P}^{(h)}$ passano le rette sestuple $S_{hi}, S_{hj}, S_{hk}, S_{hl}$ legate a quel punto dall'indice h.

In seguito a questa osservazione possiamo dire che, *se si fissa un determinato indice* h, *i coni tripli legati fra loro da tale indice, cioè proiettanti le quattro cubiche principali giacenti nello spazio principale* $\mathbf{U}_3^{(h)}$, *hanno le generatrici doppie concorrenti in un medesimo punto* $\mathbf{P}^{(h)}$ *dodecuplo per la varietà* Ξ.

I punti dodecupli della varietà Ξ *sono in numero di cinque e gli spigoli del loro pentagono completo sono le dieci rette sestuple della varietà.*

36. — Tracce sulla retta comune ai tre spazi $\Omega_{ij}, \Omega_{jh}, \Omega_{hi}$. — Questi spazi fra loro associati in terna passano tutti e tre per la retta principale $\mathbf{U}_1^{(kl)}$ la quale incontra la varietà Ξ in 27 punti raccolti nel punto $\mathbf{K}_{kl}$ (num. 5).

37. — Tracce sulla retta $\Omega_{hi}\ \Omega_{ij}\ \Omega_{jh}$. — Questi tre spazi fra loro in catena si tagliano scambievolmente nella retta $\mathbf{r}_l^{(2)}$ lungo la quale le coordinate correnti sono

$$(50)\qquad A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = -\mu_1 : \mu_1 : -\mu_1 : \mu_1 : \mu_2\ ,$$

e per la quale passano i tre piani

$$\begin{array}{llll}
\Delta^{(i)}_{hj} & \text{pel quale} & A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = & -\mu_1 : \mu_1 : -\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 \,, \\
\Delta^{(h)}_{ik} & \text{»} & \text{»} \qquad\qquad = & \mu_2 : \mu_1 : -\mu_1 : \mu_1 : \mu_3 \,, \\
\Delta^{(3)}_{l} & \text{»} & \text{»} \qquad\qquad = & -\mu_1 : \mu_1 : -\mu_2 : \mu_2 : \mu_3 \,.
\end{array}$$

Le tracce della varietà Ξ sulla retta $\mathbf{r}_l^{(2)}$ sono i seguenti punti:

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{llll}
J_l^{(2)} & \text{di coordinate} & A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = & 1 : -1 : 1 : -1 : 0 \,, \\
B_l^{\prime(2)} & \text{»} & \text{»} \qquad\qquad = & 1 : -1 : 1 : -1 : (\varepsilon - 1)^3 \,, \\
B_l^{\prime\prime(2)} & \text{»} & \text{»} \qquad\qquad = & 1 : -1 : 1 : -1 : (\varepsilon^2 - 1)^3 \,, \\
C_l^{\prime(2)} & \text{»} & \text{»} \qquad\qquad = & 1 : -1 : 1 : -1 : -27 \,, \\
C_l^{\prime\prime(2)} & \text{»} & \text{»} \qquad\qquad = & 1 : -1 : 1 : -1 : 27 \,, \\
D_l^{\prime(2)} & \text{»} & \text{»} \qquad\qquad = & 1 : -1 : 1 : -1 : 8(\varepsilon - 1)^3 \,, \\
D_l^{\prime\prime(2)} & \text{»} & \text{»} \qquad\qquad = & 1 : -1 : 1 : -1 : 8(\varepsilon^2 - 1)^3 \,.
\end{array}\right.$$

Il punto $\mathbf{J}_l^{(2)}$ *è quintuplo per la varietà* Ξ *); esso è uno dei punti quintupli della superficie principale Φ, di contatto dello spazio $\mathbf{U}_3^{(h)}$, cioè uno dei vertici del triangolo delle rette triple di tale superficie **), ed è l'unico punto comune ai tre coni tripli $\mathbf{W}_{hi}$, $\mathbf{W}_{ij}$, $\mathbf{W}_{jk}$ segati su Ξ dei tre spazi considerati.

Ciascuno dei due punti $\mathbf{B}_l^{\prime(2)}, \mathbf{B}_l^{\prime\prime(2)}$ *è ottuplo per* Ξ ***); *mentre i due punti* $\mathbf{C}_l^{\prime(2)}$ *e* $\mathbf{C}_l^{\prime\prime(2)}$ *sono doppi* ****), *ed i punti* $\mathbf{D}_l^{\prime(2)}, \mathbf{D}_l^{\prime\prime(2)}$ *sono semplici* *****) *per la stessa varietà.*

*) Le imagini di questo punto sono:

$$[1 : -1 : 1 : -1 : 0] \,, \quad \begin{array}{l} [1 : -1 : \varepsilon : -\varepsilon : 0] \,, \quad [1 : -1 : \varepsilon^2 : -\varepsilon^2 : 0] \,, \\ [1 : -\varepsilon : \varepsilon : -1 : 0] \,, \quad [1 : -\varepsilon^2 : \varepsilon^2 : -1 : 0] \,. \end{array}$$

**) I coni tripli fra loro estranei $\mathbf{W}_{hi}, \mathbf{W}_{jk}$ (n.° 22) hanno in comune la generatrice $\mathbf{K}_{hi}\mathbf{K}_{jk} \equiv \mathcal{R}_l^{(3)}$ lungo la quale essi hanno un contatto trirette collo spazio principale $\mathbf{U}_3^{(l)}$. Il cono triplo $\mathbf{W}_{ij}$ ha un simile contatto collo spazio $\mathbf{U}_3^{(l)}$ lungo la retta $\mathbf{K}_{ij}\mathbf{K}_{hk} \equiv \mathcal{R}_l^{(1)}$. Tali due rette, triple per la superficie Φ_l si incontrano in un punto, che è precisamente il punto $\mathbf{J}_l^{(2)}$.

***) Le imagini di $\mathbf{B}_l^{\prime(2)}$ e $\mathbf{B}_l^{\prime\prime(2)}$ sono ordinatamente

$$[1 : -1 : 1 : -\varepsilon : (\varepsilon - 1)] \,, \; [1 : -1 : \varepsilon : -\varepsilon^2 : \varepsilon(\varepsilon - 1)] \,, \; [1 : -1 : \varepsilon^2 : -1 : \varepsilon^2(\varepsilon - 1)] \,,$$
$$[1 : -\varepsilon : 1 : -1 : (\varepsilon - 1)] \,, \; [1 : -\varepsilon : \varepsilon : -\varepsilon : (\varepsilon - 1)] \,, \; [1 : -\varepsilon : \varepsilon^2 : -\varepsilon^2 : (\varepsilon - 1)] \,,$$
$$[1 : -\varepsilon^2 : \varepsilon : -1 : \varepsilon(\varepsilon - 1)] \,, \; [1 : -\varepsilon^2 : \varepsilon^2 : \varepsilon : (\varepsilon - 1)] \,;$$
$$[1 : -1 : 1 : -\varepsilon^2 : (\varepsilon^2 - 1)] \,, \; [1 : -1 : \varepsilon^2 : -\varepsilon : \varepsilon^2(\varepsilon^2 - 1)] \,, \; [1 : -1 : \varepsilon : -1 : \varepsilon(\varepsilon^2 - 1)] \,,$$
$$[1 : -\varepsilon^2 : 1 : 1 : -1 : (\varepsilon^2 - 1)] \,, \; [1 : -\varepsilon^2 : \varepsilon^2 : -\varepsilon^2 : (\varepsilon^2 - 1)] \,, \; [1 : -\varepsilon^2 : \varepsilon : -\varepsilon : (\varepsilon^2 - 1)] \,,$$
$$[1 : -\varepsilon : \varepsilon^2 : -1 : \varepsilon^2(\varepsilon^2 - 1)] \,, \; [1 : -\varepsilon : \varepsilon : -\varepsilon^2 : (\varepsilon^2 - 1)] \,.$$

****) E le loro imagini sono rispettivamente

$$[1 : -\varepsilon : 1 : -\varepsilon^2 : -3] \,, \; [1 : -\varepsilon^2 : 1 : -\varepsilon : -3] \;\; \text{ed} \;\; [1 : -\varepsilon : \varepsilon^2 : -\varepsilon : 3\varepsilon] \,, \; [1 : -\varepsilon^2 : \varepsilon : -\varepsilon^2 : 3\varepsilon] \,.$$

*****) E di imagini

$$[1 : -\varepsilon : 1 : -\varepsilon : 2(\varepsilon - 1)] \;\; \text{ed} \;\; [1 : -\varepsilon^2 : 1 : -\varepsilon^2 : 2(\varepsilon^2 - 1)] \,.$$

E si verifica che

$$5+8+8+2+2+1+1=27\ ,$$

ossia, che con quei sette punti, tenuto conto delle loro multiplicità, sono esaurite le intersezioni di $\mathbf{r}_l^{(2)}$ colla varietà.

38. — In quei medesimi punti saranno raccolte le intersezioni della retta $\mathbf{r}_l^{(2)}$ colle linee

$$\begin{array}{llllll} & \mathcal{Z}_{hj}^{(i)}\ ,\ \mathcal{L}_{hj}^{(i)}\ ,\ \mathcal{A}_{hj}^{\prime(i)}\ ,\ \mathcal{A}_{hj}^{\prime\prime(i)} & \text{situate nel piano } \Delta_{hj}^{(i)}\ ; \\ & \mathcal{Z}_{ik}^{(j)}\ ,\ \mathcal{L}_{ik}^{(j)}\ ,\ \mathcal{A}_{ik}^{\prime(j)}\ ,\ \mathcal{A}_{ik}^{\prime\prime(j)} & \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \Delta_{ik}^{(j)}\ ; \\ \mathcal{R}_l^{(3)}\ , & \left.\begin{array}{l}\mathcal{T}_{l,01}^{(3)}\ ,\ \mathcal{T}_{l,02}^{(3)}\ ,\ \mathcal{T}_{l,10}^{(3)}\ ,\ \mathcal{T}_{l,20}^{(3)} \\ \mathcal{B}_{l,11}^{(3)}\ ,\ \mathcal{B}_{l,12}^{(3)}\ ,\ \mathcal{B}_{l,21}^{(3)}\ ,\ \mathcal{B}_{l,22}^{(3)}\end{array}\right\} & \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \Delta_l^{(3)}\ . \end{array}$$

Ora, fatta eccezione dei punti $\mathbf{B}_l^{\prime(2)}$ e $\mathbf{B}_l^{\prime\prime(2)}$, che sono doppi ordinatamente per le cubiche $\mathcal{B}_{l,11}^{(3)}$ e $\mathcal{B}_{l,22}^{(3)}$, sono tutti semplici i punti

$$\begin{array}{lll} \mathbf{J}_l^{(2)} & \text{per} & \mathcal{Z}_{hj}^{(i)}\ ,\ \mathcal{Z}_{ik}^{(j)}\ ;\ \mathcal{B}_{l,12}^{(3)}\ ,\ \mathcal{B}_{l,21}^{(3)}\ ;\ \mathcal{R}_l^{(3)}\ ; \\ \mathbf{B}_l^{\prime(2)} & \text{»} & \mathcal{Z}_{hj}^{(i)}\ ,\ \mathcal{Z}_{ik}^{(j)}\ ;\ \mathcal{L}_{hj}^{(i)}\ ,\ \mathcal{L}_{ik}^{(j)}\ ;\ \mathcal{A}_{hj}^{\prime(i)}\ ,\ \mathcal{A}_{ik}^{\prime(j)}\ ;\ \mathcal{T}_{l,02}^{(3)}\ ,\ \mathcal{T}_{l,20}^{(3)}\ ; \\ \mathbf{B}_l^{\prime\prime(2)} & \text{»} & \mathcal{Z}_{hj}^{(i)}\ ,\ \mathcal{Z}_{ik}^{(j)}\ ;\ \mathcal{L}_{hj}^{(i)}\ ,\ \mathcal{L}_{ik}^{(j)}\ ;\ \mathcal{A}_{hj}^{\prime\prime(i)}\ ,\ \mathcal{A}_{ik}^{\prime\prime(j)}\ ;\ \mathcal{T}_{l,01}^{(3)}\ ,\ \mathcal{T}_{l,10}^{(3)}\ ; \\ \mathbf{C}_l^{\prime(2)} & \text{»} & \mathcal{L}_{hj}^{(i)}\ ;\ \mathcal{A}_{ik}^{\prime(j)}\ ,\ \mathcal{A}_{ik}^{\prime\prime(j)}\ ;\ \mathcal{B}_{l,12}^{(3)}\ ,\ \mathcal{B}_{l,21}^{(3)}\ ; \\ \mathbf{C}_l^{\prime\prime(2)} & \text{»} & \mathcal{L}_{ik}^{(j)}\ ;\ \mathcal{A}_{hj}^{\prime(i)}\ ,\ \mathcal{A}_{hj}^{\prime\prime(i)}\ ;\ \mathcal{B}_{l,12}^{(3)}\ ,\ \mathcal{B}_{l,21}^{(3)}\ ; \\ \mathbf{D}_l^{\prime(2)} & \text{»} & \mathcal{A}_{hj}^{\prime(i)}\ ,\ \mathcal{A}_{hj}^{\prime\prime(i)}\ ;\ \mathcal{B}_{l,22}^{(3)}\ ; \\ \mathbf{D}_l^{\prime\prime(2)} & \text{»} & \mathcal{A}_{ik}^{\prime(j)}\ ,\ \mathcal{A}_{ik}^{\prime\prime(j)}\ ;\ \mathcal{B}_{l,11}^{(3)}\ . \end{array}$$

39. — TRACCE DELLA RETTA $\Omega_{hi}\Omega_{hj}\Omega_{kl}$. — I tre spazi indicati si intersecano secondo la retta $\mathbf{r}_{kl}^{(h)}$, il cui punto corrente è di coordinate

$$\mathrm{A}_h^2 x_h : \ldots : \mathrm{A}_l^2 x_l = -\mu_1 : \mu_1 : \mu_1 : -\mu_2 : \mu_2\ , \tag{52}$$

e per la quale passano i tre piani

$$\begin{array}{lll} \Delta_i^{(1)} & \mathrm{A}_h^2 x_h : \ldots : \mathrm{A}_l^2 x_l & = -\mu_1 : \mu_2 : \mu_1 : -\mu_3 : \mu_3\ , \\ \Delta_j^{(3)} & \text{»} & = -\mu_1 : \mu_1 : \mu_2 : -\mu_3 : \mu_3\ , \\ \Delta_{ij}^{(h)} & \text{»} & = -\mu_1 : \mu_1 : \mu_1 : \quad \mu_2 : \mu_3\ . \end{array}$$

Ora, giacciono nel piano

$$\begin{array}{lll} \Delta_i^{(1)} & \text{le linee} & \mathcal{R}_i^{(1)}\ ;\ \mathcal{T}_{i,01}^{(1)}\ ,\ \mathcal{T}_{i,02}^{(1)}\ ,\ \mathcal{T}_{i,10}^{(1)}\ ,\ \mathcal{T}_{i,20}^{(1)}\ ;\ \mathcal{B}_{i,11}^{(1)}\ ,\ \mathcal{B}_{i,22}^{(1)}\ ,\ \mathcal{B}_{i,21}^{(1)}\ ,\ \mathcal{B}_{i,22}^{(1)}\ ; \\ \Delta_j^{(3)} & \text{»} & \mathcal{R}_j^{(3)}\ ,\ \mathcal{T}_{j,01}^{(3)}\ ,\ \mathcal{T}_{j,02}^{(3)}\ ,\ \mathcal{T}_{j,10}^{(3)}\ ,\ \mathcal{T}_{j,20}^{(3)}\ ;\ \mathcal{B}_{j,11}^{(3)}\ ,\ \mathcal{B}_{j,12}^{(3)}\ ,\ \mathcal{B}_{j,21}^{(3)}\ ,\ \mathcal{B}_{j,22}^{(3)}\ ; \\ \Delta_{ij}^{(h)} & \text{»} & \mathcal{Z}_{ij}^{(h)}\ ;\ \mathcal{L}_{ij}^{(h)}\ ;\ \mathcal{A}_{ij}^{\prime(h)}\ ,\ \mathcal{A}_{ij}^{\prime\prime(h)}\ . \end{array}$$

Tutte queste curve tagliano la retta $\mathbf{r}_{kl}^{(h)}$ nel seguente gruppo di nove punti:

$$
(53)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
\mathbf{K}_{kl} & A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = & 0 : 0 : 0 : 1 : -1 \,, \\
\mathbf{I}_{kl}^{\prime(h)} & \text{»} & = -(\varepsilon-1)^3 : (\varepsilon-1)^3 : (\varepsilon-1)^3 : 1 : -1 \,, \\
\mathbf{I}_{kl}^{\prime\prime(h)} & \text{»} & = -(\varepsilon^2-1)^3 : (\varepsilon^2-1)^3 : (\varepsilon^2-1)^3 : 1 : -1 \,, \\
\mathbf{G}_{kl}^{\prime(h)} & \text{»} & = -(\varepsilon-1)^3 : (\varepsilon-1)^3 : (\varepsilon-1)^3 : 8 : -8 \,, \\
\mathbf{G}_{kl}^{\prime\prime(h)} & \text{»} & = -(\varepsilon^2-1)^3 : (\varepsilon^2-1)^3 : (\varepsilon^2-1)^3 : 8 : -8 \,, \\
{}^{(11)}\mathbf{F}_{kl}^{(h)} & \text{»} & = -(\varepsilon-1)^3 : (\varepsilon-1)^3 : (\varepsilon-1)^3 : (\varepsilon-2)^3 : -(\varepsilon-2)^3 \,, \\
{}^{(12)}\mathbf{F}_{kl}^{(h)} & \text{»} & = -(\varepsilon-1)^8 : (\varepsilon-1)^3 : (\varepsilon-1)^3 : (\varepsilon^2-2)^3 : -(\varepsilon^2-2)^3 \,, \\
{}^{(21)}\mathbf{F}_{kl}^{(h)} & \text{»} & = -(\varepsilon^2-1)^3 : (\varepsilon^2-1)^3 : (\varepsilon^2-1)^3 : (\varepsilon-2)^3 : -(\varepsilon-2)^3 \,, \\
{}^{(22)}\mathbf{F}_{kl}^{(h)} & \text{»} & = -(\varepsilon^2-1)^3 : (\varepsilon^2-1)^3 : (\varepsilon^2-1)^3 : (\varepsilon^2-2)^3 : -(\varepsilon^2-2)^3 \,.
\end{array}
\right.
$$

I due punti $\mathbf{I}_{kl}^{\prime(h)}$ ed $\mathbf{I}_{kl}^{\prime\prime(h)}$ sono quintupli ciascuno per le varietà Ξ *); i due punti $\mathbf{G}_{kl}^{\prime(h)}$ e $\mathbf{G}_{kl}^{\prime\prime(h)}$ sono doppi **); e sono semplici i quattro punti $\mathbf{F}_{kl}^{(h)}$ ***).

Cosicchè nel punto $\mathbf{K}_{kl}$ sono raccolte

$$27-5-5-2-2-1-1-1-1=9$$

intersezioni della retta $\mathbf{r}_{kl}^{(h)}$ colla varietà Ξ ****).

---

*) Le imagini di questi due punti sono ordinatamente:

$$[-(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):1:-\varepsilon] \,,\ [-\varepsilon(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):1:-\varepsilon] \,,$$
$$[-\varepsilon(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):1:-\varepsilon] \,,\ [-\varepsilon^2(\varepsilon-1):\varepsilon^2(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):1:-\varepsilon] \,,$$
$$[-\varepsilon^2(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):\varepsilon^2(\varepsilon-1):1:-\varepsilon] \,;$$
$$[-(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):-\varepsilon:1] \,,\ [-\varepsilon(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):-\varepsilon:1] \,,$$
$$[-\varepsilon(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-1):-\varepsilon:1] \,,\ [-\varepsilon^2(\varepsilon-1):\varepsilon^2(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):-\varepsilon:1] \,,$$
$$[-\varepsilon^2(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):\varepsilon^2(\varepsilon-1):-\varepsilon:1] \,.$$

Cfr. nota al num. 39 (dove, correggendo le bozze, è sfuggita l'assenza dell'indice superiore della varietà W_{hl}, il quale doveva essere $^{(1)}$) — I punti quintupli di $W_{kl}^{(1)}$ sono $\mathbf{I}_{kl}^{\prime(h)}, \mathbf{I}_{kl}^{\prime(i)}, \mathbf{I}_{kl}^{\prime(j)}$ e quelli di $W_{kl}^{(2)}$ sono $\mathbf{I}_{kl}^{\prime\prime(h)}, \mathbf{I}_{kl}^{\prime\prime(i)}, \mathbf{I}_{kl}^{\prime\prime(j)}$.

**) Rispettivamente di imagini

$$[-(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-1):\varepsilon^2(\varepsilon-1):2\varepsilon:-2] \,,\ [-(\varepsilon-1):\varepsilon^2(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-1):2\varepsilon:-2] \,;$$
$$[-(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-1):\varepsilon^2(\varepsilon-1):-2:2\varepsilon] \,,\ [-(\varepsilon-1):\varepsilon^2(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-1):-2:2\varepsilon] \,.$$

***) Le cui imagini sono ordinatamente

$$[-\varepsilon(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-2):-(\varepsilon-2)] \,;\ [-\varepsilon^2(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon^2-2):-(\varepsilon^2-2)] \,;$$
$$[-\varepsilon(\varepsilon^2-1):(\varepsilon^2-1):(\varepsilon^2-1):(\varepsilon^2(\varepsilon-2):-(\varepsilon-2)] \,;\ [-\varepsilon^2(\varepsilon^2-1):(\varepsilon^2-1):(\varepsilon^2-1):\varepsilon^2(\varepsilon^2-2):-(\varepsilon^2-2)] .$$

****) Che il punto $\mathbf{K}_{kl}$ sia almeno sestuplo per Ξ risulta dal fatto che per esso passa la retta sestupla S_{kl}. Ora appare che esso *può* esser nonuplo, e ciò sarebbe in accordo col fatto che la retta dei tre punti.

Passano poi semplicemente per

$\mathbf{K}_{kl}$ le linee $Z_{ij}^{(h)}$; $L_{ij}^{(h)}$; $\mathcal{A}_{ij}^{\prime(h)}$, $\mathcal{A}_{ij}^{\prime\prime(h)}$; $\mathcal{R}_{i}^{(1)}$, $\mathcal{R}_{j}^{(3)}$; $\mathcal{T}_{i,01}^{(1)}$, $\mathcal{T}_{i,02}^{(1)}$;

$\mathbf{I}_{kl}^{\prime(h)}$ » $Z_{ij}^{(h)}$; $\mathcal{T}_{i,10}^{(1)}$, $\mathcal{T}_{j,10}^{(3)}$; $\mathcal{B}_{i,11}^{(1)}$, $\mathcal{B}_{i,12}^{(1)}$, $\mathcal{B}_{j,11}^{(3)}$, $\mathcal{B}_{j,12}^{(3)}$;

$\mathbf{I}_{kl}^{\prime\prime(h)}$ » $Z_{ij}^{(h)}$; $\mathcal{T}_{i,20}^{(1)}$, $\mathcal{T}_{j,20}^{(3)}$; $\mathcal{B}_{i,21}^{(1)}$, $\mathcal{B}_{i,22}^{(1)}$, $\mathcal{B}_{j,21}^{(3)}$, $\mathcal{B}_{j,22}^{(3)}$;

$\mathbf{G}_{kl}^{\prime(h)}$ » $L_{ij}^{(h)}$; $\mathcal{B}_{i,11}^{(1)}$, $\mathcal{B}_{i,12}^{(1)}$, $\mathcal{B}_{j,11}^{(3)}$, $\mathcal{B}_{j,12}^{(3)}$;

$\mathbf{G}_{kl}^{\prime\prime(h)}$ » $L_{ij}^{(h)}$; $\mathcal{B}_{i,21}^{(1)}$, $\mathcal{B}_{i,22}^{(1)}$, $\mathcal{B}_{j,21}^{(3)}$, $\mathcal{B}_{j,22}^{(3)}$;

${}^{(11)}\mathbf{F}_{kl}^{(h)}$ » $\mathcal{A}_{ij}^{\prime(h)}$; $\mathcal{B}_{i,12}^{(1)}$, $\mathcal{B}_{j,11}^{(3)}$;

${}^{(12)}\mathbf{F}_{kl}^{(h)}$ » $\mathcal{A}_{ij}^{\prime\prime(h)}$; $\mathcal{B}_{i,11}^{(1)}$, $\mathcal{B}_{j,12}^{(3)}$;

${}^{(21)}\mathbf{F}_{kl}^{(h)}$ » $\mathcal{A}_{ij}^{\prime(h)}$; $\mathcal{B}_{i,21}^{(1)}$, $\mathcal{B}_{j,22}^{(3)}$;

${}^{(22)}\mathbf{F}_{kl}^{(h)}$ » $\mathcal{A}_{ij}^{\prime\prime(h)}$; $\mathcal{B}_{i,22}^{(1)}$, $\mathcal{B}_{j,21}^{(3)}$.

40.—TRACCE DELLA RETTA $\Omega_{hi}\Omega_{hj}\Theta_{hk}$.— Codesti tre spazi si intersecano secondo la retta $\mathbf{r}_l^{(1)}$ di coordinate correnti

$$A_h{}^2 x_h : \ldots : A_l{}^2 x_l = -\mu_1 : \mu_1 : \mu_1 : -\mu_1 : \mu_2 \ ,$$

la quale incontra la varietà Ξ nei sette punti $\mathbf{J}_l^{(1)}, \mathbf{B}_l^{\prime(1)}, \mathbf{B}_l^{\prime\prime(1)}, \mathbf{C}_l^{\prime(1)}, \mathbf{C}_l^{\prime\prime(1)}, \mathbf{D}_l^{\prime(1)}, \mathbf{D}_l^{\prime\prime(1)}$, perchè siamo in caso simile a quello già considerato nel n.° 37 *).

41.—I tre spazi $\Omega_{hi}, \Omega_{hj}, \Theta_{ij}$, passano tutti per il piano $\Delta_{ij}^{(h)}$, di cui già conosciamo le intersezioni colla varietà Ξ (n.° 17).

42.—TRACCE DELLA RETTA $\Omega_{hi}\Omega_{ij}\Theta_{jk}$ comune a due spazi Ω associati e ad un piano Θ in catena con essi.—Se ricordiamo il caso della terna di spazi Ω legati (n.° 33), come sarebbero $\Omega_{ih}, \Omega_{ij}, \Omega_{ik}$, si scorge che al sistema lineare ∞^2: $\lambda_1\Omega_{ih} + \lambda_2\Omega_{ij} + \lambda_3\Omega_{ik} = 0$ appartiene $(\lambda_1 = 0, \lambda_3 = -\lambda_2)$ lo spazio Θ_{jk}. Epperò la retta intersezione dei tre spazi considerati nel presente caso non è altro che la $\mathbf{r}_l^{(i)}$; quindi le sue intersezioni colla varietà Ξ non sono altro che i punti $\mathbf{P}^{(i)}$ (*dodecuplo*), $\mathbf{Q}_l^{(i)}$ (*settuplo*), $\mathbf{E}_l^{\prime(i)}$ ed $\mathbf{E}_l^{\prime\prime(i)}$ (*tripli*), $\mathbf{A}_l^{\prime(i)}$ ed $\mathbf{A}_l^{\prime\prime(i)}$ (*semplici*).

43.—TRACCE DELLA RETTA $\Omega_{hi}\Theta_{ij}\Omega_{jk}$.— I due spazi Ω qui considerati sono estranei fra loro e messi in catena da uno spazio Θ. Anche questo caso cade sotto due già considerati (n.i 37 e 40). Infatti, osserviamo che al sistema lineare ∞^2 di spazi:

---

p. es., $\mathbf{K}_{kl}, \mathbf{K}_{lj}, \mathbf{K}_{jk}$ non incontra altrimenti le varietà Ξ. Ma lo è davvero? Nella teoria generale delle varietà *Ipersteineriane* (di prossima pubblicazione) troveremo la risposta affermativa a questa domanda.

*) Infatti i tre spazi in catena Ω_{ih}, Ω_{hj}, Ω_{jk} sono nelle condizioni del numero 37; ma avendosi identicamente

$$\rho_1\Omega_{ih} + (\rho_2 + \rho_3)\Omega_{hj} - \rho_3\Omega_{jk} = \rho_1\Omega_{ih} + \rho_2\Omega_{hj} + \rho_3\Theta_{hk} \ ,$$

si vede che la retta loro comune è pure quella del caso attuale.

$\lambda_1\Omega_{hi}+\lambda_2\Theta_{ij}+\lambda_3\Omega_{jk}=0$ appartiene $(\lambda_1+\lambda_2=0,\lambda_3=0)$ lo spazio Ω_{hj} ed appartiene pure $(\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3)$ lo spazio Ω_{ik}, cosicchè possiamo anche riguardare tale sistema come dato dai tre spazi $\Omega_{jh},\Omega_{hi},\Omega_{ik}$, simile a quello del n.° 37; oppure come dato dei tre spazi Ω_{ih}, Ω_{ik}, Θ_{ij}, simile a quello del n.° **40.** Nel caso attuale la retta base è la $\mathbf{r}_l^{(1)}$ (n.° 40).

44.—Tracce della retta $\Omega_{hi}\Omega_{hj}\Theta_{kl}$. — Codesta retta, che designeremo col simbolo $\mathbf{r}_h^{(kl)}$, ha le coordinate correnti

$$A_h^2x_h:\ldots:A_l^2x_l=-\mu_1:\mu_1:\mu_1:\mu_2:\mu_2\ ,$$

e per essa passano i piani

$$\Omega_{hi}\Omega_{hj}\equiv\Delta_{ij}^{(h)}\quad,\quad\Omega_{hj}\Theta_{kl}\equiv\triangleleft_i^{(kl)}\quad,\quad\Omega_{hi}\Theta_{kl}\equiv\triangleleft_j^{(kl)}\ ,$$

i quali contengono ordinatamente le curve seguenti della varietà Ξ:

$$\begin{array}{llllll} Z_{ij}^{(h)}\ , & L_{ij}^{(h)}\ , & \mathcal{A}_{ij}^{\prime(h)}\ , & \mathcal{A}_{ij}^{\prime\prime(h)}\ ; & & \\ S_{hj}\ , & Q_i^{(kl)}\ , & \mathcal{N}_i^{\prime(kl)}, & \mathcal{N}_i^{\prime\prime(kl)}, & E_i^{\prime(kl)}\ , & E_i^{\prime\prime(kl)}\ , \\ S_{hi}\ , & Q_j^{(kl)}\ , & \mathcal{N}_j^{\prime(kl)}, & \mathcal{N}_j^{\prime\prime(kl)}, & E_j^{\prime(kl)}\ , & E_j^{\prime\prime(kl)}\ . \end{array}$$

Ora queste curve sono complessivamente incontrate, epperò la è la varietà Ξ, dalla retta $\mathbf{r}_h^{(kl)}$ nei seguenti punti:

$$\mathbf{P}^{(h)}\ \text{di coordinate}\ A_h^2x_h:\ldots:A_l^2x_l=-1:1:1:\ \ 1\ :\ \ 1\ ,$$

$$(54)\quad\left\{\begin{array}{llll} \mathbf{H}_h^{(kl)} & » & » & =-8:8:8:\ \ -1\ :\ -1\text{*)}, \\ \mathbf{L}_h^{(kl)} & » & » & =-1:1:1:\ \ -8\ :\ -8\ , \\ \mathbf{N}_h^{\prime(kl)} & » & » & =-1:1:1:-(\varepsilon-2)^3:-(\varepsilon-2)^3\ , \\ \mathbf{N}_h^{\prime\prime(kl)} & » & » & =-1:1:1:-(\varepsilon^2-2)^3:-(\varepsilon^2-2)^3\ , \\ \mathbf{M}_h^{\prime(kl)} & » & » & =-8:8:8:\ \ (\varepsilon-2)^3:\ \ (\varepsilon-2)^3\ , \\ \mathbf{M}_h^{\prime\prime(kl)} & » & » & =-8:8:8:\ \ (\varepsilon^2-2)^3:\ \ (\varepsilon^2-2)^3\ . \end{array}\right.$$

Il punto $\mathbf{P}^{(h)}$, sappiamo già, è dodecuplo per la varietà Ξ (v. n.° 33). *Il punto $\mathbf{H}_h^{(kl)}$ è quintuplo per Ξ* **), *ed il punto $\mathbf{L}_h^{(kl)}$ è quadruplo* ***).

---

*) Cfr. la prima nota al numero 31. Come si vede, il punto $\mathbf{H}_h^{(kl)}$ è uno dei punti quintupli della superficie V_{kl}: gli altri due sono $\mathbf{H}_i^{(kl)}$ ed $\mathbf{H}_j^{(kl)}$.

**) Le sue imagini sono:

$$[-2:2:2:-1:-1]\ ,\ [-2\varepsilon:2\varepsilon:2:-1:-1]\ ,$$
$$[-2\varepsilon:2:2\varepsilon:-1:-1]\ ,\ [-2\varepsilon^2:2\varepsilon^2:2:-1:-1]\ ,\ [-2\varepsilon^2:2:2\varepsilon^2:-1:-1]\ .$$

***) E di imagini:

$$[-1:\varepsilon:\varepsilon^2:-2\varepsilon:-2\varepsilon^2]\ ,\ [-1:\varepsilon:\varepsilon^2:-2\varepsilon^2:-2\varepsilon]\ ,$$
$$[-1:\varepsilon^2:\varepsilon:-2\varepsilon:-2\varepsilon^2]\ ,\ [-1:\varepsilon^2:\varepsilon:-2\varepsilon^2:-2\varepsilon]\ .$$

Sono doppi per la varietà Ξ i punti $\mathbf{N}_h'^{(kl)}$ *ed* $\mathbf{N}_h''^{(kl)}$ *), *e sono semplici* $\mathbf{M}_h'^{(kl)}, \mathbf{M}_h''^{(kl)}$ **).

E per tal modo sono computate tutte le intersezioni dalla retta $\mathbf{r}_h^{(kl)}$ colla varietà Ξ, perchè infatti si ha

$$12+5+4+2+2+1+1=27 .$$

Si verifica poi facilmente che, mentre

$$\begin{array}{llll} \mathbf{P}^{(h)} & \text{è doppio} & \text{per} & \mathcal{Z}_{ij}^{(h)} , \\ \mathbf{L}_h^{(kl)} & » & » & \mathcal{L}_{ij}^{(h)} , \\ \mathbf{N}_h'^{(kl)} & » & » & \mathcal{A}_{ij}'^{(h)} , \\ \mathbf{N}_h''^{(kl)} & » & » & \mathcal{A}_{ij}''^{(h)} , \end{array}$$

sono tutti semplici i punti:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}^{(h)} & \text{per} & S_{hi}, S_{hj} ; \mathcal{L}_{ij}^{(h)} ; \mathcal{N}_i'^{(kl)}, \mathcal{N}_i''^{(kl)} ; \mathcal{N}_j'^{(kl)}, \mathcal{N}_j''^{(kl)} ; E_i'^{(kl)}, E_i''^{(kl)} ; E_j'^{(kl)}, E_j''^{(kl)} ; \\ \mathbf{H}_h^{(kl)} & » & \mathcal{Z}_{ij}^{(h)} ; \mathcal{Q}_i^{(kl)}, \mathcal{Q}_j^{(kl)} ; E_i'^{(kl)}, E_i''^{(kl)} ; E_j'^{(kl)}, E_j''^{(kl)} ; \\ \mathbf{L}_h^{(kl)} & » & \mathcal{N}_i'^{(kl)}, \mathcal{N}_i''^{(kl)} ; \mathcal{N}_j'^{(kl)}, \mathcal{N}_j''^{(kl)} ; \\ \mathbf{M}_h'^{(kl)} & » & E_i'^{(kl)}, E_j'^{(kl)} ; \mathcal{A}_{ij}'^{(h)} ; \\ \mathbf{M}_h''^{(kl)} & » & E_i''^{(kl)}, E_j''^{(kl)} ; \mathcal{A}_{ij}''^{(h)} ; \\ \mathbf{N}_h'^{(kl)} & » & \mathcal{N}_i'^{(kl)}, \mathcal{N}_j'^{(kl)} ; \\ \mathbf{N}_h''^{(kl)} & » & \mathcal{N}_i''^{(kl)}, \mathcal{N}_j''^{(kl)} . \end{array}$$

45. — Tracce della retta $\Omega_{hi}\Theta_{hj}\Omega_{kl}$. — Le coordinate correnti di questa retta sono fornite dalle

$$A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = \mu_1 : -\mu_1 : \mu_1 : -\mu_2 : \mu_2 .$$

Si tratta adunque della retta $\mathbf{r}_{kl}^{(i)}$, analoga a quella del num. 39. Ciò del resto è ben naturale, perchè il sistema lineare ∞^2 di spazi $\lambda_1\Omega_{hi}+\lambda_2\Theta_{hj}+\lambda_3\Omega_{kl}$ (per $\lambda_3=0$ e $\lambda_1+\lambda_2=0$) contiene lo spazio Ω_{ij}, epperò è pure il sistema $\lambda'_1\Omega_{hi}+\lambda'_2\Omega_{ij}+\lambda'_3\Omega_{kl}$ consimile a quello dei tre spazi del n.° 39. Le intersezioni di questa retta colla varietà Ξ sono quindi i punti $\mathbf{K}_{kl}, \mathbf{I}_{kl}'^{(i)}, \mathbf{I}_{kl}''^{(i)}, \mathbf{G}_{kl}'^{(i)}, \mathbf{G}_{kl}''^{(i)}, {}^{(11)}\mathbf{F}_{kl}^{(i)}, \ldots, {}^{(22)}\mathbf{F}_{kl}^{(i)}$.

46. — Tracce della retta $\Theta_{hi}\Theta_{hi}, \Omega_{hk}$. — La retta comune a questi spazi è pure la

*) Le loro imagini sono ordinatamente:

$$[-\varepsilon:1:1:-\varepsilon(\varepsilon-2):-\varepsilon^2(\varepsilon-2)] \quad , \quad [-\varepsilon:1:1:-\varepsilon^2(\varepsilon-2):-\varepsilon(\varepsilon-2)] ;$$
$$[-\varepsilon^2:1:1:-\varepsilon(\varepsilon^2-2):-\varepsilon^2(\varepsilon^2-2)] \quad , \quad [-\varepsilon^2:1:1:-\varepsilon^2(\varepsilon^2-2):-\varepsilon(\varepsilon^2-2)] .$$

**) E rispettivamente di imagini:

$$[-2\varepsilon:2:2:(\varepsilon-2):(\varepsilon-2)] \quad \text{e} \quad [-2\varepsilon^2:2:2:(\varepsilon^2-2):(\varepsilon^2-2)] .$$

retta comune ai tre spazi $\Omega_{ki}, \Omega_{kj}, \Omega_{kh}$, perchè il sistema $\lambda_1\Theta_{hi} + \lambda_2\Theta_{hj} + \lambda_3\Omega_{hk}$ è pure il sistema $\mu_1\Omega_{ki} + \mu_2\Omega_{kj} + \mu_3\Omega_{kh}$. Infatti si ha identicamente

$$\mu_1\Omega_{ki} + \mu_2\Omega_{kj} + \mu_3\Omega_{kh} = -\mu_1\Theta_{hi} - \mu_2\Theta_{hj} + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\Omega_{hk} .$$

Essa è dunque (n.° 33) la retta $\mathbf{r}_l^{(k)}$ le cui intersezioni con Ξ son note.

47. — Tracce della retta $\Theta_{hi}\Theta_{ij}\Omega_{hj}$. — Tale retta è la principale $\mathbf{U}_1^{(kl)}$.

48. — Tracce della retta $\Theta_{hi}\Theta_{ij}\Omega_{jk}$. — Siccome si hanno identicamente:

$$\begin{aligned}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\Theta_{hi} &+ (\lambda_2 \mp \lambda_3)\Theta_{ij} + \lambda_3\Omega_{jk} \\ &= \lambda_1\Theta_{hi} + \lambda_2(\Theta_{hi} + \Theta_{ij}) + \lambda_3(\Theta_{hi} + \Theta_{ij} + \Omega_{jk}) \\ &= \lambda_1\Theta_{hi} + \lambda_2\Theta_{hj} + \lambda_3\Omega_{hk} ,\end{aligned}$$

così si vede che la retta di questo caso è ancora la $\mathbf{r}_l^{(h)}$ (v. num.ⁱ 33 e 46) le cui intersezioni con Ξ sono conosciute.

49. — Tracce della retta $\Theta_{hi}\Omega_{ij}\Theta_{jk}$. — Anche qui, avendosi

$$\begin{aligned}\lambda_1\Theta_{hi} &+ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\Omega_{ij} - \lambda_3\Theta_{jk} \\ &= \lambda_1(\Theta_{hi} + \Omega_{ij}) + \lambda_2\Omega_{ij} + \lambda_3(\Omega_{ij} - \Theta_{jk}) \\ &= \lambda_1\Omega_{hj} + \lambda_2\Omega_{ji} + \lambda_3\Omega_{ik} ,\end{aligned}$$

si scorge che la retta d'intersezione dei tre spazi proposti non è altro che la retta $\mathbf{r}_l^{(3)}$ simile a quella incontrata al num. 37.

50. — Tracce della retta $\Theta_{hi}\Theta_{hj}\Omega_{kl}$. — Questi tre spazi, di cui due sono associati fra loro e della specie Θ e l'altro è l'Ω ad entrambi estraneo, si tagliano complessivamente nella retta S_{kl}, e a due a due si tagliano nei piani

$$\nabla_{kl} \equiv \Theta_{hi}\Theta_{hj} \quad , \quad \triangleleft_j^{(hi)} \equiv \Theta_{hi}\Omega_{kl} \quad , \quad \triangleleft_i^{(hj)} \equiv \Theta_{hj}\Omega_{kl} ,$$

nei quali sono, rispettivamente, le linee di loro intersezione colla varietà Ξ:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}'_{kl} & , & \mathcal{O}''_{kl} & ; & C_{kl} & ; & S_{kl} & ; \\ \mathcal{N}_i^{\prime(hj)} & , \ \mathcal{N}_i^{\prime\prime(hj)} & ; & E_i^{\prime(hj)} & , \ E_i^{\prime\prime(hj)} & ; & \mathcal{Q}_i^{(hj)} & ; & S_{kl} ; \\ \mathcal{N}_j^{\prime(hi)} & , \ \mathcal{N}_j^{\prime\prime(hi)} & ; & E_j^{\prime(hi)} & , \ E_j^{\prime\prime(hi)} & ; & \mathcal{Q}_j^{(hi)} & ; & S_{kl} . \end{array}$$

Le intersezioni di queste linee colla retta sestupla S_{kl} sono:

$$(55) \begin{cases} \textit{i due punti dodecupli } \mathbf{P}^{(k)}, \mathbf{P}^{(l)} \text{ ed il punto } \mathbf{K}_{kl} ; \\ \text{il punto } \mathbf{P}'_{kl} \text{ di coordinate } A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = 1:1:1:(\varepsilon - 1)^3 : -(\varepsilon - 1)^3 ; \\ \quad » \quad \mathbf{P}''_{kl} \quad » \quad » \quad = 1:1:1:(\varepsilon^2 - 1)^3 : -(\varepsilon^2 - 1)^3 ; \\ \quad » \quad \mathbf{O}_{kl} \quad » \quad » \quad = 1:1:1: \ 0 \ : \ 0 \ . \end{cases}$$

I due punti $\mathbf{P}'_{kl}$ *e* $\mathbf{P}''_{kl}$ (che io dirò *coniugati* alla coppia $\mathbf{P}^{(k)}, \mathbf{P}^{(l)}$ di punti dode-

cupli) *sono settupli per la varietà* *), mentre il punto $\mathbf{O}_{kl}$, che è doppio per la cubica principale γ_{kl}, è sestuplo per Ξ.

Passano per il punto

$\mathbf{K}_{kl}$ le linee $\mathcal{Q}_j^{(hi)}$, $\mathcal{Q}_i^{(hj)}$; O'_{kl} , O''_{kl} ; C_{kl} ;

$\mathbf{P}^{(k)}$ » $\mathcal{N}_i^{\prime(hj)}$, $\mathcal{N}_i^{\prime\prime(hj)}$; $\mathcal{N}_j^{\prime(hi)}$, $\mathcal{N}_j^{\prime\prime(hi)}$; $E_i^{\prime(hj)}$, $E_i^{\prime\prime(hj)}$; $E_j^{\prime(hi)}$, $E_j^{\prime\prime(hi)}$; O'_{kl} , O''_{kl} :

$\mathbf{P}^{(l)}$ » $\mathcal{N}_i^{\prime(hj)}$, $\mathcal{N}_i^{\prime\prime(hj)}$; $\mathcal{N}_j^{\prime(hi)}$, $\mathcal{N}_j^{\prime\prime(hi)}$; $E_i^{\prime(hj)}$, $E_i^{\prime\prime(hj)}$; $E_j^{\prime(hi)}$, $E_j^{\prime\prime(hi)}$; O'_{kl} , O''_{kl} :

$\mathbf{P}'_{kl}$ » $E_i^{\prime\prime(hj)}$, $E_j^{\prime\prime(hi)}$; C_{kl} ;

$\mathbf{P}''_{kl}$ » $E_i^{\prime(hj)}$, $E_j^{\prime(hi)}$; C_{kl} ;

$\mathbf{O}_{kl}$ » $\mathcal{N}_i^{\prime(hj)}$, $\mathcal{N}_i^{\prime\prime(hj)}$; $\mathcal{N}_j^{\prime(hi)}$, $\mathcal{N}_j^{\prime\prime(hi)}$.

51. — TRACCE DELLA RETTA $\Theta_{hi}\Theta_{kl}\Omega_{hj}$. — Poichè si ha identicamente

$$\begin{aligned}&\lambda_1\Theta_{ih}+\lambda_2\Theta_{kl}+(\lambda_1+\lambda_3)\Omega_{hj}\\&=\lambda_1(\Theta_{ih}+\Omega_{hj})+\lambda_2\Theta_{kl}+\lambda_3\Omega_{hj}\\&=\lambda_1\Omega_{ij}+\lambda_2\Theta_{kl}+\lambda_3\Omega_{hj}\ ,\end{aligned}$$

la retta che si considera ora non è altro che la $\mathbf{r}_j^{(kl)}$ (v. num. 44). Le tracce della varietà Ξ su tale retta sono adunque i punti $\mathbf{P}^{(j)}, \mathbf{H}_j^{(kl)}, \mathbf{L}_j^{(kl)}, \mathbf{M}_j^{\prime(kl)}, \mathbf{M}_j^{\prime\prime(kl)}, \mathbf{N}_j^{\prime(kl)}, \mathbf{N}_j^{\prime\prime(kl)}$.

52. — TRACCE DELLA RETTA $\Theta_{hi}\Theta_{hj}\Theta_{hk}$. — Il punto corrente su questa retta $\mathbf{r}_l$ ha le coordinate

$$A_h^2x_h:\ldots:A_l^2x_l=\mu_1:\mu_1:\mu_1:\mu_1:\mu_2\ ,$$

donde si vede che tal retta non è altro che il raggio proiettante il vertice $\mathbf{U}_0^{(l)}$ della figura principale [**U**] dal punto **O** centrale della varietà Ξ (num. 12).

Entrano così in considerazione cinque rette $\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_5$ concorrenti nel punto centrale, dal quale proiettano i cinque vertici $\mathbf{U}_0$ della figura [**U**]. È facile rilevare che i dieci spazi Θ delle superficie doppie concorrono a sei a sei in tali rette: e precisamente che per la retta $\mathbf{r}_l$ passano i sei spazi (*estranei* ad essa)

$$\begin{matrix}\Theta_{ij}\ , & \Theta_{jh}\ , & \Theta_{hi}\ ,\\ \Theta_{hk}\ , & \Theta_{ik}\ , & \Theta_{jk}\ .\end{matrix}$$

I rimanenti quattro spazi $\Theta_{hl},\Theta_{il},\Theta_{jl},\Theta_{kl}$ si tagliano a tre a tre in ciascuna delle altre quattro rette $\mathbf{r}_h,\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j,\mathbf{r}_k$.

---

*) Le imagini di questi due punti $\mathbf{P}'_{kl}$ e $\mathbf{P}''_{kl}$ sono ordinatamente

$$[1:1:1:(\varepsilon-1):-\varepsilon^2(\varepsilon-1)]\ ,$$

$$[1:\varepsilon:\varepsilon^2:(\varepsilon-1):-(\varepsilon-1)]\ ,\ [\varepsilon:1:\varepsilon^2:(\varepsilon-1):-(\varepsilon-1)]\ ,\ [\varepsilon:\varepsilon^2:1:(\varepsilon-1):-(\varepsilon-1)]\ ,$$

$$[1:\varepsilon^2:\varepsilon:(\varepsilon-1):-(\varepsilon-1)]\ ,\ [\varepsilon^2:1:\varepsilon:(\varepsilon-1):-(\varepsilon-1)]\ ,\ [\varepsilon^2:\varepsilon:1:(\varepsilon-1):-(\varepsilon-1)]\ ;$$

ed

$$[1:1:1:(\varepsilon^2-1):-\varepsilon(\varepsilon^2-1)]\ ,$$

$$[1:\varepsilon:\varepsilon^2:(\varepsilon^2-1):-(\varepsilon^2-1)]\ ,\ [\varepsilon:1:\varepsilon^2:(\varepsilon^2-1):-(\varepsilon^2-1)]\ ,\ [\varepsilon:\varepsilon^2:1:(\varepsilon^2-1):-(\varepsilon^2-1)]\ .$$

$$[1:\varepsilon^2:\varepsilon:(\varepsilon^2-1):-(\varepsilon^2-1)]\ ,\ [\varepsilon^2:1:\varepsilon:(\varepsilon^2-1):-(\varepsilon^2-1)]\ ,\ [\varepsilon^2:\varepsilon:1:(\varepsilon^2-1):-(\varepsilon^2-1)]\ .$$

Tre rette $\mathbf{r}$ sono sempre in *uno* spazio Θ: ad es. le rette $\mathbf{r}_h, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ sono nello spazio estraneo Θ_{kl}; le rimanenti due sono nel piano comune ai tre spazi $\Theta_{ij}, \Theta_{jh}, \Theta_{hi}$ estranei a Θ_{kl} e segantisi nel piano ∇_{kl} (v. num. 24). Noi diremo, per questo motivo, che lo spazio Θ_{kl} ed il piano ∇_{kl} sono *opposti* fra loro. Il raggio $\nabla_{kl}\Theta_{kl}$ si dirà *diagonale* del pentaspigolo [$\mathbf{r}$].

53. Soffermandoci ora sul raggio $\mathbf{r}_l$, noi vediamo che per esso passano i quattro piani (v. num. 24).

$$\nabla_{hl} \equiv \Theta_{jk}\Theta_{ki}\Theta_{ij} \;,$$
$$\nabla_{il} \equiv \Theta_{kh}\Theta_{hj}\Theta_{jk} \;,$$
$$\nabla_{jl} \equiv \Theta_{hi}\Theta_{ik}\Theta_{kh} \;,$$
$$\nabla_{kl} \equiv \Theta_{ij}\Theta_{jh}\Theta_{hi} \;,$$

e gli altri tre (v. num. 27)

$$\overset{(1)}{\nabla_l} \equiv \Theta_{ij}\Theta_{hk} \;, \quad \overset{(2)}{\nabla_l} \equiv \Theta_{jh}\Theta_{ik} \;, \quad \overset{(3)}{\nabla_l} \equiv \Theta_{hi}\Theta_{jk} \;.$$

Nei diversi piani così indicati giacciono varie curve intersezioni colla varietà. Esse sono:

	nel piano	∇_{hl}	le curve	O'_{hl} , O''_{hl} , C''_{hl} , S_{hl} ;
	»	∇_{il}	»	O'_{il} , . , . , . ;
	»	∇_{jl}	»	O'_{jl} , . , . , . ;
	»	∇_{kl}	»	O'_{kl} , . , . , . ;
e	»	$\nabla^{(1)}_l$	»	$Y^{(1)}_l$, $\mathcal{M}'^{(1)}_l$, $\mathcal{M}''^{(1)}_l$, $\mathcal{D}^{(1)}_l$;
	»	$\nabla^{(2)}_l$	»	$Y^{(2)}_l$, . , . , . ;
	»	$\nabla^{(3)}_l$	»	$Y^{(3)}_l$, . , . , . .

Facilmente si trova che la retta $\mathbf{r}_l$ è tagliata da tutte queste curve complessivamente nel gruppo di punti seguente:

$$(56)\quad \begin{cases} \mathbf{P}^{(l)} & \text{di coordinate conosciute} \\ \mathbf{R}'_l & \text{»} \quad A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = 1:1:1:1:(\varepsilon-2)^3 \;, \\ \mathbf{R}''_l & \text{»} \quad \text{»} \quad = 1:1:1:1:(\varepsilon^2-2)^3 \;, \\ \mathbf{S}_l & \text{»} \quad \text{»} \quad = 1:1:1:1:8 \;, \\ \mathbf{T}_l & \text{»} \quad \text{»} \quad = 1:1:1:1:-64 \;. \end{cases}$$

Tutte le curve

O'	del quadro	passano per	$\mathbf{P}^{(l)}$, $\mathbf{R}'_l$, $\mathbf{S}_l$;
O''	»	»	$\mathbf{P}^{(l)}$, $\mathbf{R}''_l$, $\mathbf{S}_l$;
C	»	»	$\mathbf{R}'_l$, $\mathbf{R}''_l$, $\mathbf{T}_l$;
S	»	»	$\mathbf{P}^{(l)}$
Y	»	»	$\mathbf{P}^{(l)}$ (due volte), $\mathbf{S}_l$;
$\mathcal{D}$	»	»	$\mathbf{S}_l$ (due volte), $\mathbf{T}_l$;
$\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}''$	»	»	$\mathbf{P}^{(l)}$, $\mathbf{R}'_l$, $\mathbf{R}''_l$.

54. — *I due punti* $\mathbf{R}'_l$ *ed* $\mathbf{R}''_l$ *sono entrambi quadrupli per* Ξ *): *il punto* $\mathbf{S}_l$ *è sestuplo per la varietà* **): *ed il punto* $\mathbf{T}_l$ *è semplice* ***) *per* Ξ. Così il computo delle intersezioni di $\mathbf{r}_l$ colla nostra varietà riesce completa, per essere

$$12+6+4+4+1=27 \; .$$

55. — Prima di lasciare questo argomento vogliamo richiamar l'attenzione sulla circostanza che i cinque raggi $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_5$ congiungenti il punto centrale ai vertici della figura principale $[\mathbf{U}]$ passano uno ad uno per i cinque punti dodecupli, incontrando pure uno ad uno cinque punti sestupli non appartenenti a curve sestuple, ma incroci dei gruppi di curve triple O' ed O'' legate fra loro da un dato indice, e contenendo ancora una coppia di punti quadrupli ed un punto semplice ciascuno.

56. — I tre spazi associati in terna $\Theta_{ij}, \Theta_{jh}, \Theta_{hi}$ si tagliano secondo il piano ∇_{kl} anzichè lungo una retta (v. num.ⁱ 24 e 25).

57. — Tracce della retta $\Theta_{hi}\Theta_{ij}\Theta_{jh}$. — Codesta retta non è altro che la $\mathbf{r}_l$ incontrata al num. 53, quindi le sue tracce sulla varietà Ξ sono conosciute.

58. — Tracce della retta $\Theta_{hi}\Theta_{hj}\Theta_{kl}$. — La retta intersezione di questi tre spazi è il raggio diagonale (kl) (n.° 52) del cinquispigolo $[\mathbf{r}]$. Le coordinate correnti su di essa sono

$$A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = \mu_1 : \mu_1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_2 \; ,$$

da cui si vede che esso proietta dal punto centrale $(\mu_2 = \mu_1)$ il punto $\mathbf{O}_{kl}$ $(\mu_2 = 0)$ doppio per la cubica principale γ_{kl}, e che appoggia alla retta principale $\mathbf{U}_1^{(kl)}$ nel punto coniugato armonico di $\mathbf{K}_{kl}$ rispetto ad $\mathbf{U}_0^{(k)}$ ed $\mathbf{U}_0^{(l)}$.

Tale retta, che noi designeremo col simbolo $\mathbf{r}_{kl}$, appartiene a ciascuno dei piani

$$\nabla_h^{(3)} \equiv \Theta_{ij}\Theta_{kl} \; ,$$
$$\nabla_i^{(1)} \equiv \Theta_{kl}\Theta_{jh} \; ,$$
$$\nabla_j^{(3)} \equiv \Theta_{kl}\Theta_{hi} \; ,$$
$$\nabla_{kl} \equiv (\Theta_{ij})\Theta_{jh}\Theta_{hi} \; .$$

---

*) Essendo le imagini

$$[\varepsilon^2 : 1 : 1 : 1 : (\varepsilon-2)] \; , \; [1 : \varepsilon^2 : 1 : 1 : (\varepsilon-2)] \; , \; [1 : 1 : \varepsilon^2 : 1 : (\varepsilon-2)] \; , \; [1 : 1 : 1 : \varepsilon^2 : (\varepsilon-2)] \; ,$$

e

$$[\varepsilon : 1 : 1 : 1 : (\varepsilon^2-2)] \; , \; [1 : \varepsilon : 1 : 1 : (\varepsilon^2-2] \; , \; [1 : 1 : \varepsilon : 1 : (\varepsilon^2-2)] \; , \; [1 : 1 : 1 : \varepsilon : (\varepsilon^2-2)]$$

rispettivamente.

**) E le imagini ne sono

$$[\varepsilon : \varepsilon : \varepsilon^2 : \varepsilon^2 : 2] \; , \; [\varepsilon : \varepsilon^2 : \varepsilon : \varepsilon^2 : 2] \; , \; [\varepsilon^2 : \varepsilon : \varepsilon : \varepsilon^2 : 2] \; ,$$
$$[\varepsilon^2 : \varepsilon^2 : \varepsilon : \varepsilon : 2] \; , \; [\varepsilon^2 : \varepsilon : \varepsilon^2 : \varepsilon : 2] \; , \; [\varepsilon : \varepsilon^2 : \varepsilon^2 : \varepsilon : 2] \; .$$

***) Avendo l'imagine unica

$$[1 : 1 : 1 : 1 : -4] \; .$$

In questi piani giacciono le seguenti curve di Ξ:

in	∇_{kl}	le cubiche	triple	$\mathcal{O}'_{kl}\ ,\ \mathcal{O}''_{kl}$;	la semplice	$\mathcal{C}_{kl}$;	la retta sestupla	$\mathcal{S}_{kl}$;
»	$\nabla^{(3)}_h$	»	doppie	$\mathcal{M}'^{(3)}_h\ ,\ \mathcal{M}''^{(3)}_h$;	»	$\mathcal{D}^{(3)}_h$;	la quadrupla	$\mathcal{Y}^{(3)}_h$;
»	$\nabla^{(1)}_i$	»	»	$\mathcal{M}'^{(1)}_i\ ,\ \mathcal{M}''^{(1)}_i$;	»	$\mathcal{D}^{(1)}_i$;	»	$\mathcal{Y}^{(1)}_i$;
»	$\nabla^{(3)}_j$	»	»	$\mathcal{M}'^{(3)}_j\ ,\ \mathcal{M}''^{(3)}_j$;	»	$\mathcal{D}^{(3)}_j$;	»	$\mathcal{Y}^{(3)}_j$

Queste curve incontrano la retta $\mathbf{r}_{kl}$ complessivamente nel gruppo di punti seguente:

$$
(57)\quad \begin{cases}
\mathbf{O}'_{kl} \text{ di coordinate } A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = 1 : 1 : 1 : 0 : 0 \ ; \\
\mathbf{X}'_{kl} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = 8 : 8 : 8 : (\varepsilon-1)^3 : (\varepsilon-1)^2 \ ; \\
\mathbf{X}''_{kl} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = 8 : 8 : 8 : (\varepsilon^2-1)^3 : (\varepsilon^2-1)^3 \ ; \\
\mathbf{Y}'_{kl} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = -1 : -1 : -1 : (\varepsilon-1)^3 : (\varepsilon-1)^3 \ ; \\
\mathbf{Y}''_{kl} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = -1 : -1 : -1 : (\varepsilon^2-1)^3 : (\varepsilon^2-1)^3 \ ; \\
\mathbf{U}_{kl} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = 1 : 1 : 1 : 27 : 27 \ . \\
\mathbf{Z}_{kl} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = 8 : 8 : 8 : -27 : -27 \ ;
\end{cases}
$$

59. — Il punto $\mathbf{O}_{kl}$ è sestuplo per la varietà Ξ: *i due punti* $\mathbf{X}'_{kl}$ *ed* $\mathbf{X}''_{kl}$ *sono tripli* *), *ed i due punti* $\mathbf{Y}'_{kl}, \mathbf{Y}''_{kl}$ *sono sestupli* **): *è doppio per la varietà* Ξ *il punto* $\mathbf{U}_{kl}$, mentre il punto $\mathbf{Z}_{kl}$ è semplice ***).

---

*) Le imagini di questi due punti sono ordinatamente

$[2:2\varepsilon:2\varepsilon:\varepsilon(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-1)]$, $[2\varepsilon:2:2\varepsilon:\varepsilon(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-1)]$, $[2\varepsilon:2\varepsilon:2:\varepsilon(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-1)]$,

e

$[2:2\varepsilon^2:2\varepsilon^2:\varepsilon^2(\varepsilon^2-1):\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)]$, $[2\varepsilon^2:2:2\varepsilon^2:\varepsilon^2(\varepsilon^2-1):\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)]$, $[2\varepsilon^2:2\varepsilon^2:2:\varepsilon^2(\varepsilon^2-1):\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)]$.

**) Di imagini:

$[1:1:\varepsilon:(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-1)]$, $[1:\varepsilon:1:(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-1)]$, $[\varepsilon:1:1:(\varepsilon-1):\varepsilon(\varepsilon-1)]$,

$[1:1:\varepsilon:\varepsilon(\varepsilon-1):(\varepsilon-1)]$, $[1:\varepsilon:1:\varepsilon(\varepsilon-1):(\varepsilon-1)]$, $[\varepsilon:1:1:\varepsilon^2(\varepsilon-1):(\varepsilon-1)]$;

ed

$[1:1:\varepsilon^2:(\varepsilon^2-1):\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)]$, $[1:\varepsilon^2:1:(\varepsilon^2-1):\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)]$, $[\varepsilon^2:1:1:(\varepsilon^2-1):\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)]$,

$[1:1:\varepsilon^2:\varepsilon^2(\varepsilon^2-1):(\varepsilon^2-1)]$, $[1:\varepsilon^2:1:\varepsilon^2(\varepsilon^2-1):(\varepsilon^2-1)]$, $[\varepsilon^2:1:1:\varepsilon^2(\varepsilon^2-1):(\varepsilon^2-1)]$

rispettivamente.

***) Le imagini sono per $\mathbf{U}_{kl}$

$$[1:1:1:3\varepsilon:3\varepsilon^2] \ , \ [1:1:1:3\varepsilon^2:3\varepsilon]$$

e per $\mathbf{Z}_{kl}$ la sola imagine è

$$[2:2:2:-3:-3] \ .$$

Così sono tutte computate le intersezioni di $\mathbf{r}_{kl}$ colla varietà Ξ, perchè si ha infatti:

$$6+3+3+6+6+2+1=27 .$$

Passano per il punto

$\mathbf{O}_{kl}$	le linee	$Y_h^{(3)}$; $Y_i^{(1)}$, $Y_j^{(3)}$; S_{kl}
$\mathbf{X}'_{kl}$	»	O_{kl} ; $\mathcal{D}_h^{(3)}$, ... ;
$\mathbf{X}''_{kl}$	»	O''_{kl} ; $\mathcal{D}_h^{(3)}$, ... ;
$\mathbf{Y}'_{kl}$	»	O'_{kl} (due volte) ; $Y_h^{(3)}$, ... ; $\mathcal{M}_h'^{(3)}$, ... ; $\mathcal{M}_h''^{(3)}$, ... ;
$\mathbf{Y}''_{kl}$	»	O''_{kl} » ; $Y_h^{(3)}$, ... ; $\mathcal{M}_h'^{(3)}$, ... ; $\mathcal{M}_h''^{(3)}$, ... ;
$\mathbf{U}_{kl}$	»	C_{kl} » ; $\mathcal{M}_h'^{(3)}$, ... ; $\mathcal{M}_h''^{(3)}$, ... ;
$\mathbf{Z}_{kl}$	»	C_{kl} ; $\mathcal{D}_h^{(3)}$, ...

60. — L'interesse, già rilevato, del cinquispigolo [**r**] (n.° 55), viene a ricevere nuova conferma, in quantochè anche i suoi raggi diagonali, proiettano dal punto centrale **O** uno ad uno i punti doppi delle dieci cubiche principali γ, passando per altrettante coppie di punti sestupli non appartenenti a rette sestuple, ma doppi ciascuno per una cubica tripla O.

APPENDICE

Durante la stampa della presente Memoria ho notato un disaccordo fra il numero di superficie doppie indicate per la varietà Ξ e quello che risulterebbe dalla teoria generale delle varietà ipersteineriane. Riesaminata la questione, rilevai una svista, in cui ero caduto: riparando ad essa, ho riempita una lacuna e ristabilito pienamente l'accordo necessario. In codesta aggiunta non vengono menomamente infirmati i fatti già assodati, e piuttosto ne vengono aggiunti de' nuovi.

Risaliamo al num. 10. Ivi non è stato considerato, come s'avrebbe dovuto, il caso

$$\nu_h=\nu \quad , \quad \nu_i=\nu_j=\nu' \quad , \quad \nu_k=\nu_l=\nu'' \ ,$$
$$\nu\mp\nu'\mp\nu'' \ ,$$

al quale corrispondono, nello spazio rappresentativo, i piani

$$\zeta_h'^{(3)}\equiv\theta_{ij}-\varepsilon\,\theta_{kl}=0 \ ,$$
$$\zeta_h''^{(3)}\equiv\theta_{ij}-\varepsilon^2\theta_{kl}=0 \ ,$$

che sono imagini di una stessa superficie $\mathfrak{V}_h^{(3)}$ del 9° ordine, doppia quindi per la varietà Ξ.

Le superficie doppie $\mathfrak{V}$ *sono in numero di quindici; ognuna di esse è coordinata ad una retta tripla di una superficie* Φ *di contatto di un piano principale.*—La superficie $\mathfrak{V}_h^{(3)}$ ha una retta tripla nella $\mathfrak{R}_h^{(3)}$ alla quale è coordinata, intersezione dei due coni tripli $\mathbf{W}_{ij}$, $\mathbf{W}_{kl}$, e tripla per Φ_h.

Sono facili a verificarsi le identità:

$$\begin{cases} \zeta_h^{(3)} = \vartheta_{ik}^{(1)} + \vartheta_{jl}^{(1)} = \vartheta_{il}^{(1)} + \vartheta_{jk}^{(1)} , \\ \zeta''^{(3)}_h = \vartheta_{ik}^{(2)} + \vartheta_{jl}^{(2)} = \vartheta_{il}^{(2)} + \vartheta_{jk}^{(2)} , \end{cases}$$

le quali ci attestano che la superficie doppia $\mathfrak{V}_h^{(3)}$ passa per l'intersezione delle due doppie $\mathbf{V}_{ik}$, $\mathbf{V}_{jl}$, e passa pure per l'intersezione delle superficie doppie $\mathbf{V}_{il}$, $\mathbf{V}_{jk}$. Vale a dire che *la superficie doppia* $\mathfrak{V}_h^{(3)}$ *passa per le due cubiche piane* $Y_h^{(1)}$, $Y_h^{(2)}$ *quadruple per la varietà.*

Per soddisfare, ad es., alla equazione

$$0 = \theta_{ij} - \varepsilon\theta_{kl}$$

possiamo porre

$$A_h\alpha_h : \ldots : A_l\alpha_l = \varepsilon(\mu_1 + \mu_2) : \mu_1 : \mu_2 : \varepsilon^2(\mu_1 - \mu_3) : \varepsilon^2(\mu_2 + \mu_3) ,$$

dal che risultano le coordinate del punto corrente su $\mathfrak{V}_h^{(3)}$ nella forma:

$$A_h^2 x_h : \ldots : A_l^2 x_l = (\mu_1 + \mu_2)^3 : \mu_1^3 : \mu_2^3 : (\mu_1 - \mu_3)^3 : (\mu_2 + \mu_3)^3 . \tag{58}$$

Di qui scendono le equazioni della superficie medesima nella forma

$$\begin{cases} -\sqrt[3]{A_h^2 x_h} + \sqrt[3]{A_i^2 x_i} + \sqrt[3]{A_j^2 x_j} = 0 , \\ -\sqrt[3]{A_h^2 x_h} + \sqrt[3]{A_k^2 x_k} + \sqrt[3]{A_l^2 x_l} = 0 . \end{cases}$$

La superficie doppia $\mathfrak{V}_h^{(3)}$ *è immersa nello spazio a quattro dimensioni.*—Infatti, se la superficie medesima appartenesse ad uno spazio ordinario, questo dovrebbe contenere i piani $\nabla_h^{(1)}$ e $\nabla_h^{(2)}$ delle due cubiche quadruple (num. 27) per le quali passa la nostra superficie. Tale spazio dovrebbe quindi avere l'equazione

$$A_i^2 x_i + A_j^2 - A_k^2 x_k - A_l^2 x_l = 0 ,$$

la quale non è soddisfatta identicamente dalle coordinate (58) del punto corrente di $\mathfrak{V}_h^{(3)}$.

Ritorneremo un'altra volta sull'argomento delle superficie doppie di specie $\mathfrak{V}$, essendoci ora limitati alla loro indicazione.

Inoltre avremo ad occuparci delle proprietà di una sezione spaziale generica della varietà Ξ e di alcune notevoli sezioni particolari, fra cui è interessantissima la super-

ficie $\mathfrak{K}$ ottenuta mediante lo spazio Π dei dieci punti **K**, possedendo essa codesti punti nonupli e le quindici rette triple $\mathcal{R}$. Riferendo tale superficie ad un tetraedro i cui vertici siano quattro punti **K** convenienti, la sua equazione nello spazio Π assume la forma

$$\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2-z_1}+\sqrt[3]{z_3-z_2}+\sqrt[3]{z_4-z_3}+\sqrt[3]{-z_4}=0\ .$$

Meritevoli di studio sono pure le cinque sezioni $\mathfrak{P}$ fatte con ciascuno dei cinque spazi determinati da quattro punti dodecupli. La superficie $\mathfrak{P}_h$, il cui spazio

$$-2A_h^2x_h+A_i^2x_i+A_j^2x_j+A_k^2x_k+A_l^2x_l=0$$

passa pei quattro punti $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j, \mathbf{P}_k, \mathbf{P}_l$, possiede questi quattro punti dodecupli e le sei rette sestuple $S_{jk}, S_{ki}, S_{ij}, S_{il}, S_{jl}, S_{kl}$ che li uniscono due a due. L'equazione della superficie $\mathfrak{P}_h$ riferita al tetraedro dei proprii punti dodecupli è

$$\sqrt[3]{z_1+z_2+z_3+z_4}+\sqrt[3]{z_2+z_3+z_4-z_1}+\ldots+\sqrt[3]{z_1+z_2+z_3-z_4}=0\ .$$

Ponno essere argomento di ricerche particolari anche le 5 superficie $\mathfrak{S}$ ottenute dalla varietà Ξ tagliandola cogli spazi ordinari che contengono quattro punti sestupli **S**. Lo spazio che contiene $\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j, \mathbf{S}_k, \mathbf{S}_l$, ha l'equazione

$$-11A_h^2x_h+A_i^2x_i+A_j^2x_j+A_k^2x_k+A_l^2x_l=0$$

e contiene la superficie $\mathfrak{S}_h$, che in esso ha l'equazione

$$\sqrt[3]{z_1+z_2+z_3+z_4}+\sqrt[3]{8z_1+z_2+z_3+z_4}+\ldots+\sqrt[3]{z_1+z_2+z_3+8z_4}=0\ ,$$

quando la si riferisca al tetraedro de' suoi punti **S**.

finita di stampare il dì 3 Giugno 1897

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

CURVE k-GONALI DI s^{esima} SPECIE

MEMORIA

del prof. FEDERICO AMODEO

presentata nell'adunanza del dì 23 Ottobre 1897.

Perseverando.

Introduzione

Il nome di *curve* k-*gonali* l'ho dato a tutte quelle curve algebriche che hanno almeno una serie lineare ∞^1 di grado k, senza avere una serie lineare ∞^1 di grado minore *); ciò corrisponde alla possibilità di poter determinare sopra la curva algebrica un gruppo variabile di k punti (e non meno di k) in funzione di un parametro razionale; e il problema della ricerca di queste curve corrisponde all'altro, non ancora risoluto per $k > 2$, di cercare quegli enti algebrici che hanno per grado minimo delle funzioni razionali esistenti su di essi il grado k, cioè, i cui gruppi di zeri e di infinito sono al minimo di k punti ciascuno.

Dovendo ogni curva algebrica necessariamente essere x-gonale, lo studio delle curve k-gonali è lo studio di tutte le curve algebriche, da farsi non già in base al loro *ordine*, come si è fatto nello inizio dello studio delle curve algebriche; nè in base al *genere*, come si è fatto in seguito e si sta facendo ora da tutti; ma classificate in base a questo numero che indica la *gonalità*, che meglio dei numeri precedenti si presta a far risalire, senza trovare grandi diversità, alle curve di ordine e genere più elevati, da quelli più bassi possibili. Questo numero, che io chiamo *gonalità* della curva, è quello stesso che il Sig.r Koenigs proponeva di chiamare *irrazionalità*, quando egli non sapeva dello studio da me iniziato **).

Troppo vasto è il campo da mietere per poter fare a meno di andare avanti con un ordine logico che permettesse di raccogliere fatti nuovi, utili ed ordinati. È per ciò che

*) Cfr. Amodeo, *Curve* k-*gonali*, Ann. di Matem. (2), 21, p. 221-236, 1893.
Questa Memoria sarà in seguito indicata con M. I. In essa nel primo rigo della p. 231 si legga $\binom{z}{2}$ invece di z. A questa Memoria seguì un'altra intitolata: *Curve* k-*gonali di 1ª e di 2ª specie*, Id. (2), 24, p. 1-22, 1896, la quale sarà indicata in seguito con M. II.

**) Cfr. *L'intermédiaire des Mathématiciens*, vol. II, p. 21, 1895, questione 472.

io credetti opportuno nei miei precedenti lavori, dopo aver enunciato poche proprietà generali comuni a tutte le curve k-gonali, di limitare al principio le mie ricerche a quelle curve k-gonali, per le quali i gruppi di k punti della g_k^1 o delle g_k^1, che su esse esistono, siano collineari, le quali, oltre ad essere di grande interesse per sè stesse, possono spianare la strada per lo studio di tutte le altre curve k-gonali.

Non era però possibile proseguire senza risolvere prima altri problemi sulle curve algebriche C^m di ordine m, che dai geometri erano stati trascurati, perchè ritenuti di poca o di nessuna importanza. Questi problemi riguardavano le curve aggiunte alle curve C^m di ordine inferiore ad $m-3$, ed io li ho risoluti in tre note *), che il lettore è pregato di tener presenti (specialmente la terza che riepiloga anche le prime) per comprendere le notazioni e il linguaggio adottato in questa Memoria. Qui si vedrà ancora una volta riconfermato che per le curve algebriche di gonalità k di ordine m sono importantissime le curve agg. di ordini $m-k$ ed $m-k-1$, e che per $k>2$ ad esse si trasmettono il compito e le proprietà che hanno le curve agg. di ordine $m-2$ ed $m-3$ nelle curve iperellittiche.

Le difficoltà della ricerca aumentando coll'aumentare di un altro carattere delle curve k-gonali, che questa volta era un carattere proiettivo, io fui per necessità indotto ad ordinare le curve di una medesima gonalità in sottofamiglie in base a questo carattere, che è il numero che dà la *classe* dell'inviluppo di tutte le rette che segano la g_k^1 o le g_k^1 che esistono sulla curva. A questo numero ho dato il nome di *specie*, e lo indico con la lettera s.

Ora questa suddivisione di ripiego viene giustificata dal successo; poichè qui si dimostrerà che una curva k-gonale di specie qualsiasi potrà sempre essere rappresentata da curve k-gonali di 1ª specie o da curve k-gonali di 2ª specie, secondochè la sua specie sia dispari o pari. In seguito farò vedere che le curve di 1ª specie possono anche rappresentare quelle di 2ª specie (e quindi tutte quelle di specie pari), purchè sia pari anche la gonalità.

Il primo teorema ha reso pel momento non necessaria la costruzione effettiva delle curve k-gonali piane di specie superiori alla seconda. Non intendo con ciò che questa costruzione sia inutile; perchè, allo stesso modo che la costruzione effettiva delle curve k-gonali di 2ª specie mi ha data l'occasione di trovare nuovi sistemi di curve sovrabbondanti **), certamente altri sistemi nuovi dovranno risultare dalla costruzione di queste altre curve k-gonali.

Fra i risultati cui son pervenuto nella ricerca che qui espongo, mi piace segnalare il seguente:

La dimensione della serie lineare completa nella quale è contenuta la serie lineare

---

*) Cfr. Amodeo, *Curve aggiunte minime*, Rend. della r. Acc. dei Lincei, (5), 2_1, p. 460-467, 1893.
Amodeo, *Serie residua nella serie canonica delle curve aggiunte di ordine* $m-3-\alpha$; Ibid. p. 528-532.
Amodeo, *Curve aggiunte e serie specializzate*, Rend. di questa r. Acc., 28 Nov. 1896.
La lettura di quest'ultima Nota è utile anche perchè il lettore troverà ivi le dimostrazioni di quanto ho affermato nella nota *** della p. 1 della M. II. e l'errata corrige della formola data nel penultimo verso della p. 3 di questa M. II. Questa terza Nota sarà indicata nel seguito con (C. a. e s. sp.).

**) Cfr. Amodeo, *Sistemi lineari di curve algebriche di genere massimo ad intersezioni variabili collineari*, Rend. di questa r. Acc., 7 Marzo 1896.

segata da tutte le rette del piano sulla curva k-*gonale di specie* s, *è* s + 1 (cfr. n. 7, *a* del § 7).

A comprovare quanto il campo delle curve che qui studio si allontana dalle curve che usualmente sono oggetto di ricerche, basta fare osservare che, di tutte le curve che qui e nelle memorie precedenti sono esaminate, non ce ne sono che tre alle quali si può applicare la formola data dal ch. prof. Castelnuovo per determinare il numero delle serie lineari g_n^r esistenti sulle curve algebriche di dato genere, quando questo numero è finito.

Quella formola valendo solo per le curve non singolari nel loro genere, si può applicare ad un numero molto ristretto di curve algebriche: la massa delle curve sfugge al suo impero. Con tutto ciò non è stato dato, nè dal prof. Castelnuovo, nè da altri, il modo di costruire il numero finito delle g_n^r che le curve *generali nel loro genere* possono avere, nemmanco pel caso di $r = 1$, e sarebbe desiderabile che lo stesso prof. Castelnuovo completasse il suo risultato in questo senso.

Un'altra osservazione mi corre opportunità di fare, e ne colgo qui l'occasione. Al teorema di Riemann: *Se una curva possiede due* g_k^1 *che non abbiano alcuna serie razionale o irrazionale comune, è riducibile ad una curva di genere* $\leq (k-1)^2$, il ch. prof. Bertini *) ha aggiunto: *Se* k *è primo e* $p > (k-1)^2$ *una curva* C_p^m *di ordine* m *e genere* p *non può contenere che una sola* g_k^1. Io posso aggiungere ancora quest'altra osservazione: *Le curve* k-*gonali che hanno il genere* $p > (k-1)^2$ *debbono necessariamente avere una sola* g_k^1 *sia* k *primo o no.* E fo notare inoltre che il teorema contrario di quello di Riemann non ha luogo e che invece si ha questo teorema: *Una curva* k-*gonale il cui genere* p *soddisfa la relazione* $2(k-1) < p \leq (k-1)^2$, o altrimenti *una curva* k-*gonale singolare nel suo genere* p *e che abbia il genere* $p \leq (k-1)^2$, *non deve necessariamente avere più di una* g_k^1.

Difatti fra le curve 5-gonali vi è la curva di genere 14 che ha una sola g_5^1; nelle curve 6-gonali vi è la curva di genere 20 e la curva di genere 25 che hanno una sola g_6^1, ecc.; mentre per ogni valore di k vi è la curva di genere $(k-1)^2$ che ha costantemente due g_k^1.

Non posso fare a meno di far conoscere al lettore che dopo la pubblicazione della M. II. e contemporaneamente alla pubblicazione della (C. a. e s. sp.), pubblicazione che per ragioni note anche ad un illustre geometra italiano venne ritardata di un paio di mesi, il sig. Burkhardt, che io aveva pregato di rivedere il giudizio da lui dato nello Jahrbuch über Fortschritte der Mathematik (tom. 25, p. 1091, 1896) sulle prime due Note dei Lincei qui citate (in questo giudizio egli si riportava completamente a quello datone dal prof. Bertini **)) ha presentato all'Accad. di Göttingen una Nota ***) nella quale, come io aveva fatto osservare nella M. II. a p. 3, fa vedere in poche

*) Cfr. Bertini, *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico*; Ann. di Mat. (2), 22, 1894, n. 41.

**) Cfr. Bertini, *l. c.*

***) Cfr. Burkhardt, *Zür Theorie der linearen Scharen von Punktaggregaten auf algebraischen Curven*, Nachrichten d. k. G. d. W. zu Göttingen, 21 Nov. 1896.

In questa Nota si troverà pure il cenno di una corrispondenza corsa fra il prof. Bertini e il sig. Burkhardt, e fra questi e me, oltre alla correzione della formola della p. 3 della M. II., nello stesso senso fatto da me al n. 13 della (C. a. e s. sp.).

parole che quel tale grave errore

$$p_\alpha = \frac{\alpha}{2}(m-3-\alpha)$$

a me addebitato dal prof. Bertini e da altri *), pel quale sarebbero stati infirmati varii risultati di quelle note e della M. I., nón è un errore.

E ciò sopratutto era mio interesse che in tutta la polemica fosse conosciuto, le altre cose essendo di secondaria importanza.

Sulle curve k-gonali, oltre le mie memorie, ne sono state pubblicate altre dal sig. Küpper, quelle da me citate nella (C. a. e s. sp.) e inoltre *Die Ultraelliptischen Curven* $C^n_p, p>1$ [Sitz. ber. der böhm. Gesellschaft der Wissenschaft, 18 Dic. 1896], ove egli lealmente conferma ciò che io aveva detto nella (C. a. e s. sp.), cioè che le sue pubblicazioni sono state determinate dalla lettura delle mie.

Dei teoremi trovati dal sig. Küpper io applicherò soltanto il seguente **), che io aveva enunciato solo per casi particolari (cfr. M. II., p. 14) e che trascrivo qui liberamente.

Ogni $C^{m-3-\alpha}$ *agg. alla curva* k*-gonale* C^m_p *che ha almeno una* $C^{m-3-(k-2)}$ *agg., se passa per* $k-\alpha-1$ *punti di un gruppo di una* g^1_k, *passa per tutti i rimanenti.*

La dimostrazione è analoga a quella da me fatta pel primo dei teor. *c)* del § 4 della M. I. ed è la seguente: La $C^{m-3-\alpha}$ che passa per i punti $a_1, a_2, \dots, a_{k-\alpha-1}$ di un gruppo, insieme ad α rette passanti per i punti $a_{k-\alpha}, \dots, a_{k-1}$ del gruppo, formano una C^{m-3} aggiunta, che, passando per $k-1$ punti del gruppo, deve passare pel k^{mo} punto, e siccome per questo punto non ci passa alcuna delle rette arbitrarie, deve passarci la $C^{m-3-\alpha}$ agg.

Questo teorema si può anche enunciare sotto la seguente forma che userò sovente:

Ogni gruppo della serie g^1_k *di una curva* C^m_p k*-gonale, che possiede almeno una* $C^{m-3-(k-2)}$ *agg., vale soltanto* $k-\alpha-1$ *condizioni per una qualunque* $C^{m-3-\alpha}$ *agg. della stessa curva.*

In particolare, un gruppo della g^1_k *vale* 2 *condizioni per una qualunque* C^{m-k} *agg.,* 3 *condiz. per una qual.* C^{m-k+1} *agg., ecc. ecc.,* $k-1$ *condizioni per una qualunque* C^{m-3} *aggiunta.*

E bene avvertire che avendo nella (C. a. e s. sp.) fissato di chiamare $1^a, 2^a, \dots, (\alpha+1)^{esima}$ *serie canonica* (*o serie canonica specializzata* $0,1,2,\dots,\alpha$ *volte*) quelle segate da tutte le curve aggiunte rispettivamente di ordine $m-3$, $m-4$, ..., $m-3-\alpha$, le curve k-gonali da me esaminate hanno sempre $k-2$ o $k-1$ serie canoniche, secondo che esse corrispondono al valore di $R=0$ o di $R>0$; la $(k-1)^{esima}$ serie canonica è la g^R_{kR} segata da tutte le curve $C^{m-3-(k-2)}$ aggiunte minime, che, come si sa, è composta mediante la g^1_k, se $R>1$.

Dagli enunciati dei teoremi apparirà che forse sarebbe stato meglio che io avessi chiamate $1^a, 2^a, 3^a, \dots,$ *serie canonica* quelle segate rispettivamente dai sistemi di curve

*) Cfr. *Bollettino ufficiale del Ministero della Istruzione pubblica*, 22 febb. 1894, p. 232.

**) Cfr Küpper, *Ueber k-gonale Curven ecc.* Sitz. ber. böhm. G. d. W. 1895, p. 5.

agg. dell'ordine $m-1$, $m-2$, $m-3$, ecc., e quindi che la 1ª e 2ª sarebbero state serie non speciali, la 3ª speciale, la 4ª, 5ª, ..., sarebbero state specializzate 1, 2, ..., volte rispettivamente. Non ho ciò fatto per non cagionare confusione al lettore delle mie precedenti Note, ma avverto espressamente che, se dagli enunciati dei teoremi il numero d'ordine di una serie canonica risulta essere -1 o *zero*, si deve intendere che la serie non è canonica, nè speciale, ma è la serie segata da tutto il sistema delle curve aggiunte di ordine $m-1$ od $m-2$ rispettivamente. Il 2° caso accade per le curve iperellittiche; il 1° caso accadrebbe per le curve razionali, che corrispondono al valore di $k=1$. I teoremi per questi casi non soffrono restrizione alcuna.

Al lettore avverrà di notare che io ho tralasciate di sviluppare moltissime questioni che si presentano ad ogni passo, ciascuna delle quali può essere soggetto di uno studio a parte. Il mio scopo nel pubblicare questa Memoria, che colla M. I. e II. presenta soltanto la 1ª parte delle ricerche sulle curve algebriche da me fatte, è di sbarazzare il cammino da tutte le difficoltà, che, come hanno arrestato me moltissime volte, potrebbero forse impedire di andare innanzi anche ad altri, che voglia proseguirle in base alle nozioni comunemente date. E mi reputerò fortunato se questo scopo avrò raggiunto.

§ 1. — Nuovi teoremi sulle curve k-gonali tipiche.

1. Per comodità del lettore rammento che i caratteri delle curve k-gonali tipiche (o di prima specie) in funzione della gonalità k e della dimensione R del sistema delle curve aggiunte minime che esse posseggono (M. I., § 1) sono i seguenti:

$$m=k+R+1 \quad , \quad p=\frac{(k-1)(k+2R)}{2} \quad , \quad \rho_{k-2}=0 \; ,$$

ove ρ_{k-2} indica la sovrabbondanza del sistema delle curve aggiunte minime, che sono dell'ordine $m-3-(k-2)=R$ (cfr. C. a. e s. sp., n. 1) e composte ciascuna di R rette di un fascio che ha per centro l'unico punto multiplo della curva che è $(R+1)$-*uplo*. Il simbolo generico di tutte le curve k-gonali tipiche è, per le notazioni da noi adottate,

$$C^{k+R+1}_{\frac{(k-1)(k+2R)}{2}} \quad \text{con} \quad 1 \text{ p. } (R+1)\text{-}uplo.$$

2. *La* $(k-2)^{esima}$ *serie canonica delle curve* k*-gonali tipiche è una serie lineare* $g^{2(R+1)}_{(k+1)(R+1)}$ *di dimensione* $2(R+1)$ *e di ordine* $(k+1)(R+1)$.

Ciò si rileva immediatamente dalla formola generale data al n. 2 della (C. a. e s. sp.) sapendo che qui si ha $\rho_{k-3}=0$. Ma si può anche pervenire allo stesso risultato osservando che se le curve agg. $C^{m-k-1[=m-3-(k-2)]}$ segano la g^{R}_{kR}, il sistema delle C^{m-k} agg. deve segare una serie di ordine $kR+R+k+1=(k+1)(R+1)$, e che inoltre, valendo il punto $(R+1)$-*uplo* della curva $\frac{R(R+1)}{2}$ condizioni per le curve $C^{m-k(=R+1)}$ agg., il sistema di queste curve ha la dimensione eguale a $2(R+1)$.

3. Sapendo inoltre che ogni gruppo della g_k^1 vale 2 condizioni soltanto per una

qualunque C^{m-k} agg. (cfr. Introd.), risulta che per R gruppi della g_k^1 passano soltanto ∞^2 C^{m-k} agg., che segano ulteriormente la curva C_p^m in $k+R+1$ punti; dunque:

La serie residua della $(k-1)^{esima}$ *serie canonica* g_{kR}^R *rispetto alla* $(k-2)^{esima}$ *serie canonica è una serie lineare* g_{k+R+1}^2

Da cui risulta che:

1° *La serie segata su queste curve dalle rette del piano è completa* (cfr. n. 19 della C. a. e s. sp.).

2° *Le curve* k-*gonali tipiche sono la più semplice rappresentazione piana delle curve* k-*gonali di egual genere; sono rappresentazioni piane di se stesse.*

Per $R=0$ il teorema 3 rientra nel teorema 2.

4. Se $R \geq 1$, per $R-1$ gruppi della g_k^1 passerà un sistema di C^{m-k} agg. ∞^4, del quale ciascuna curva sega la C_p^m in $2k+R+1$ punti; dunque:

Nelle curve k-*gonali tipiche corrispondenti ai valori di* $R \geq 1$ *le curve agg.* C^{m-k} *che passano per* $R-1$ *gruppi della* g_k^1 *segano una serie lineare completa* g_{2k+R+1}^4.

Da ciò risulta ancora:

Ogni curva k-*gonale tipica, che abbia la* $(k-1)^{esima}$ *serie canonica di dimensione* $R \geq 1$, *è in corrispondenza univoca con una curva normale dello* (S_4) *(spazio lineare a* 4 *dimensioni) di ordine* $2k+R+1$, *e dello stesso genere* $\frac{(k-1)(k+2R)}{2}$.

A causa della condizione $R \geq 1$, parrebbero escluse da questa proprietà tutte le curve della prima colonna del quadro delle curve k-gonali tipiche (cfr. M. I.), le $C_{\frac{k(k-1)}{2}}^{k+1}$, che corrispondono al valore di $R=0$, e sono curve generali nel loro ordine, cioè prive di punti doppi. Però si può osservare che anche su queste curve esiste la g_{2k+R+1}^4, ne esistono anzi infinite, e sono date dai sistemi ∞^4 di coniche del piano che passano per un punto qualunque della curva. Sicchè possiamo allargare il teorema precedente in quest'altra forma:

Tutte le curve k-*gonali di* 1ª *specie sono rappresentabili mediante curve normali dello* (S_4) *di ordine* $2k+R+1$ *e dello stesso genere* $\frac{(k-1)(k+2R)}{2}$.

5. Analogamente si può notare che è vero il teorema:

Nelle curve k-*gonali tipiche corrispondenti ai valori di* $R \geq 2$, *la serie segata dalle* C^{m-k} *agg. che passano per* $R-2$ *gruppi della* g_k^1 *è una serie lineare completa* g_{3k+R+1}^6 *di ordine* $3k+R+1$, *di dimensione* 6.

E da questo risulta che:

Ogni curva k-*gonale tipica, che abbia la* $(k-1)^{esima}$ *serie canonica della dimensione* $R \geq 2$, *è in corrispondenza biunivoca con una curva normale dello* (S_6) *di ordine* $3k+R+1$ *e del genere* $\frac{(k-1)(k+2R)}{2}$.

Ecc. Ecc.

§ 2. — Nuovi teoremi sulle curve k-gonali di 2ª specie.

1. Rammentiamo brevemente che queste curve hanno, in funzione della gonalità k e della dimensione R del sistema di curve agg. minime C^{m-k-1}, i seguenti caratteri (cfr. M. II., § 2):

$$m = 2k + R \qquad d = k(k+R-1) + \frac{R(R-1)}{2}$$

$$p = (k-1)(k+R-1)$$

$$\rho_{k-2} = \frac{(k-1)(k-2)}{2} \qquad d - \rho_{k-2} = \frac{(k+R)(k+R-1)}{2} + (k-1)\,.$$

Sicchè si può dire che le curve k-gonali piane di 2ª specie sono delle curve $C^{2k+R}_{(k-1)(k+R-1)}$ con $k(k+R-1) + \frac{R(R-1)}{2}$ punti doppii che debbono essere punti base di un sistema ∞^R di curve dell'ordine $k+R-1$.

2. *La* $(k-2)^{esima}$ *serie canonica delle curve* k-*gonali di 2ª specie è una serie lineare* $g^{3+2R}_{(k+1)R+2k}$, *di dimensione* $3+2R$, *e di ordine* $(k+1)R+2k$.

Infatti, nel n. 1 del § 3 della M. II. si è dimostrato che le curve C^{m-k} agg. alle curve k-gonali di 2ª specie che passano per $R+1$ gruppi della g^1_k segano sulla curva C^m_p una serie lineare g^1_{m-k}, cioè una serie g^1_{k+R}, ma il passaggio di una qualunque C^{m-k} per ciascun gruppo della g_k^1 vale due condizioni soltanto, dunque il sistema di tutte le curve C^{m-k} agg. ha la dimensione $1+2(R+1) = 3+2R$, e l'ordine eguale a $k+R+(R+1)k = (k+1)R+2k$.

3. *a) La serie residua della* $(k-1)^{esima}$ *serie canonica, rispetto alla* $(k-2)^{esima}$ *serie canonica, è una serie lineare completa* g^3_{2k+R} *di dimensione* 3, *e di ordine* $2k+R$.

Infatti, se per $R+1$ gruppi della g_k^1 passano ∞^1 curve C^{m-k} agg. che segano la curva C^m in gruppi di $k+R$ punti, per R gruppi della g_k^1 ne passeranno ∞^3 che segano la curva C^m in gruppi di $2k+R$ punti.

Per $R=0$ questo teorema rientra nel precedente.

b) Un'immediata conseguenza del teorema suddetto è il seguente teorema:

In tutte le curve k-*gonali di 2ª specie la serie segata dalle rette del piano è incompleta ed è contenuta in una serie completa di dimensione* 3.

Si noti che questi due teoremi erano stati già dimostrati solo per le curve k-gonali di 2ª specie corrispondenti ai valori di $R=0$, $R=1$ *); ora risulta che valgono per qualunque valore di R.

c) Un'altra conseguenza del teorema *a*) è questa:

Nelle curve k-*gonali di 2ª specie* (*per* $k \geq 3$) *il sistema delle curve aggiunte di ordine* $m-4$ *ha costantemente la sovrabbondanza* ρ_1 *eguale ad* 1.

*) Cfr. Amodeo, M. II., n. 2 del § 4, n. 2 del § 5.

Questo teorema era stato dato *) sotto una forma che includeva la possibilità che il valore di ρ_1 potesse anche essere eguale a zero. Qui è precisato che $\rho_1 < 1$ non ha mai luogo.

Infatti si è dimostrato (n. 18 della C. a. e s. sp.) che: *Nell'ipotesi che le curve agg. minime ad una curva* C^m *siano le* $C^{m-3-(\alpha+\beta)}$, *la serie lineare segata dalle* C^β *del piano è specializzata* α *volte ed è contenuta in una serie completa di cui la dimensione* $\left(=\frac{\beta(\beta+3)}{2}+\rho_\beta\right)$ *supera la dimensione della serie segata da tutte le* C^β *del piano di tante unità quante ne rappresenta il numero che dà la sovrabbondanza delle* $C^{m-3-\beta}$ *agg. alla* C^m. Posto $\beta=1$, $\alpha=k-3$, e sapendo che la serie completa nella quale è contenuta quella segata dalle rette del piano è di dimensione 3, si ha $2+\rho_1=3$, quindi $\rho_1=1$.

4. *La sovrabbondanza* ρ_{k-3} *del sistema delle curve agg.* C^{m-k} *delle curve* k*-gonali di 2ª specie è* $\rho_{k-3}=\frac{(k-2)(k-3)}{2}$.

Infatti dalla formola (2_{bis} della (C. a. e s. sp.),

$$R_\alpha=\frac{N_\alpha}{2}-\delta_\alpha+\rho_\alpha\,,$$

ponendo $\alpha=k-3$, ed in luogo di R_{k-3}, N_{k-3} i valori che si hanno dal numero 2, ed in luogo di δ_{k-3}, il suo valore $\frac{(k-3)(k+R)}{2}$, si ha:

$$\rho_{k-3}=2R+3-\left(k+\frac{k+1}{2}R\right)+\frac{(k-3)(k+R)}{2}=\frac{(k-2)(k-3)}{2}\,.$$

5. Dal teorema precedente e dal teorema del n. 18 della (C. a. e s. sp.), posto $\beta=k-3$, $\alpha=1$, si ha che la dimensione della serie completa delle curve k-gonali di 2ª specie nella quale è contenuta la serie segata da tutte le C^{k-3} del piano è eguale a $\frac{(k-3)k}{2}+\rho_{k-3}=(k-3)(k-1)$.

Inoltre, avendo dimostrato (n. 7, C. a. e s. sp.) che:

Una serie segata dalle curve C^β *del piano sopra una curva* C^m *è specializzata* $\alpha-\beta$ *volte, se* $m-3-\alpha$ *è l'ordine delle curve aggiunte minime della* C^m, ne risulta, per i valori di $\alpha=k-2$, $\beta=k-3$, che la serie segata dalle C^{k-3} del piano sulle curve k-gonali di 2ª specie è specializzata 1 volta. Dunque:

La serie segata dalle curve C^{k-3} *del piano sulle curve* k*-gonali di 2ª specie (per* $k>3$) *è specializzata 1 volta, è incompleta ed è contenuta in una serie lineare completa di dimensione* $=(k-3)(k-1)$.

Analogamente si avrebbe che: *La serie segata dalle curve* C^{k-2} *del piano sulle curve* k*-gonali (per* $k>2$) *di 2ª specie è soltanto speciale* (specializzata 0 volte), *è incompleta, ed è contenuta in una serie completa di dimensione* $k(k-2)$.

6. Dalla esistenza della serie g^3_{2k+R} nelle curve k-gonali di 2ª specie, si deduce senz'altro il seguente teorema:

---

*) Cfr. Amodeo (C. a. e s. sp.) nota del n. 7.

Le curve k*-gonali di* 2^a *specie sono rappresentate da curve gobbe normali dello* (S_3) (spazio lineare a 3 dimensioni) *di ordine* $2k+R$ *e dello stesso genere* $(k-1)(k+R-1)$. Queste curve sono intersezione di un iperboloide F^2 con una superficie F^{k+R}, di ordine $k+R$, che ha comune con l'iperboloide F^2 R generatrici di uno stesso sistema *), e su di esse le due serie g^1_k e g^1_{R+k}, residue fra loro rispetto alla g^3_{2k+R}, sono segate rispettivamente dai due sistemi di generatrici dell'iperboloide F^2.

Proiettando queste curve gobbe da un punto arbitrario dello (S_3), esterno all'iperboloide F^2, si hanno le curve k-gonali piane che noi abbiamo direttamente costruite mediante speciali sistemi sovrabbondanti di curve **).

7. Se è $R\geq 1$, per $R-1$ gruppi della g_k^1 passa un sistema di curve agg. C^{m-k} che sega sulle curve k-gonali di 2^a specie una serie lineare g^5_{3k-R}, di dimensione 5, di ordine $3k+R$. Quindi:

Le curve k*-gonali di* 2^a *specie, che corrispondono ai valori di* $R\geq 1$ *sono rappresentabili pure mediante curve normali dello* (S_5) (spazio lineare a 5 dimensioni) *di ordine* $3k+R$ *e dello stesso genere* $(k-1)(k+R-1)$ ***).

Si noti che anche la curva C_1^4 della prima colonna del quadro delle curve k-gonali di 2^a specie (cfr. M. II.) è rappresentabile mediante una curva C^{3k-R} di un (S_5), perchè su questa esistono infinite g_6^5 segate dalle cubiche aggiunte che passano per due suoi punti.

8. In analogo modo si deduce che:

Le curve k*-gonali di* 2^a *specie che corrispondono ai valori di* $R\geq 2$ *sono rappresentabili pure mediante curve normali dello* (S_7) (spazio lineare a 7 dimensioni) *di ordine* $4k+R$, *dello stesso genere* $(k-1)(k+R-1)$.

Ecc. Ecc.

9. Vogliamo infine ricercare i diversi valori che ρ_α, al variare di α, assume nelle curve k-gonali di 2^a specie.

Limiteremo qui la ricerca, al caso di $R=0$, pel quale, come è noto (M. II., § 4), le curve sono del tipo $C^{2k}_{(k-1)^2}$ con $k(k-1)$ punti doppii distribuiti sopra una curva di ordine $k-1$, che è l'unica curva aggiunta di ordine $m-3-(k-2)$ che la curva C^{2k} possiede.

I $k(k-1)$ punti doppii della curva k-gonale sono la completa intersezione della curva agg. minima C^{k-1} e di una curva agg. C^k, di ordine k; quindi rispetto ad ogni curva C^{k+s}, di ordine $k+s$, con $k+s\leq(2k-1)-3$, che passa per essi, di questi punti sono indipendenti, pel noto teorema di Cayley, soltanto

$$k(k-1)-\frac{[2k-1-(k+s)-1][2k-1-(k+s)-2]}{2},$$

*) Cfr. C. Küpper, *Ueber* k*-gonale curven vom Geschlecht* p ; Sitz. ber. der kön. böhm. G. d.W., 14 giugno 1895.
Questa nota venne a nostra conoscenza, quando l'autore ce n'ebbe fatto dono, il 12 febb. 1896.

**) Cfr. Amodeo, M. II., §§ 4, 5, 6, 7, 8, 9, e *Sistemi lineari* ecc.

***) Questo teorema vale probabilmente per tutte le curve k-gonali di 2^a specie, comprese anche quelle che corrispondono ad $R=0$, ma per ora non ne ho una soddisfacente dimostrazione.

cioè:

$$k(k-1)-\frac{(k-s-2)(k-s-3)}{2}\,.$$

Quindi la sovrabbondanza di questi punti per il sistema di curve C^{k+s}, che passa per essi, è data da

$$\frac{(k-s-2)(k-s-3)}{2}$$

sempre che sia $k+s\leq 2k-4$; ma per $m=2k$ è $k+s\leq m-4$, dunque la formola precedente vale esattamente per tutte le curve aggiunte alla C^{2k} k-gonale di 2ª specie di ordini inferiori ad $m-3$, e quindi vale anche per *tutte* le curve aggiunte, poichè si deve tener presente che per le curve aggiunte di ordini $m-1$, $m-2$, $m-3$ i punti doppii della curva sono sempre indipendenti.

Si ha dunque che per le curve C^{k+1} aggiunte la sovrabbondanza $\rho_{k-4}=\frac{(k-3)(k-4)}{2}$

» » » C^{k+2} » » » $\rho_{k-5}=\frac{(k-4)(k-5)}{2}$

» » » C^{k+3} » » » $\rho_{k-6}=\frac{(k-5)(k-6)}{2}$

ecc., e per le curve agg. $C^{m-4[=k+(k-4)]}$ si conferma che è $\rho_1=1$

Conchiudendo:

Per le curve k-*gonali di 2ª specie* $C^{2k}_{(k-1)^2}$ *le sovrabbondanze dei successivi sistemi di curve aggiunte a partire da quello di ordine* m—3 *sono le seguenti:*

$$\rho_0=0\,,\ \rho_1=1\,,\ \rho_2=3\,,\ \rho_3=6\,,\ldots,\ \rho_{k-4}=\frac{(k-3)(k-4)}{2}\,,\ \rho_{k-3}=\frac{(k-2)(k-3)}{2}\,,\ \rho_{k-2}=\frac{(k-1)(k-2)}{2}\,.$$

10. Dal teorema precedente si deducono immediatamente i seguenti altri teoremi:

La serie segata sulle curve k-*gonali di 2ª specie* $C^{2k}_{(k-1)^2}$ *dalle coniche del piano è contenuta in una serie lineare completa* g^{8}_{4k} *di dimensione* 8;

quella segata dalle cubiche del piano è contenuta in una serie lineare completa g^{15}_{6k} *di dimensione* 15;

quella segata dalle quartiche del piano è contenuta in una serie lineare completa g^{24}_{8k} *di dimensione* 24;

ecc.;

quella segata dalle C^{β} *del piano è contenuta in una serie lineare completa* $g^{\beta(\beta+2)}_{2\beta k}$ *di dimensione* $\beta(\beta+2)$.

Queste serie sono specializzate rispettivamente $k-4$, $k-5$, $k-6$, ..., $k-2-\beta$ *volte.*

§ 3. — Caratteri generali delle curve k-gonali di 3^a, 4^a, 5^a, ..., s^{esima} specie.

I. *a*) I caratteri delle curve k-gonali di specie s^{esima} si ottengono ponendo $t = s - 1$ nelle formole date nella M. I., § 5, *c*); per esse si ha:

$$m \geq sk - (s - 2)$$

$$p = \frac{(k-1)(2m - sk - 2)}{2}$$

ed hanno un sistema lineare di curve aggiunte minime C^{m-k-1} di dimensione $R = m - sk + (s - 2)$ e di sovrabbondanza

$$\rho_{k-2} = \frac{s-1}{2}(k-1)(k-2) .$$

Il numero dei punti doppii a cui equivalgono i punti multipli della curva è dato da

$$d = \frac{(m-1)(m-2k)}{2} + \frac{s}{2} k(k-1)$$

e questi debbono necessariamente essere distribuiti sopra curve di ordine $m - k - 1$, e non sopra curve di ordine minore; il numero dei punti doppii della curva che si possono assegnare arbitrariamente è

$$d - \rho_{k-2} = \frac{(m-2)(m-2k)}{2} + \frac{(k-1)(k+2s-2)}{2} .$$

b) In funzione della gonalità k e della dimensione R della C^{m-k-1} agg. minime i sopracitati caratteri divengono i seguenti

$$m = sk + R - (s - 2)$$

$$p = \frac{(k-1)[sk + 2R - 2(s-1)]}{2}$$

$$d = (k-1)\left[\frac{s(s-1)k}{2} - \frac{(s-1)(s-2)}{2}\right] + \frac{R[R + 2(s-1)k - (2s-3)]}{2}$$

$$d - \rho_{k-2} = (k-1)\frac{(s-1)^2 k + (s-1)(4-s)}{2} + \frac{R[R + 2(s-1)k - (2s-3)]}{2}$$

e l'ordine delle ∞^R curve aggiunte minime è $(s-1)(k-1) + R$.

In queste formole, R può prendere tutti i valori interi positivi e il valore zero; e k tutti i valori interi positivi, se si vogliono includere anche le curve *unigonali*, cioè le curve *razionali*.

2. CARATTERI DELLE CURVE k-GONALI DI 3ª SPECIE.

$$m \geq 3k - 1 \qquad\qquad m = 3k + R - 1$$

$$p = \frac{(k-1)(2m-3k-2)}{2} \qquad\qquad p = \frac{(k-1)(3k+2R-4)}{2}$$

$$\rho_{k-2} = (k-1)(k-2)$$

$$d = \frac{(m-1)(m-2k)}{2} + \frac{3k(k-1)}{2} \qquad\qquad d = (k-1)(3k-1) + \frac{R(R+4k-3)}{2}$$

$$d - \rho_{k-2} = \frac{(m-1)(m-2k)}{2} + \frac{(k-1)(k+4)}{2} \qquad\qquad d - \rho_{k-2} = (k-1)(2k+1) + \frac{R(R+4k-3)}{2}$$

3. CARATTERI DELLE CURVE k-GONALI DI 4ª SPECIE.

$$m \geq 4k - 2 \qquad\qquad m = 4k + R - 2$$

$$p = (k-1)(m-2k-1) \qquad\qquad p = (k-1)(2k+R-3)$$

$$\rho_{k-2} = \frac{3}{2}(k-1)(k-2)$$

$$d = \frac{(m-1)(m-2k)}{2} + 2k(k-1) \qquad\qquad d = (k-1)(6k-3) + \frac{R(R+6k-5)}{2}$$

$$d - \rho_{k-2} = \frac{(m-1)(m-2k)}{2} + \frac{(k-1)(k+6)}{2} \qquad\qquad d - \rho_{k-2} = 9k(k-1) + \frac{R(R+6k-5)}{2}$$

4. CARATTERI DELLE CURVE k-GONALI DI 5ª SPECIE.

$$m \geq 5k - 3 \qquad\qquad m = 5k + R - 3$$

$$p = \frac{(k-1)(2m-5k-2)}{2} \qquad\qquad p = \frac{(k-1)(5k+2R-8)}{2}$$

$$\rho_{k-2} = 2(k-1)(k-2)$$

$$d = \frac{(m-1)(m-2k)}{2} + \frac{5}{2}k(k-1) \qquad\qquad d = (k-1)(10k-6) + \frac{R(R+8k-7)}{2}$$

$$d - \rho_{k-2} = \frac{(m-1)(m-2k)}{2} + \frac{(k-1)(k+8)}{2} \qquad\qquad d - \rho_{k-2} = (k-1)(8k-2) + \frac{R(R+8k-7)}{2}.$$

§ 4. — Quadro delle curve k-gonali di 3ª specie.

Curve k-gonali di 3ª specie	R = 0 $C^{3k-1}_{\frac{(k-1)(3k-4)}{2}}$	R = 1 $C^{3k}_{\frac{(k-1)(3k-2)}{2}}$	R = 2 $C^{3k+1}_{\frac{(k-1)3k}{2}}$	R = 3 $C^{3k+2}_{\frac{(k-1)(3k+2)}{2}}$	R = 4 $C^{3k+3}_{\frac{(k-1)(3k+4)}{2}}$	R = 5 $C^{3k+4}_{\frac{(k-1)(3k+6)}{2}}$	R = 6 $C^{3k+5}_{\frac{(k-1)(3k+8)}{2}}$	R = 7 $C^{3k+6}_{\frac{(k-1)(3k+10)}{2}}$		R $C^{3k+R-1}_{\frac{(k-1)(3k+2R-4)}{2}}$
Curve iperellittiche	C^{5}_{1}	C^{6}_{2}	C^{7}_{3}	C^{8}_{4}	C^{9}_{5}	C^{10}_{6}	C^{11}_{7}	C^{12}_{8}	. . . . .	C^{R+5}_{R+1}
» tri-gonali	C^{8}_{5}	C^{9}_{7}	C^{10}_{9}	C^{11}_{11}	C^{12}_{13}	C^{13}_{15}	C^{14}_{17}	C^{15}_{19}	. . . . .	C^{R+8}_{2R+5}
» 4-gonali	C^{11}_{12}	C^{12}_{15}	C^{13}_{18}	C^{14}_{21}	C^{15}_{24}	C^{16}_{27}	C^{17}_{30}	C^{18}_{33}	. . . . .	C^{R+11}_{3R+12}
» 5-gonali	C^{14}_{22}	C^{15}_{26}	C^{16}_{30}	C^{17}_{34}	C^{18}_{38}	C^{19}_{42}	C^{20}_{46}	C^{21}_{50}	. . . . .	C^{R+14}_{4R+22}
» 6-gonali	C^{17}_{35}	C^{18}_{40}	C^{19}_{45}	C^{20}_{50}	C^{21}_{55}	C^{22}_{60}	C^{23}_{65}	C^{24}_{70}	. . . . .	C^{R+17}_{5R+35}
» 7-gonali	C^{20}_{51}	C^{21}_{57}	C^{22}_{63}	C^{23}_{69}	C^{24}_{75}	C^{25}_{81}	C^{26}_{87}	C^{27}_{93}	. . . . .	C^{R+20}_{6R+51}
» 8-gonali	C^{23}_{70}	C^{24}_{77}	C^{25}_{84}	C^{26}_{91}	C^{27}_{98}	C^{28}_{105}	C^{29}_{112}	C^{30}_{119}	. . . . .	C^{R+23}_{7R+70}
» 9-gonali	C^{26}_{92}	C^{27}_{100}	C^{28}_{108}	C^{29}_{116}	C^{30}_{124}	C^{31}_{132}	C^{32}_{140}	C^{33}_{148}	. . . . .	C^{R+26}_{8R+92}
» 10-gonali	C^{29}_{117}	C^{30}_{126}	C^{31}_{135}	C^{32}_{144}	C^{33}_{153}	C^{34}_{162}	C^{35}_{171}	C^{36}_{180}	. . . . .	C^{R+29}_{9P+117}
» 11-gonali	C^{32}_{145}	C^{33}_{155}	C^{34}_{165}	C^{35}_{175}	C^{36}_{185}	C^{37}_{195}	C^{38}_{205}	C^{39}_{215}	. . . . .	$C^{R+32}_{10R+145}$
» 12-gonali	C^{35}_{176}	C^{36}_{187}	C^{37}_{198}	C^{38}_{209}	C^{39}_{220}	C^{40}_{231}	C^{41}_{242}	C^{42}_{253}	. . . . .	$C^{R+35}_{11R+176}$
» 13-gonali	C^{38}_{210}	C^{39}_{222}	C^{40}_{234}	C^{41}_{246}	C^{42}_{258}	C^{43}_{270}	C^{44}_{282}	C^{45}_{294}	. . . . .	$C^{R+38}_{12R+210}$
» 14-gonali	C^{41}_{247}	C^{42}_{260}	C^{43}_{273}	C^{14}_{286}	C^{45}_{299}	C^{46}_{312}	C^{47}_{325}	C^{48}_{338}	. . . . .	$C^{R+41}_{13R+247}$
» 15-gonali	C^{44}_{287}	C^{45}_{301}	C^{46}_{315}	C^{47}_{329}	C^{48}_{343}	C^{49}_{357}	C^{50}_{371}	C^{51}_{285}	. . . . .	$C^{R+44}_{14R+287}$
. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . . .	. . . . .

§ 5. — Quadro delle curve k-gonali di 4ª specie.

Curve k-gonali di 4ª specie	R=0 $C^{4k-2}_{(k-1)(2k-3)}$	R=1 $C^{4k-1}_{(k-1)(2k-2)}$	R=2 $C^{4k}_{(k-1)(2k-1)}$	R=3 $C^{4k+1}_{(k-1)2k}$	R=4 $C^{4k+2}_{(k-1)(2k+1)}$	R=5 $C^{4k+3}_{(k-1)(2k+2)}$	R=6 $C^{4k+4}_{(k-1)(2k+3)}$	R=7 $C^{4k+5}_{(k-1)(2k+4)}$		R $C^{4k+R-2}_{(k-1)(2k+R-3)}$
Curve iperellittiche	C^{6}_{1}	C^{7}_{2}	C^{8}_{3}	C^{9}_{4}	C^{10}_{5}	C^{11}_{6}	C^{12}_{7}	C^{13}_{8}	. . . .	C^{R+6}_{R+1}
» tri-gonali	C^{10}_{6}	C^{11}_{8}	C^{12}_{10}	C^{13}_{12}	C^{14}_{14}	C^{15}_{16}	C^{16}_{18}	C^{17}_{20}	. . . .	$C^{R+10}_{2(R+3)}$
» 4-gonali	C^{14}_{15}	C^{15}_{18}	C^{16}_{21}	C^{17}_{24}	C^{18}_{27}	C^{19}_{30}	C^{20}_{33}	C^{21}_{36}	. . . .	$C^{R+14}_{3(R+5)}$
» 5-gonali	C^{18}_{28}	C^{19}_{32}	C^{20}_{36}	C^{21}_{40}	C^{22}_{44}	C^{23}_{48}	C^{24}_{52}	C^{25}_{56}	. . . .	$C^{R+18}_{4(R+7)}$
» 6-gonali	C^{22}_{45}	C^{23}_{50}	C^{24}_{55}	C^{25}_{60}	C^{26}_{65}	C^{27}_{70}	C^{28}_{75}	C^{29}_{80}	. . . .	$C^{R+22}_{5(R+9)}$
» 7-gonali	C^{26}_{66}	C^{27}_{72}	C^{28}_{78}	C^{29}_{84}	C^{30}_{90}	C^{31}_{96}	C^{32}_{102}	C^{33}_{108}	. . . .	$C^{R+26}_{6(R+11)}$
» 8-gonali	C^{30}_{91}	C^{31}_{98}	C^{32}_{105}	C^{33}_{112}	C^{34}_{119}	C^{35}_{126}	C^{36}_{133}	C^{37}_{140}	. . . .	$C^{R+30}_{7(R+13)}$
» 9-gonali	C^{34}_{120}	C^{35}_{128}	C^{36}_{136}	C^{37}_{144}	C^{38}_{152}	C^{39}_{160}	C^{40}_{168}	C^{41}_{176}	. . . .	$C^{R+34}_{8(R+15)}$
» 10-gonali	C^{38}_{153}	C^{39}_{162}	C^{40}_{171}	C^{41}_{180}	C^{42}_{189}	C^{43}_{198}	C^{44}_{207}	C^{45}_{216}	. . . .	$C^{R+38}_{9(R+17)}$
» 11-gonali	C^{42}_{190}	C^{43}_{200}	C^{44}_{210}	C^{45}_{220}	C^{46}_{230}	C^{47}_{240}	C^{48}_{250}	C^{49}_{260}	. . . .	$C^{R+42}_{10(R+19)}$
» 12-gonali	C^{46}_{231}	C^{47}_{242}	C^{48}_{253}	C^{49}_{264}	C^{50}_{275}	C^{51}_{286}	C^{52}_{297}	C^{53}_{308}	. . . .	$C^{R+46}_{11(R+21)}$
» 13-gonali	C^{50}_{276}	C^{51}_{288}	C^{52}_{300}	C^{53}_{312}	C^{54}_{324}	C^{55}_{336}	C^{56}_{348}	C^{57}_{360}	. . . .	$C^{R+50}_{12(R+23)}$
» 14-gonali	C^{54}_{325}	C^{55}_{338}	C^{56}_{351}	C^{57}_{364}	C^{58}_{377}	C^{59}_{390}	C^{60}_{403}	C^{61}_{416}	. . . .	$C^{R+54}_{13(R+25)}$
» 15-gonali	C^{58}_{378}	C^{59}_{392}	C^{60}_{406}	C^{61}_{420}	C^{62}_{434}	C^{63}_{448}	C^{64}_{462}	C^{65}_{476}	. . . .	$C^{R+58}_{14(R+27)}$
. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . . .

§ 6. — Quadro delle curve k-gonali di 5ª specie.

Curve k-gonali di 5ª specie	R=0 $C^{5k-3}_{\frac{(k-1)(5k-8)}{2}}$	R=1 $C^{5k-2}_{\frac{(k-1)(5k-6)}{2}}$	R=2 $C^{5k-1}_{\frac{(k-1)(5k-4)}{2}}$	R=3 $C^{5k}_{\frac{(k-1)(5k+2)}{2}}$	R=4 $C^{5k+1}_{\frac{(k-1)5k}{2}}$	R=5 $C^{5k+2}_{\frac{(k-1)(5k+2)}{2}}$	R=6 $C^{5k+3}_{\frac{(k-1)(5k+4)}{2}}$	R=7 $C^{5k+4}_{\frac{(k-1)(5k+6)}{2}}$		R $C^{5k+R-3}_{\frac{(k-1)(5k+2R-8)}{2}}$
Curve iperellittiche	C^{7}_{1}	C^{8}_{2}	C^{9}_{3}	C^{10}_{4}	C^{11}_{5}	C^{12}_{6}	C^{13}_{7}	C^{14}_{8}	. . . .	C^{R+7}_{R+1}
» tri-gonali	C^{12}_{7}	C^{13}_{9}	C^{14}_{11}	C^{15}_{13}	C^{16}_{15}	C^{17}_{17}	C^{18}_{19}	C^{19}_{21}	. . . .	C^{R+12}_{2R+7}
» 4-gonali	C^{17}_{18}	C^{18}_{21}	C^{19}_{24}	C^{20}_{27}	C^{21}_{30}	C^{22}_{33}	C^{23}_{36}	C^{24}_{39}	. . . .	C^{R+17}_{3R+18}
» 5-gonali	C^{22}_{34}	C^{23}_{38}	C^{24}_{42}	C^{25}_{46}	C^{26}_{50}	C^{27}_{54}	C^{28}_{58}	C^{29}_{62}	. . . .	C^{R+22}_{4R+34}
» 6-gonali	C^{27}_{55}	C^{28}_{60}	C^{29}_{65}	C^{30}_{70}	C^{31}_{75}	C^{32}_{80}	C^{33}_{85}	C^{34}_{90}	. . . .	C^{R+27}_{5R+55}
» 7-gonali	C^{32}_{81}	C^{33}_{87}	C^{34}_{93}	C^{35}_{99}	C^{36}_{105}	C^{37}_{111}	C^{38}_{117}	C^{39}_{123}	. . . .	C^{R+32}_{6R+81}
» 8-gonali	C^{37}_{112}	C^{38}_{119}	C^{39}_{126}	C^{40}_{133}	C^{41}_{140}	C^{42}_{147}	C^{43}_{154}	C^{44}_{161}	. . . .	C^{R+37}_{7R+112}
» 9-gonali	C^{42}_{148}	C^{43}_{156}	C^{44}_{164}	C^{45}_{172}	C^{46}_{180}	C^{47}_{188}	C^{48}_{196}	C^{49}_{204}	. . . .	C^{R+42}_{8R+148}
» 10-gonali	C^{47}_{189}	C^{48}_{198}	C^{49}_{207}	C^{50}_{216}	C^{51}_{225}	C^{52}_{234}	C^{53}_{243}	C^{54}_{252}	. . . .	C^{R+47}_{9R+189}
» 11-gonali	C^{52}_{235}	C^{53}_{245}	C^{54}_{255}	C^{55}_{265}	C^{56}_{275}	C^{57}_{285}	C^{58}_{295}	C^{59}_{305}	. . . .	$C^{R+52}_{10R+235}$
» 12-gonali	C^{57}_{286}	C^{58}_{297}	C^{59}_{308}	C^{60}_{319}	C^{61}_{330}	C^{62}_{341}	C^{63}_{352}	C^{64}_{363}	. . . .	$C^{R+57}_{11R+286}$
» 13-gonali	C^{62}_{342}	C^{63}_{354}	C^{64}_{366}	C^{65}_{378}	C^{66}_{390}	C^{67}_{402}	C^{68}_{414}	C^{69}_{426}	. . . .	$C^{R+62}_{12R+342}$
» 14-gonali	C^{67}_{403}	C^{68}_{416}	C^{69}_{429}	C^{70}_{442}	C^{71}_{455}	C^{72}_{468}	C^{73}_{481}	C^{74}_{494}	. . . .	$C^{R+67}_{13R+403}$
» 15-gonali	C^{72}_{469}	C^{73}_{483}	C^{74}_{497}	C^{75}_{511}	C^{76}_{525}	C^{77}_{539}	C^{78}_{553}	C^{79}_{567}	. . . .	$C^{R+72}_{14R+469}$
. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .

§ 7. — Teoremi generali sulle curve k-gonali di 3ª, 4ª, 5ª,... specie e in generale sulle curve di s^{esima} specie.

1. *La* $(k-2)^{esima}$ *serie canonica delle curve* k*-gonali di specie* s^{esima} *è una serie lineare completa di cui la dimensione è uguale a* $2R+s+1$ *e l'ordine è*

$$k(R+s)+R-(s-2) .$$

È facile ottenere l'ordine di questa serie o applicando direttamente la formola (2 della (C. a. e s. sp.) oppure tenendo conto che essendo la $(k-1)^{esima}$ serie canonica di ordine kR, l'altra deve avere l'ordine eguale a $kR+m$ e quindi eguale a

$$k(R+s)+R-(s-2) .$$

Non è altrettanto facile ottenere la dimensione di detta serie, la conoscenza della quale è della più alta importanza per poter procedere nello studio delle curve k-gonali; per essa abbiamo inutilmente tentate tutte le vie di dimostrazioni analoghe a quelle impiegate per i casi particolari di $s=1, 2$. Per pervenirci premetteremo il seguente teorema.

2. *La serie residua della* $(k-1)^{esima}$ *serie canonica di una curva* k*-gonale di* s^{esima} *specie rispetto alla* $(k-2)^{esima}$ *serie canonica è una serie* $g^{s+1}_{sk+R-(s-2)}$ *di dimensione* $s+1$, *di ordine* $sk+R-(s-2)$.

Già sappiamo che il teorema è vero per $s=1, 2$, poichè si è dimostrato che questa serie residua è nei due casi citati rispettivamente una g^2_{k+R+1} e una g^3_{2k+R}.

Ora esamineremo prima il caso di $s=3$.

Si è visto che (§ 1, n. 4) le curve k-gonali tipiche $C^{k+R+1}_{\frac{(k-1)(k+2R)}{2}}$ sono riferibili univocamente a curve k-gonali dell'ordine $2k+R+1$, dello stesso genere e normali di uno (S_4). Se l'ordine ed il genere di queste curve normali dello (S_4) si esprimono in funzione di un numero R' legato ad R dalla relazione

$$R=(k-2)+R'$$

(con ciò si suppone che debba essere $R\geq k-2$) essi diventano rispettivamente:

$$3k+R'-1 \qquad \frac{(k-1)(3k+2R'-4)}{2} ;$$

cosicchè in funzione di R' la curva k-gonale normale dello (S_4) ha per simbolo

$$C^{3k+R'-1}_{\frac{(k-1)(3k+2R'-4)}{2}} .$$

Se questa curva si proietta da una retta arbitraria dello (S_4) su un piano, si ha una

curva piana k-gonale, di ordine $3k+R'-1$, di genere $\frac{(k-1)(4k+2R'-4)}{2}$ che è quindi (§ 3, n. 2) una curva k-gonale di 3ª specie, che ha la dimensione del sistema delle curve aggiunte minime eguali ad R'.

Dunque *fra le curve* k-*gonali tipiche, che hanno eguale ad* R *la dimensione del sistema delle curve aggiunte minime, e le curve* k-*gonali di 3ª specie, che hanno eguale ad* R′ *la dimensione del sistema delle curve aggiunte minime, vi è corrispondenza biunivoca; e propriamente le curve della diagonale principale del quadro delle curve* k-*gonali tipiche* (cfr. M. I.) *corrispondono biunivocamente alle curve della stessa gonalità della prima colonna del quadro delle curve* k-*gonali di 3ª specie; le curve tipiche della linea parallela alla diagonale principale che comprende come prima curva la* C^4_2 *corrispondono biunivocamente alle curve di 3ª specie della seconda colonna*; ecc. ecc.

In tal modo le curve trigonali di 1ª specie C^5_5, C^6_7, C^7_9, C^8_{11}, ..., sono in corrispondenza biunivoca rispettivamente colle curve trigonali di terza specie C^8_5, C^9_7, C^{10}_9, C^{11}_{11}, ..., le curve 4-gonali di 1ª specie C^7_{12}, C^8_{15}, C^9_{18}, C^{10}_{21}, ..., sono in corrispondenza biunivoca rispettivamente colle curve 4-gonali di 3ª specie C^{11}_{12}, C^{12}_{15}, C^{13}_{18}, C^{14}_{21},...; ecc., ecc.

Ma le curve k-gonali di 1ª specie posseggono una serie lineare completa g^4_{2k-R+1} di dimensione 4 e di ordine $2k+R+1$, la quale nelle curve dello (S_4) che le rappresentano è segata da tutti gli (S_3) dello (S_4) ed è in funzione di R' di ordine $3k+R'-1$; dunque le curve k-gonali di 3ª specie $C^{3k+R'-1}_{\frac{(k-1)(3k+2R'-4)}{2}}$ posseggono una serie $g^4_{3k+R'-1}$ lineare completa; e, siccome questa contiene la serie lineare incompleta segata da tutte le rette del piano, essa è la serie lineare residua della $(k-1)^{esima}$ serie canonica rispetto alle $(k-2)^{esima}$ serie canonica segata da tutte le curve C^{m-k} agg. di ordine $2k+R'-1$ che passano per R' gruppi della g^1_k.

Risulta dunque che (rappresentando nuovamente con R la dimensione delle curve agg. minime):

Nelle curve k-*gonali di 3ª specie la serie residua della* $(k-1)^{esima}$ *serie canonica rispetto alla* $(k-2)^{esima}$ *serie canonica è una* g^4_{3k+R-1} *di dimensione* 4 *di ordine* $3k+R-1$.

3. Da questo teorema risulta che: tutte le curve agg. C^{m-k} di ordine $m-k$, che passano per $R-1$ (per $R\geq 1$) gruppi della g^1_k, segano sulle curve k-gonali di 3ª specie una serie lineare completa g^6_{4k+R-1}, perciò le curve k-gonali di 3ª specie che corrispondono al valore di $R\geq 1$ sono anche rappresentabili mediante curve normali dello spazio a 6 dimensioni (S_6) di ordine $4k+R-1$ di genere $\frac{(k-1)(3k+2R-4)}{2}$.

È interessante però notare che anche la curva k-gonale di 3ª specie C^5_1, che corrisponde ai valori di $k=2$, $R=0$, è rappresentabile egualmente. Poichè (§ 3, n. 2) questa curva iperellittica ha 5 punti doppi distribuiti su una conica e su di essa le curve aggiunte di ordine 4, che passano per 3 punti arbitrarii della curva, segano sempre una g^6_7 che è appunto una g^6_{4k+R-1}.

Se l'ordine ed il genere delle curve normali dello (S_6) si rappresentano in funzione di un numero R' legato al numero R dalla relazione

$$R=(k-2)+R'$$

queste curve saranno di ordine $5k+R'-3$, e del genere $\frac{(k-1)(5k+2R'-8)}{2}$, ed inoltre saranno curve k-gonali. Se si proiettano queste curve da un (S_3) arbitrario dello (S_6), che non passi per alcun punto della curva, sopra un (S_2) si otterranno come proiezioni delle curve piane k-gonali di 5^a specie (§ 3, n. 4). Dunque:

Fra le curve k-*gonali di* 3^a *specie, che hanno eguale ad* R *la dimensione del sistema delle curve agg. minime, e le curve* k-*gonali di* 5^a *specie, che hanno eguale ad* R' *la dimensione del sistema delle loro curve agg. minime, vi è corrispondenza biunivoca; e propriamente le curve della diagonale principale del quadro delle curve* k-*gonali di* 3^a *specie* (§ 4) *corrispondono biunivocamente alle curve della stessa gonalità della prima colonna del quadro delle curve* k-*gonali di* 5^a *specie* (§ 6), *ecc. ecc.*

In tal modo le curve trigonali di 3^a specie C_7^9, C_9^{10}, C_{11}^{11}, C_{13}^{12}, ..., sono in corrispondenza biunivoca rispettivamente colle curve trigonali di 3^a specie C_7^{12}, C_9^{13}, C_{11}^{14}, C_{13}^{15}, ...; le curve 4-gonali di 3^a specie C_{18}^{13}, C_{21}^{14}, C_{24}^{15}, C_{27}^{16}, ..., sono in corrispondenza biunivoca con le curve 4-gonali di 5^a specie C_{18}^{17}, C_{21}^{18}, C_{24}^{19}, C_{27}^{20}, ..., ecc. ecc.

Con ragionamento analogo al precedente possiamo conchiudere:

Nelle curve k-*gonali di* 5^a *specie la serie residua della* $(k-1)^{esima}$ *serie canonica rispetto alla* $(k-2)^{esima}$ *serie canonica è una* g^6_{5k+R-3}, *di dimensione* 6 *di ordine* $5k+R-3$.

4. In analogo modo si dimostrerebbe che fra le curve k-gonali di specie 5^a e quella di specie 7^a vi è corrispondenza biunivoca, e quindi:

Nelle curve k-*gonali di* 7^a *specie la serie residua della* $(k-1)^{esima}$ *serie canonica rispetto alla* $(k-2)^{esima}$ *serie canonica è una serie lineare completa* g^8_{7k+R-5}, *di dimensione* $7+1$, *di ordine* $7k+R-5$; ecc. ecc.

Quindi il teorema del n. 2 è dimostrato per le curve k-gonali di specie *dispari*.

5. Abbiam visto, nel n. 8 del § 2, che le curve k-gonali di 2^a specie, che corrispondono ai valori di $R>1$, più la curva C_4^4 iperellittica, sono rappresentabili mediante curve normali dello (S_5), di ordine $3k+R$, e di genere $(k-1)(k+R-1)$.

Se l'ordine ed il genere di queste curve normali si esprimono in funzioni di un numero R' legato al numero R dalla solita relazione

$$R=(k-2)+R'$$

essi saranno rispettivamente espressi da

$$4k+R'-2 \qquad\qquad (k-1)(2k+R'-3)\ .$$

Proiettando queste curve da un (S_2) arbitrario dello (S_5), che non abbia alcun punto comune colla curva, sopra un qualunque (S_2), si avranno per proiezioni delle curve k-gonali dell'ordine $4k+R'-2$, del genere $(k-1)(2k+R'-3)$, cioè curve k-gonali di 4^a specie (cfr. § 3, n. 3), che avranno la dimensione del sistema delle loro curve aggiunte minime eguale ad R'.

Dunque: *fra le curve* k-*gonali di* 2^a *specie, che hanno eguale ad* R *la dimensione del sistema delle curve aggiunte minime, e le curve* k-*gonali di* 4^a *specie, che hanno eguale ad*

R′ *la dimensione delle curve agg. minime, vi è corrispondenza biunivoca; e propriamente le curve della diagonale principale del quadro delle curve* k-*gonali di 2ª specie corrispondono biunivocamente alle curve della stessa gonalità della prima colonna del quadro delle curve* k-*gonali di 4ª specie, le curve di 2ª specie della linea parallela alla diagonale principale che comprende la curva* C_2^5 *corrispondono biunivocamente alle curve di 4ª specie della 2ª colonna del quadro*, ecc. ecc.

Cosicchè le curve trigonali di 2ª specie C^7_6, C^8_8, C^9_{10}, C^{10}_{12}, ..., sono in corrispondenza biunivoca rispettivamente con le curve trigonali di 4ª specie C^{10}_6, C^{11}_8, C^{12}_{10}, C^{13}_{12}, ...; le curve k-gonali di 2ª specie C^{10}_{15}, C^{11}_{18}, C^{12}_{21}, C^{13}_{24}, ..., sono in corrispondenza biunivoca rispettivamente con le curve 4-gonali di 4ª specie C^{14}_{15}, C^{15}_{18}, C^{16}_{21}, C^{17}_{24}, ...; ecc. ecc.

E siccome le curve k-gonali di 2ª specie posseggono una serie lineare completa g^5_{3k+R}, le curve k-gonali di 4ª specie dovranno avere una serie lineare completa $g^5_{4k+R'-2}$ che contiene come serie parziale la serie segata da tutte le rette del piano.

Rappresentando nuovamente con R la dimensione delle curve k-gonali di 4ª specie si ha:

Nelle curve k-*gonali di 4ª specie la serie residua della* (k—1)*esima serie canonica rispetto alla* (k—2)*esima serie canonica è una* g^5_{4k+R-2} *di dimensione* 5, *di ordine* 4k+R′—2.

6. In modo analogo a quello seguito nel n. 3 si dimostrerebbe che la detta serie residua nelle curve k-gonali di 6ª specie è una g^7_{6k+R-4}, nelle curve k-gonali di 8ª specie è una g^9_{7k+R-5}, ecc.; e così il teorema enunciato nel n. 2 è dimostrato per una specie qualunque.

7. Il teorema del n. 2 si può anche enunciare sotto la forma seguente:

a) La dimensione della serie lineare completa nella quale è contenuta la serie lineare segata da tutte le rette del piano sulla curva k-*gonale di specie* s *è eguale ad* s+1.

Del quale una conseguenza interessantissima è questa:

b) La sovrabbondanza ρ_1 *del sistema delle curve aggiunte di ordine* m—4 *di una curva algebrica di gonalità* k *e di specie* s *è costantemente eguale ad* s—1, *cioè è di una unità inferiore alla specie della curva algebrica.*

c) Sapendo che ogni gruppo delle g_k^1 *vale 2 condizioni per una qualunque* C^{m-k} *che passa per esso, dal teorema del n. 2 risulta vero il teorema enunciato nel n. 1.*

E per la medesima ragione è vero anche il seguente teorema:

d) La serie segata dalle curve agg. C^{m-k} *che passano per* R+1 *gruppi della* g_k^1 *è una serie* g^{s-1}_{m-k}; o in altre parole: *La dimensione del sistema delle curve agg.* C^{m-k} *che passano per* R+1 *gruppi delle* g_k^1 *è* s—1.

Il teorema precedente si può anche enunciare:

e) La serie residua della g_k^1 *rispetto alla* g_m^{s+1} *completa nella quale è contenuta la serie lineare* g_m^2 *segata da tutte le rette del piano è una serie* g^{s-1}_{m-k}.

8. La dimostrazione fatta per il n. 2 ci conduce anche ad enunciare la seguente proposizione, che è della più grande importanza per la semplificazione che apporta nello studio delle curve algebriche di gonalità k.

Una curva k-*gonale di* s^{esima} *specie è riferibile univocamente ad una curva* k-*gonale di* 2^a *specie o ad una curva* k-*gonale di* 1^a *specie, secondochè* s *è pari o è dispari.*

9. Conoscendo l'ordine e la dimensione delle $(k-2)^{esima}$ serie canonica possiamo colla formola $(2_{bis}$ della (C. a. e s. sp.) ottenere la sovrabbondanza ρ_{k-3} del sistema delle curve agg. C^{m-k} di una curva k-gonale di specie s^{esima}. Poichè dalla detta formola (cfr. pure § 2, n. 4) si ha:

$$\rho_{k-3}=R_{k-3}-\frac{N_{k-3}}{2}+\delta_{k-3}=2R+s-1-\frac{k(R+s)+R-(s-2)}{2}+\frac{k-3}{2}[(s-1)k+R-(s-2)]$$

ovvero

$$\rho_{k-3}=(s-1)\frac{(k-2)(k-3)}{2}.$$

Dunque:

La sovrabbondanza del sistema delle curve agg. C^{m-k} *di una qualunque curva algebrica di gonalità* k *e di specie* s *è* $\rho_{k-3}=(s-1)\dfrac{(k-2)(k-3)}{2}$.

10. Dal teorema precedente e con ragionamento analogo a quello seguito nel § 2, n. 5, si ha:

La serie segata dalle curve C^{k-3} *del piano sulle curve di gonalità* $k>3$, *di specie* s^{esima} *è specializzata 1 volta, è incompleta (eccetto che per* $s=1$*) ed è contenuta in una serie lineare completa di dimensione* $=(k-3)\dfrac{ks-2(s-1)}{2}$.

11. Noteremo qui, sol per poterli poi citare quando se ne presenterà l'occasione, i seguenti facili teoremi:

a) La serie residua della $(k-1)^{esima}$ *serie canonica rispetto alla* 1^a *serie canonica è una serie* $g_{(k-2)m}^{\frac{(k-2)(sk-s+2)}{2}}$ *lineare completa di ordine* $(k-2)m$ *e di dimensione* $\dfrac{(k-2)(sk-s+2)}{2}$.

La dimensione di questa serie è data infatti dalla somma

$$\frac{(k-2)(k+1)}{2}+\rho_{k-2}=\frac{(k-2)(k+1)}{2}+(s-1)\frac{(k-1)(k-2)}{2}.$$

b) La serie segata dal sistema delle curve aggiunte dell'ordine $m-3$ *che passano per* $R+1$ *gruppi della* g_k^1 *è una serie di ordine* $(k-2)m-k$ *e di dimensione* $\dfrac{k(k-3)}{2}s+(s-1)$.

12. Termineremo questa memoria coll'estendere a tutte le curve algebriche di gonalità k di specie s^{esima}, un teorema che il sig. Bobek dimostrò nel 1886 per le curve iperellittiche, e nel 1889 estese facilmente alle curve trigonali per la coincidenza delle curve C^{m-k} agg. colle curve agg. di ordine $m-3$, e che a gran fatica nella M. II., a noi riuscì di dimostrare per le curve algebriche di gonalità $k>3$ e di specie 2. La dimostrazione è la seguente *).

*) Si noti che questa dimostrazione è identica a quella di Bobek (*Ueber hyperelliptischen Curven*, Sitz. ber. v. Wien, 18 Marzo 1896; e *Ueber Dreischaarcurven*, Ibid., p. 142-173, 1889).

Siano $G_1, G_2, \ldots, G_s$ gli s gruppi della g_k^1 allineati con un punto qualunque O del piano della curva C_p^m di gonalità k e di specie s, e $t_1, t_2, \ldots, t_s$ siano i loro sostegni. Supposto che sia $R \geq s$, siano $G_{s+1}, G_{s+2}, \ldots, G_{R+1}$ altri $R+1-s$ arbitrarii gruppi della g_k^1 che supporremo variabili, e $t_{s+1}, t_{s+2}, \ldots, t_{R+1}$ i loro sostegni. Indichiamo con C_i^{m-k-1} la curva agg. di ordine minimo che passa per gli R gruppi G che hanno l'indice diverso da i. Al sistema ∞^{s-1} (n. 9, e) di curve agg. C^{m-k} che passa per i gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_3, \ldots, G_{R+1}$ appartengono le curve composte

$$C_1^{m-k} \equiv t_1 C_1^{m-k-1} \quad , \quad C_2^{m-k} \equiv t_2 C_2^{m-k-1} \quad , \quad \ldots \quad , \quad C_s^{m-k} \equiv t_s C_s^{m-k-1} \, ,$$

le quali tutte passano pel punto O comune alle rette $t_1, t_2, \ldots, t_s$. Queste curve inoltre sono tutte fra loro indipendenti *), cioè non appartengono ad un sistema di curve C^{m-k} di dimensione inferiore ad $s-1$, quindi il punto O è necessariamente un punto base del sistema ∞^{s-1} di curve C^{m-k}, e perciò per esso devono passare anche le curve

$$C_{s+1}^{m-k} \equiv t_{s+1} C_{s+1}^{m-k-1} \quad , \quad C_{s+2}^{m-k} \equiv t_{s+2} C_{s+2}^{m-k-1} \quad , \quad \ldots \quad , \quad C_{R+1}^{m-k} \equiv t_{R+1} C_{R+1}^{m-k-1} \, .$$

Ma non ci passano per ipotesi le rette $t_{s+1}, t_{s+2}, \ldots, t_{R+1}$, dunque devono passare per esso le curve $C_{s+1}^{m-k-1}, C_{s+2}^{m-k-1}, \ldots, C_{R+1}^{m-k-1}$, le quali, avendo l'indice $i > s$, passano per gli s gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_s$; e poichè si è supposto che i gruppi $G_{s+1}, \ldots, G_{R+1}$ siano variabili, queste curve rappresentano tutte le curve C^{m-k-1} che passano per i punti allineati col punto O. Dunque:

Tutte le curve agg. C^{m-k-1} *minime delle curve algebriche* C_p^m (*di gonalità* k, *di specie* s *e che corrispondono ai valori di* R $\geq$ s), *che passano per* s *gruppi della* g_k^1 *allineati con un punto* O *del piano della curva, passano anche pel punto* O.

Regge anche il teorema reciproco:

Tutte le curve agg. C^{m-k-1} *minime delle curve algebriche* C_p^m (*di gonalità* k, *di specie* s, *e che corrispondono ai valori di* R $\geq$ s), *che passano per un punto* O *del piano della curva e per* s $-$ 1 *gruppi della* g_k^1 *allineati col punto* O, *passano pure per l'*s*esima gruppo della* g_k^1 *allineato con* O.

Napoli, Luglio 1897.

---

*) Se le $C_1^{m-k}, \ldots, C_s^{m-k}$ non fossero indipendenti esisterebbero dei coefficienti a_i non tutti nulli per cui si avrebbe identicamente

$$a_1 t_1 C_1^{m-k-1} + a_2 t_2 C_2^{m-k-1} + \ldots + a_s t_s C_s^{m-k-1} = 0$$

e se le rette t_i si esprimono in funzione di due rette fisse $t' t''$ del fascio (O), cioè si pone $t_i = b_i t' - c_i t''$ si avrebbe identicamente

$$t' \sum a_i b_i C_i^{m-k-1} = t'' \sum a_i c_i C_i^{m-k-1} \, ,$$

e cioè

$$\sum a_i b_i C_i^{m-k-1} = t'' C_2^{m-k-2} \quad , \quad \sum a_i b_i C_i^{m-k-1} = t' C_3^{m-k-2}$$

il che importerebbe l'esistenza di una curva aggiunta di ordine inferiore al minimo, e ciò è assurdo.

INDICE

finita di stampare il dì 15 Gennaio 1898

Vol. IX, Serie 2.ª N.° 5.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

CONTRIBUTO ALLO STUDIO DEGLI *ACARODOMAZII*

MEMORIA

del dott. AURELIO DE GASPARIS

presentata nell'adunanza del dì 10 Luglio 1897.

Ben lunga ed importante è la letteratura degli acarodomazii e sarebbe un lavoro arduo esporre anche in breve tutti i lavori che ne trattano [1]).

Molte memorie si occupano della descrizione di singole forme e di queste non mi occuperò; altre d'indole generale trattano, da tutti i diversi punti di vista, questo interessante argomento.

Il Lundström [2]) nella sua magnifica monografia sugli acarocecidii, dopo avere esposti diversi criterii, pei quali crede poter deporre per un rapporto scambievole di benefìcii fra gli acari e le piante; e dopo aver descritto un gran numero di forme, mette in mostra la sua opinione sulla utilità degli acari per parte delle piante, ritenendo che le stesse usufruirebbero delle materie escrementizie lasciate dagli acari.

Basa questa sua opinione sull'osservazione della diminuzione successiva di tali sostanze negli acarodomazii e sopra fatti di quasi uguale entità osservati dal Beccari [3]) sulle piante fornite di mirmicodomazii (nei quali i diversi detritus, gli escrementi e le spoglie verrebbero utilizzati come materiale nutritivo).

Debbo a proposito di ciò osservare, che non ho mai notato la scomparsa degli escrementi nelle cavernicole; ho potuto constatare una rilevante diminuzione in volume, ma ho attribuito questo fatto, da principio, piuttosto che all'assorbimento per parte delle cellule che rivestono le cavernicole, alla perdita dell'acqua dovuta al disseccamento di tali sostanze.

Secondo l'opinione del Lundström, dell'Aurivillii [4]) e di altri, le piante trarrebbero profitto dagli acari per la distruzione delle spore appartenenti a specie nocive.

---

[1]) È però debito di giustizia accennare che la priorità nel campo di siffatte osservazioni è dovuta al Prof. Federico Delpino, il quale, nelle sue memorie sulle piante mirmecofile (1886) ha citato e discusso più esempi di piante acarofile.

[2]) Axel N., Lundström, *Natur und Bedeutung der Domatien.* Upsala 1887.

[3]) Beccari, *Piante ospitatrici*, ossia *piante formicarie della Malesia e della Papuasia.*

[4]) Dott. Car. Aurivillii, *Beobachtungen über Acariden aus den Blattern verschieder Baume.* Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups.

Per ciò che riguarda la presenza di spore nelle sostanze escrementizie ho fatto diverse analisi microscopiche di queste, e quasi costantemente ho trovato spore di muffe [1]), corpuscoli di clorofilla e svariate alghe; debbo però confessare che questo metodo non è esatto, poichè l'esame diretto del contenuto dell'apparecchio digerente degli acari [2]) è stato sempre completamente negativo e non ci ha mostrato, che piccolissimi granuli, corpuscoli di grasso ed altre sostanze; d'altra parte le spore le quali si trovano frammischiate fra alcune delle sostanze credute escrementizie, sono talmente ben conservate, che non vi può essere dubbio alcuno sulla loro provenienza; pare che invece di sostanze escrementizie, questi corpi cilindrici di un colorito nero, sieno aggregati di sostanze nutritive destinate agli acari molto giovani, i quali non si trovano ancora nello stato di servirsi pienamente del loro apparecchio boccale, ed allora la diminuzione di quelle sarebbe dovuta al consumo per parte dei piccoli acari.

Per ciò che riguarda la formazione degli acarocecidii, alcuni credono che questi organi siano direttamente prodotti dalle piante, altri sostengono che essi rappresentino una semplice reazione di tessuti.

Il Krasan [3]) offre un esempio, che ha una certa affinità colla formazione degli acarocecidii, a proposito d'insetti i quali possono produrre in una pianta delle formazioni simili ad altre, che si presentano come produzioni normali. Egli dimostra che l'ingrossamento e l'ispessimento della cupula, ed altre modificazioni, dipendono dalle punture degli Afidi.

Il Nägeli [4]) estende il concetto degli stimoli prodotti dalla puntura fino ad ammettere la spiegazione di formazioni fiorali complesse.

Gli esperimenti del Lundström sulle culture sterilizzate di diverse specie di piante acarofile hanno dimostrato che le piante, benchè mantenute in un ambiente nel quale non era possibile l'entrata degli acari, costantemente davano luogo alla formazione degli acarocecidii.

Lo stesso autore ha anche osservato che allontanando gli acari dalle foglie di alcune piante si aveva una graduale diminuzione di alcune cavernicole e finalmente la loro scomparsa.

Però pare che questi fatti non sieno sufficienti a distruggere l'opinione che gli acarocecidii sieno prodotti da una reazione dei tessuti ad uno stimolo.

Da un lato le formazioni prodotte dalla puntura dell'acaro sempre nello stesso punto per centinaia di migliaia di anni, possano finire per costituire un carattere costante della pianta; da un altro lato pare che la diminuzione e la scomparsa degli acarocecidii non sia un fatto costante; poichè ho ripetuto per lunghissimo tempo questi esperimenti sopra molte piante [5]), adoperando delle soluzioni destinate ad allontanare gli acari dalle foglie, ed esaminando continuamente le loro superficie non ho potuto notare nè la diminuzione delle cavernicole, nè la scomparsa dei peli.

---

[1]) Antennaria Capnodium.

[2]) Le analisi sono state fatte sul Tydeus foliorum e sul Gamasus vepallidus.

[3]) Franz Krasan, *Beiträgen zur Entwickelungsgeschichte der mitteleuropäischen Eichenformen* Engler's Jahrbücher. Band. VII, fasc. 1°, pag. 62.

[4]) Nägeli, *Mechanisch-physiologische Theorie der Abstammungslehre.*

[5]) Myrodia funebris, Laurus nobilis, Zanthoxylon Boungei etc.

Sono quindi venuto nell'opinione che gli acarocecidii possono rappresentare o un carattere ereditario trasmesso di generazione in generazione, o la trasformazione di un organo preesistente (come appresso dimostrerò), o finalmente una formazione recente prodotta dalla puntura.

Per ciò che riguarda l'utilità degli acari verso le piante, essendo la mia opinione diversa da quella degli altri osservatori, esporrò il risultato dei miei studii.

Il *Tydeus foliorum*, uno dei più comuni abitatori degli acarodomazii, erra continuamente sulla superficie della pagina inferiore delle foglie; si nutre, come ho potuto osservare centinaia di volte, perforando col suo rostro le cellule, le glandule superficiali dell'epidermide e rimanendo a succhiare per un tempo lunghissimo.

Il suo apparecchio boccale [1]) è d'altra parte perfettamente adattato per tale specie di nutrimento.

Occorre facilmente a chi si occupa dello studio di questi acari vedere, servendosi di un microscopio con un ingrandimento di circa ottanta diametri, il modo come questi artropodi si servono del loro apparecchio boccale per succhiare.

Seguendo nei loro movimenti questi animali, vediamo che di tratto in tratto si fermano, abbassando bruscamente il rostro sulla superficie delle cellule e, spingendo in avanti ed in basso le mascelle, perforano le superficie delle cellule colla estremità acuminata delle mandibule e per mezzo dell'appendice falcata mobile, della quale esse sono provviste, resta l'apparecchio boccale fisso sulla superficie delle foglie; restano in tale posizione per un tempo assai lungo, poscia ritirano l'apparecchio boccale e cominciano nuovamente ad errare.

Ciò che ho potuto notare, seguendo i loro costumi, è che abitualmente perforano le cellule dell'epidermide; ma quando di tratto in tratto capita l'occasione della presenza di piccole uova d'insetti, essi fanno anche uso del loro apparecchio boccale e ne succhiano il contenuto.

Su questo fatto richiamo l'attenzione, poichè pare che di ciò grandemente siano avvantaggiate le piante.

Nella pagina inferiore e superiore delle foglie si danno convegno più specie d'insetti, alcuni assolutamente, altri indirettamente nocivi.

Fra le Tripsidi; L'*Heliothrips haemorroidalis*, la *Phlaeotrips oleae etc.*, la *Thrips ulmifoliarum*, ed altre.

Fra gli Psoci: Il *Psocus quadripunctatus*, ed il *P. bipunctatus* ed altre.

Fra i Coccidi: il *Coccus oleae*, il *C. pomorum*, il *C. salicis*, l'*Aspidiotus nerii*, il *Diaspis rosae* ed il *D. pentagona*, il *Leconium hesperidum*, il *L. persicae*, il *L. quercus* ed il *L. vitis*, il *Ceroplastes caricae* ed il *C. rusci*, il *Dactylopius adoninum* ed il *D. citri*.

Le Tripsidi sono fornite di un apparecchio boccale succiante, poichè le mascelle

---

[1]) Il Prof. Berlese così descrive nella sua stupenda opera sugli acari italiani, l'apparecchio boccale del Tydeus:

Rostrum subapicale, conicum; palpis longiusculis, semper inferne reflexis, articulis primo et tertio minoribus, articulo secundo et quarto longioribus, hoc cylindrico, apice setuligero.

Mandibulae digito mobili falcato, anterius porrecto, fixo, mucroniformi, acuto.

superiore ed inferiore formano, colla loro riunione, una tromba. Sono insetti dannosissimi alle piante, poichè imbrattano la pagina inferiore delle foglie con una quantità enorme di escrementi, i quali lentamente si raccolgono, sotto forma di sfera, all'estremità dell'addome; a poco a poco questa sfera aumenta di volume fino a raggiungere in grandezza quasi la metà del corpo, ed acquista intanto un colorito piceo; maltrattano la superficie delle foglie colle loro esiziali punture, e l'epidermide si dissecca e si sfalda in piccoli frammenti.

Gli escrementi sono utilizzati da questi animali per loro difesa; poichè queste sostanze arrecano danno agli acari, i quali parte restano invischiati in tali sostanze e muoiono, parte debbono abbandonare la loro dimora sulla foglia, che resta letteralmente coverta dagli escrementi dei Tripsidi e sulla cui superficie la deambulazione degli acari diventa difficile, a causa dei frammenti dell'epidermide sfaldata, che si attaccano alle loro zampe.

Bisogna però notare che la distruzione delle uova per parte degli acari è di una utilità immensa per la pianta, poichè così il numero delle Tripsidi resta assai limitato ed i loro danni assai menomati; e solamente quando condizioni opportune favoriscono lo sviluppo delle Tripsidi, finisce il vantaggio arrecato dagli acari. I Coccidii recano grande danno alle piante col loro succhiamento e sono ben difesi, poichè, dopo l'accoppiamento, nelle femine scompare ogni traccia di segmentazione del corpo, scompare anche qualsiasi rudimento di zampe ed il piccolo essere si riduce ad una sorta di scudo, più o meno convesso, attaccato al vegetale per mezzo del rostro e sotto cui si trovano protette le uova, quando le larve non nascono per generazione vivipara [1]).

Gli Psoci si cibano di sostanze animali e vegetali ed ànno apparecchio boccale trituratore; mandibule forti a bordo interno dentellato e mascelle munite di un pezzo uncinato di cui la punta è provvista di due denti; essi non producono direttamente danno alle piante, ma arrecano benefizio alle Tripsidi e danno agli acari.

Gli Psoci costruiscono larghe reti di sottilissimi fili fra le nervature della pagina inferiore delle foglie e bozzoli intorno alle uova; questi fili rendono impacciata la progressione degli acari ed in molti casi impossibile, tanto più che tra i fili restano raccolti gli escrementi dei Tripsidi; ho inoltre ragione di credere che gli Psoci uccidano i giovani acari [2]).

Pare si potrebbe conchiudere che l'azione delle Tripsidi e degli Psoci sia reciprocamente rivolta contro gli acari. Ed infatti in moltissimi casi, come per esempio nel *Viburnum Tynus*, solamente quando l'azione degli Psoci si unisce a quella delle Tripsidi gli acari debbono abbandonare la loro dimora.

Non di rado le foglie danneggiate dalle Tripsidi, perdendo le loro opportune condizioni di vitalità, offrono un terreno assai adatto allo sviluppo di un gran numero di funghi, i quali aumentano sempre più il danno già iniziato dalle Tripsidi.

---

[1]) Griffini, *Imenotteri, Nevrotteri, Pseudoneurotteri, Ortotteri e Rincoti italiani*. Pag. 631.

[2]) Recentemente, osservando la pagina inferiore delle foglie della Coccoloba laurifolia, ho potuto constatare che anche le uova degli Psoci possono essere danneggiate dagli acari. Sopra 15 uova osservate insieme agli acari cinque solamente furono punte; la loro superficie, che nello stato naturale appare irridescente, dopo qualche giorno si presentava raggrinzita ed infine l'uovo era profondamente alterato.

Pare dunque, che l'azione difensiva degli acari sia maggiormente rivolta contro le Tripsidi, e menomamente ed in singoli casi contro gli altri insetti maggiormente difesi, come gli Psoci, le cui uova sono ordinariamente protette dal bozzolo, ed i Coccidii le cui uova sono ricoperte dallo scudo.

La loro azione si mostrerebbe anche benefica per la distruzione delle spore, le quali unite ad altre sostanze formerebbero il nutrimento dei piccoli acari.

Gli acarocecidii possono originarsi o per trasformazione di un organo preesistente direttamente, o per reazione dei tessuti alla puntura degli acari, o finalmente per carattere trasmesso.

Nel primo caso e nel terzo gli acarocecidii sono visibili nelle foglie durante i primi tempi dello sviluppo; nel secondo caso pare che vengano in evidenza in un tempo postumo.

Gli organi che si adattano ad acarocecidii sono a preferenza i nettarii; e queste osservazioni furono pubblicate, fin dal 1886, dall'illustre Prof. Delpino [1]).

Questi adattamenti si osservano assai bene nelle Bignoniacee, in alcune Leguminose, nelle Oleacee. In alcuni casi singoli sono squame, le quali in origine ànno affinità di struttura coi colleteri, che dopo la comparsa degli acari acquistano una speciale struttura che le rende adatte a formare un ricovero per gli stessi (Cussonia).

Gli accartocciamenti del margine, la comparsa dei peli, la formazione di cavernicole, di cui si può seguire lo sviluppo fin dalla loro origine (*Scindapsus*) sono sempre prodotti dalla reazione abnorme dei tessuti ad una sostanza irritante injettata.

Descriverò alcuni casi da me studiati, adatti a mettere in evidenza questi diversi fatti [2]).

Cussonia thyrsiflora.

Interessantissimi sono gli acarodomazii in questa specie; essi sono rappresentati da una corona duplice o triplice di squame di un colorito biancastro, giallo e qualche volta rossastro, all'apice del picciuolo (fig. 11, 12).

Esse non presentano una lunghezza maggiore di un millimetro e qualche volta, nei punti più elevati, di tre; il bordo è profondamente dentellato a denti irregolari, qualche rara volta ramificati; fra gli spazii compresi fra le lamelle gli acari trovano un ottimo ricovero.

Il numero degli acari abitatori di queste squame è enorme; se ne osservano delle grandi nidiate.

---

[1]) *Funzione formicaria nel regno vegetale*, nelle *Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, Serie IV, tomo VII, pag. 281 (Litrariacee), 305 (Margraviacee), 321 (Oleacee); tomo VIII, p. 612 (Bignoniacee); tomo X, pagg. 131-132 (Relazioni reciproche tra nettarii estranuziali, acarocecidii e collofori). La memoria è stata presentata all'Accademia suddetta, e letta addì 18 Aprile 1886.

[2]) Nelle diverse specie di frassini si osservano tutti i gradi di passaggio da una semplice insenatura longitudinale della rachide *(F. Ornus, excelsa etc.)* fino alla formazione di una cavernicola a sezione ellittica a due uscite, della lunghezza di quattro a cinque centimetri *(F. pubescens* ed altre).

Pare che in vicinanza di queste squame trovino le migliori condizioni pel loro nutrimento, poichè difficilmente se ne spostano.

In qualche altra specie affine ho notato alcune squame all'apice del picciuolo delle foglie in via di sviluppo; ma queste squame spariscono in seguito. Le foglie adulte sono percorse da grosse specie d'acari, i quali non hanno dimora stabile.

Le squame nella Cussonia si osservano nello sviluppo primitivo delle foglie ed appariscono sotto forma di cellule allungate, riunite verso la parte inferiore e libere nella parte superiore; esse terminano con rigonfiamenti sferici, perfettamente simili a collofori. Alle volte le terminazioni sono ramificate, ma sempre terminate da cellule sferiche. Pare che in questo periodo le squame non offrano condizioni opportune per gli acari, poichè facilmente restano invischiati sulle superficie di queste squame.

È evidente in questo caso l'adattamento di organo affine ai collofori in organo acarofilo.

Catalpa Bungei.

In questa specie si osserva un passaggio da un organo formicario ad un organo acarofilo. Nell'ascella delle grandi nervature e delle nervature secondarie colle principali, si osservano depressioni, in alcuni casi nettamente visibili anche nella pagina superiore; la superficie delle nervature in corrispondenza di simili depressioni è ricoperta di papille nettarifere molto piccole, le quali attraggono le formiche; le depressioni sono abitate dal Tydeus foliorum.

Le papille ànno forma sferica e rilevata o assai depressa; disseccandosi appariscono di un colore giallo o rosso bruno.

Acacia dealbata.

Gli acarodomazii ànno la figura di tubercoli sferici e sono disposti successivamente e con grande regolarità alla base dei picciuoli secondarii; il loro diametro raggiunge appena la lunghezza di un millimetro (fig. 1, *a*, *b*).

Questi tubercoli sono cavi e forati superiormente; il foro può misurare il diametro di 20 centesimi di millimetro; la profondità è di un millimetro, la larghezza interna di circa mezzo millimetro.

Cominciano a comparire nelle foglie molto giovani, che appena possono misurare la lunghezza di due centimetri e mezzo a tre ed ànno allora l'aspetto di piccole spaccature a labbra di un verde cereo; in prosieguo il bordo si solleva lentamente ed allora appaiono come tubercoli lateralmente schiacciati.

Da principio l'apertura è larga ed è lunga, triangolare od ellittica, poscia diventa circolare.

Le cavernicole sono abitate dal Tydeus foliorum.

Il Lundström così descrive queste cavernicole: « Acacia dealbata hat längs der Rhachis auf der Oberseite eine Reihe gewohnlich rother Grübchen: Diese sind indessen am öftesten umbewohnt, so viel ich habe finden konnen ». È chiaro però, che gli esemplari studiati dall'Autore non presentavano le migliori condizioni di sviluppo.

Dall'esame comparativo dello sviluppo dei nettarii estranuziali nelle famiglie delle Leguminose risulta chiaro, che questi acarodomazii siano nettarii trasformati in acarocecidi.

Capsidium chilense.

Si osservano sulla pagina inferiore delle foglie rare cavernicole, la cui apertura è cinta da un tessuto di cellule allungate, disposte cogli assi longitudinali parallelamente al bordo dell'apertura.

Queste cavernicole si osservano verso la base delle foglie in punti variabili; sul fondo presentano piccoli nettarii.

Il passaggio di un organo mirmecofilo ad un organo acarofilo è assai evidente in questa specie e sulle due successive.

L'illustre prof. Delpino si è già occupato di questo fatto in una delle sue prime memorie sulla funzione mirmecofila.

Bignonia heterophylla.

Grosse cavernicole disposte a breve distanza dalla rachide; la bocca di queste cavernicole è piuttosto larga e cinta da cellule allungate. Nel fondo si osservano piccoli nettarii fungiformi o clipeati, spesso a bordo rilevato. Sono abitate in un numero scarso di acari (Tydeus).

Tecoma Manglesii.

Cavernicole nettarifere non dissimili dalle precedenti; ma ho trovato in questa maggior numero di spoglie di acari e qualche volta peli di protezione.

Colubrina nepalensis.

In questa specie esistono cavernicole piuttosto larghe ma poco profonde nella pagina inferiore delle foglie, nel punto dove la rachide incontra le nervature secondarie; queste cavernicole sono rivestite di peli non molto lunghi e sono abitate da un acaro; la loro forma è completamente circolare.

Gli acari vi abbondano e le cavernicole sono piene di spoglie ed altre sostanze.

La profondità delle cavernicole oscilla da uno a due millimetri per due a quattro millimetri di diametro.

Le foglie giovani non presentano tracce di cavernicole.

Phyllis nobla.

Gli acarocecidi sono appena visibili e siti all' ascella delle nervature secondarie; si presentano alla pagina inferiore come piccoli sollevamenti di circa mezzo millimetro di diametro, con una apertura alla sommità di forma circolare od ovoidale fornita generalmente di peli, dei quali alcuni rivolti verso l'interno ed altri verso l'alto; questo foro mette capo in una cavernicola di forma allungata, collocata nella parte mediana del mesofillo e fornita anche internamente di alcuni peli. Le cavernicole sono visibili anche nelle foglie molto giovani (fig. 9).

Crataegus oxyacantha.

Gli acarocecidii sono sotto forma di cavernicole situate all'ascella delle nervature secondarie; la profondità di queste cavernicole è di circa un millimetro, la loro apertura è generalmente nuda, qualche volta provvista di peli rari.

Cornus sericea.

Nella pagina inferiore delle foglie, negli angoli acuti formati dalla rachide colle nervature secondarie, sono piazzati gli acarocecidii.

Essi ànno forma di lunghissime tasche, le quali possono raggiungere la lunghezza di un centimetro.

La sezione di queste tasche è ellittica o triangolare.

La struttura di queste tasche è rimarchevole. Nella parte rivolta verso la pagina superiore trovasi un tessuto collenchimatico a cellule piccole con forti ispessimenti; le parti laterali ed il fondo sono pieni di papille a superficie scabra, più rare verso le superficie laterali, serratissime verso il fondo. In mezzo a queste papille si osservano, di tratto in tratto, dei peli di forma clavata a superficie irta di piccoli rilievi. Non mi è riuscito di osservare l'origine di queste tasche.

Elaeodendrum orientale.

Acarocecidii siti generalmente all'ascella delle nervature secondarie, rappresentati da cavernicole basse, con fori piuttosto larghi provvisti di piccoli peli; il bordo del foro è qualche volta arrotondato e nudo. I più grandi acarocecidii sono collocati all'ascella delle nervature secondarie; oltre di questi esistono, lungo la rachide, delle serie di piccole cavernicole a foro piccolo mai provvisto di peli; sulla pagina superiore non si osservano rilievi.

Sembrano questi acarocecidii di data assai recente e prodotti direttamente dalla puntura degli acari; come si può osservare studiando lo sviluppo delle foglie.

Myrodia funebris.

Acarocecidii formati da magnifiche cavernicole site nell'angolo formato fra le nervature secondarie colla rachide e fra le nervature secondarie colle terziarie; è uno dei casi più manifesti di uno sviluppo straordinario di acarocecidii (fig. 3, 13, 13 *bis*, 14).

L'apertura delle cavernicole è larga e protetta da cespugli di peli rigidi, unicellulari, alle cui basi si osservano cellule colorate in rosso bruno; la sezione della cavernicola è ellittica; all'osservazione microscopica appare tapezzata da una triplice fila di cellule piccole a contenuto privo di clorofilla. Sulla parete interna si osservano gruppi di cellule, il cui contenuto, trattato col reattivo di Fehling, dà la reazione del glucosio. Potrebbe questo caso rappresentare un passaggio assai remoto di organo formicario ad un organo acarofilo.

Zanthoxilon Boungei.

Acarodomazii formati da una serie doppia di peli sita lateralmente alla base della rachide delle foglioline centrali ed alle parti laterali interne delle altre due foglioline. (fig. 4, 16, 16 *bis*).

Questi peli sono pluricellulari, rigidi, con la cellula terminale a contenuto rosso essi occupano tutta la solcatura compresa fra la rachide ed il margine fogliare.

Nelle foglie assai giovani non si osservano tracce di questi peli e nel posto dove sono piazzati i peli si osservano glandule, a contenuto di aspetto glutinoso.

Sapindus inaequalis.

Assai rimarchevoli sono gli acarodomazii sulla pagina inferiore delle foglie di questa specie (fig. 5).

Si osservano nell'angolo formato fra la rachide e le nervature secondarie, verso la metà inferiore della foglia.

Sono sollevamenti dell'epidermide formanti una tenda di forma quasi triangolare.

Il sollevamento occupa tutto lo spazio compreso fra le nervature ed è aperto solamente verso la parte mediana per una scissura semilunare.

Si osservano solamente nelle foglie adulte.

Idesia polycarpa.

Gli acarodomazii si mostrano sotto forma di ciuffetti di peli; essi sono maggiormente sviluppati negli angoli compresi fra le grosse nervature; i peli sono abbondanti e riempiscono totalmente i solchi (fig. 2, 15, 15 *bis*).

Questi peli sono pluricellulari di 3 a 5 cellule, allungate e cilindriche, con superficie irta di piccoli rilievi piuttosto acuminati. Fra questi peli notiamo un enorme numero di papille, la cui parte superiore è di forma sferica ed anche irta di prominenze.

Solanum inaequale.

Piccoli cespuglietti di peli disposti fra la nervatura principale e le secondarie; sono abitate dal Tydeus foliorum (var. gialla) (fig. 10).

Cornus mascula.

Assai bene sviluppati sono gli acarocecidii di questa specie; si osservano principalmente all'ascella della nervatura secondaria nella pagina inferiore, come infossamenti di forma cuneata, in certi casi assai lunghi, così da raggiungere dieci millimetri.

Questi infossamenti sono protetti da un gran numero di peli assai sottili, e costituiscono un ritiro assai sicuro per gli acari, i quali vi prolificano in modo notevole.

Lagerstroemia indica.

Piccole insenature nell'angolo delle nervature secondarie, poco profonde e provviste di piccoli peli; pare che costituiscono una forma incipiente.

Spiraea opulifolia.

Cespuglietti di peli stellati di un colorito giallastro nell'angolo delle nervature secondarie colla rachide; sono abitati dal Tydeus foliorum (var. gialla).

Le foglie assai giovani ne sono sprovviste.

Cyteroxylon subpentandrum.

Piccoli cespuglietti di peli fra le nervature secondarie e la principale, nella pagina inferiore delle foglie.

Essi circondano una piccola depressione, visibile anche dal lato della pagina superiore delle foglie.

Maclura aurantiaca.

Piccoli cespuglietti di peli più o meno sviluppati, circondanti piccolissime insenature nell'angolo formato colla rachide dalle prime nervature secondarie; abbondano i Tydeus in questi ricoveri.

Nelle foglie molto giovani non sono visibili.

Grevia nitida.

Forti depressioni protette da numerosi peli nell'angolo delle nervature secondarie; esse sono osservabili anche dalla pagina superiore.

Nell'angolo ottuso formato fra le grosse nervature e la rachide esistono altri due acarocecidii, in certi individui molto sviluppati.

Makaya bella.

Magnifici cespuglietti di peli lunghi, rigidi, pluricellulari, colorati di un bel violetto oscuro, piazzati fra la rachide e le nervature secondarie; le cellule della parte basale sono incolori, la superficie leggermente scabra. Qualche volta la materia colorante è solamente limitata verso il punto di unione delle cellule.

Questi peli in certi punti si prolungano in serie lungo la rachide, per lo spazio di circa sette millimetri.

Questi acarodomazii sono abitati da un acaro di un colorito rosso e fra i peli si osservano uova di un colorito rosso carminio. Questi peli compariscono assai per tempo e si osservano anche nelle foglioline della lunghezza di sei a sette millimetri.

Rogiera cordata.

Alle due nervature basali due cavernicole acarofile, benchè piccolissime, bene elaborate.

Kerria japonica.

Piccoli cespuglietti di peli unicellulari nell'angolo delle nervature secondarie colla principale.

Rondeletia speciosa.

Piccoli cespuglietti di peli negli angoli delle nervature secondarie ed insenature piuttosto larghe verso la base; abitate dal Tydeus foliorum.

Betula populifolia.

Cespugli di peli rigidi unicellulari, abbastanza lunghi, rivolti verso la parte mediana. Questi peli occupano la parte mediana degli angoli delle nervature secondarie colle principali.

Pyrus torminalis.

Insenature negli angoli delle nervature secondarie colla principale, specialmente verso la metà e l'apice della pagina inferiore della lamina; queste insenature sono protette da peli.

Poivrea coccinea.

Piccoli cespuglietti di peli di un colorito fulvo si osservano nel punto d'incontro fra le nervature secondarie e la rachide; al di sotto dei peli si osserva inoltre una leggiera depressione appena visibile sulla pagina superiore. Pochi acari si osservano fra i peli. Le foglie giovani non presentano tracce di questi peli.

Salmea scandens.

Si osservano due specie di acarocecidii, all'ascella delle nervature secondarie si vedono cespuglietti di peli di un colorito tendente al roseo, abbastanza sviluppati; alla base della foglia una ripiegatura al margine.

Abelia chinensis.

Lungo la parte basale della rachide si notano due lunghe file di peli abbastanza folti rivolti perpendicolarmente alla superficie delle rachide; questi peli sono pluricellulari ed assai sottili e costituiscono un buon ricovero per gli acari (fig. 6).

Pterocarpus marsupium.

Gli acarocecidii sono formati in questa specie da una ripiegatura del margine sita sulla parte inferiore delle singole foglioline; il margine della ripiegatura è alquanto arrotondato e la cavità posta al di sotto della ripiegatura ha un diametro poco minore di un millimetro. Numerosi acari, spoglie ed uova si osservano al di sotto della ripiegatura (fig. 7).

Gli acarocecidii delle foglioline superiori sono assai più sviluppati, quelli delle foglicine basali sono appena visibili.

Strobilanthes sp.

Acarocecidii formati da una forte ripiegatura del margine alla parte basale della foglia; tale ripiegatura decorre per circa un centimetro e forma una specie di tubo in corrispondenza delle rachide.

L'acaro abitatore è il Tydeus foliorum.

Persea indica.

Negli individui osservati nel R. Orto Botanico di Napoli non si osservano i peli ai quali accenna il Lundström [1]; invece costantemente si notano delle rimarchevoli ripiegature del margine alla parte basale della lamina. Queste ripiegature limitano un condotto di circa due centimetri e mezzo; sono abitate dal Tydeus foliorum (var. gialla); alla sezione trasversale si notano rivolti verso l'interno del tubo dei peli unicellulari a pareti ispessite.

Nepomaria laurifolia.

Gli acarocecidii sono rappresentati da due ripiegature del margine basale della foglia; queste ripiegature decorrono per circa un mezzo centimetro ed interessano un mezzo millimetro dal margine; sono abitati da molti acari.

Zanthoxylon Pterota.

Sono rimarchevoli le ripiegature del margine che costituiscono una buonissima dimora d'acari.

Cornutia pyramidata.

Acarocecidii formati da una ripiegatura della parte slargata del picciuolo, che finisce per formare un tubo di quasi tre centimetri di lunghezza; la ripiegatura del lato sinistro è costantemente più accentuata (fig. 8).

La detta ripiegatura si osserva a sviluppo inoltrato.

---

[1]) Persea indica L. hat bewmonte Haarshopfchen in den Nervenwinkeln, aber auch hie und da am Mittelnerve.

Pistacia altaica.

Sono degni di nota in questa specie gli accartocciamenti lungo le espansioni laminari della rachide, nello spazio compreso tra le coppie delle foglioline.

Queste ripiegature occupano specialmente il terzo superiore e terminano a fondo cieco; sono abitate dal *Tydeus foliorum* (var. gialla).

Escallonia floribunda.

Forti ripiegature del margine della parte basale; queste ripiegature sono piuttosto brusche e nettamente visibili nella pagina superiore della foglia; la ripiegatura ha quasi una figura semilunare e costituisce un tubo aperto.

CONCLUSIONI

Dalle osservazioni fatte si ricava che:

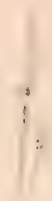
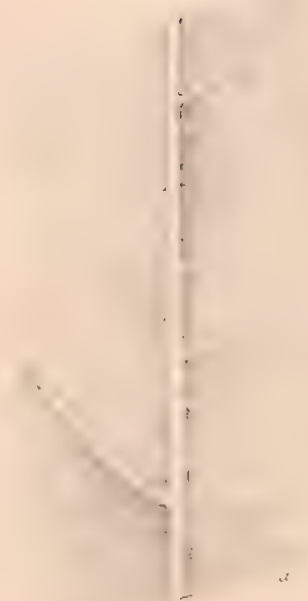
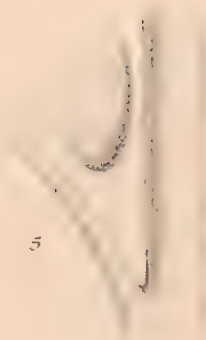
1° L'acaro riesce utile per la vita delle piante sotto un duplice aspetto, da un lato distruggendo le uova di alcuni insetti nocivi, da un altro raccogliendo le spore appartenenti a specie più o meno dannose.

2° Il benefico effetto esercitato dall'acaro cessa o diminuisce sensibilmente quando l'azione delle Tripsidi si combina a quella degli Psoci; ed allora le foglie restano doppiamente danneggiate dalle Tripsidi e dalle crittogame.

3° L'origine degli acarocecidii è doppia, in alcuni casi è dovuta alla trasformazione di un organo preesistente, in altri alla puntura diretta dell'acaro in un tempo prossimo o remoto.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — *Acacia dealbata*, *a.* foglie grandezza naturale. *b.* idem ingrandita.
» 2. — *Idesia polycarpa*, frammento della foglia.
» 3. — *Myrodia funebris*, *a.* frammento di foglie g. n.; *b.* idem ingrandita.
» 4. — *Zanthoxylon Boungei*, foglia.
» 5. — *Sapindus inaequalis*, foglia ingrandita (frammento × 80).
» 6. — *Abelia chinensis*, porzione di foglia.
» 7. — *Pterocarpus Marsupium*, parte basale di due foglie.
» 8. — *Cornutia pyramidata*, parte inferiore della foglia.
» 9. — *Phyllis nobla*, cavernicole × 80.
» 10. — *Solanum inaequale*, cespuglietti di peli con cavernicole.
» 11. — *Coussonia thyrsiflora*, squame acarofile.
» 12. — » » squama × 80.
» 13. — *a. Myrodia funebris.* Sezione di una cavernicola.
» 13bis. — *b.* » » Sezione più profonda.
» 14. — *Myrodia funebris.* Peli di rivestimento all'apertura della cavernicola.
» 15. — *(Idesia polycarpa)*, *a.* solco con peli × 80.
» 15bis. — *(Idesia polycarpa)*, *b.* peli e papille × 150.
» 16. — *a. Zanthoxylon Boungei.* Sezione del solco pilifero × 120.
» 16bis. — *b.* » » pelo × 150.

finita di stampare il dì 11 Febbraio 1898

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

RELIQUIE
DI GRANDI LAGHI PLEISTOCENICI
NELL' ITALIA MERIDIONALE

MEMORIA

DI

GIUSEPPE DE LORENZO

presentata nell'adunanza del dì 3 Luglio 1897,
e premiata dalla R. Accademia.

« ... ewiges Werden, endloser Fluss, gehört
zur Offenbarung des Wesens des Willens ».
SCHOPENHAUER

« Quando le rupi e le deserte valli
Precipite l'alpina onda feria
D'inudito fragor; quando gli ameni
Futuri seggi di lodate genti
E di cittadi romorose, ignota
Pace regnava; e gl'inarati colli
Solo e muto ascendea l'aprico raggio
Di febo e l'aurea luna ..... »
LEOPARDI

INTRODUZIONE

Al principio dello scorso anno l'Accademia delle scienze di Napoli propose, come tema per un concorso a premio, degli « *Studii geologici sui grandi laghi quaternari della Basilicata* », avvertendo, che l'autore della memoria concorrente al premio non si limitasse all'esame dei sedimenti che si depositarono in quei laghi e delle faune che vi vissero, ma tenesse anche conto delle relazioni esistenti, da un lato tra l'origine di essi laghi e il corrugamento appenninico terziario, e dall'altro tra la loro scomparsa e il modellamento dinamico esterno di quelle montagne.

Giacchè in questo tema si presuppone nota l'esistenza di grandi laghi quaternari in Basilicata, prima di passare alla trattazione di esso, è necessario ricordare brevemente quello che finora si è scritto su tale argomento.

Le prime notizie da me su ciò raccolte rimontano al 1780. In quell'anno Alberto Fortis, traversando il bacino del Mércure da Castelluccio a Lajno, osservò le marne bianchicce conchiglifere, che lungo quel tratto s'incontrano, ma naturalmente non s'accorse della natura lacustre di quei fossili e dei sedimenti che li contengono. Invece,

proseguendo poi il suo cammino da Mormanno a sud, verso Orsomarso, si accorse subito che la valle del Pantano, a sud-est di Mormanno, lunga 3500 m. e percorsa dal primo tratto del fiume Battiniero, rappresenta il fondo d'un antico lago; come chiaramente egli accenna nei suoi *Mineralogische Reisen durch Calabrien und Apulien* (non ho potuto procurarmi un esemplare della rara edizione italiana *Lettere geografico-fisiche sulla Calabria e la Puglia*, Napoli 1784) Weimar, 1788, pag. 42: «Von Mormanno aus nahm ich den Weg auf der Landstrasse durch das oben erwähnte Thal (von Battiniero), und gelangte zu einem kleinen runden Kessel, il Lago (wohl il Pantano) genannt, der rings umher mit Kalkbergen umschlossen war, und vor Alters Wasser gehalten zu haben scheint». Da questo punto trascorrono circa 55 anni senza che si abbia più alcuna chiara notizia sull'esistenza di antichi laghi nelle montagne della Lucania e del Bruzio, quantunque parecchi naturalisti a più riprese e per varie linee le percorressero. Lo stesso P. de Tchihatchoff nei viaggi, che formarono la materia del suo *Coup d'oeil sur la constitution géologique des provinces méridionales du royaume de Naples*, Berlin 1842, non s'accorse, egli, che di solito era acuto ed accurato nelle sue osservazioni, della presenza di laghi antichi nelle valli del Mércure, dell'Agri e di Diano, per le quali passò. Questi invece non erano precedentemente sfuggiti a Wolfgang Sartorius von Waltershausen, che, recandosi da Napoli in Sicilia, passò appunto per quei luoghi nel Settembre del 1835. Nella sua magnifica opera *Der Aetna*, Leipzig 1880, Bd. I, p. 32 e 34, egli accennò all'antica natura lacustre del Vallo di Diano e di Campotenese: «....bald darauf erreicht man die Höhe des Passes, von dem aus man ein weites, 6 Meilen langes Thal überblickt, welches sich von La Sala bis in die Nähe von Lagonegro estreckt. Dasselbe erinnert in mancher Weise an das Pinzgau; seine fast horizontale Sohle, welche mit Wiesen und Weiden überdeckt ist, trägt den Charakter eines vormaligen Landsees. Die hier und da vom alten Seeboden zurückgebliebenen Sümpfe werden wie bei Terracina durch Gräben abgeleitet. Die Seitenwände des Thales, die alten Seeufer, sind wohl kultivirt.......... Von hier senkt sich der Weg ein wenig bis zu einem hochgelegenen kesselförmigen Gebirgsthal (Campo Tenese), welches von hellgrauen, der Kreideformation zugehörigen, ganz vegetationslosen, öden Kalksteinrücken umschlossen wird. In demselben glaubte ich einen vormaligen, jetzt ins Trockene gelegten Rand eines Gebirgssees zu erkennen, dessen Gewässer nach Süden abgeflossen waren und hoch aufgehäufte Schuttmassen in die Ebene herabgeführt hatten.....». Anche a lui però sfuggì l'esistenza d'un altro, più grande, antico lago nel bacino del Mércure, pel quale era dianzi passato.

Nel Febbrajo del 1858 venne nell'Italia meridionale Robert Mallet a studiarvi il terremoto del 16 Decembre 1857 e nella sua classica opera sul *Great neapolitan Earthquake of 1857* (London, 1862) diede notizie chiare e precise sull'esistenza di antichi laghi in queste montagne, accennando alle cause probabili della loro origine e della loro scomparsa. Già alla prima vista ch'egli ebbe del Vallo di Diano, gli si rivelò la vera natura geologica di questo (op. cit., vol. I, p. 290 e 318): « a little further on I catch the first view down upon the grand Vallone di Diano, its plateau level as a sea, stretching away twenty-six miles to the south, and four or five miles wide, the Calore, folded along upon its central surface like a silver cord, losing itself in distance, and the mountains rising almost abruptly from the piano at either side, the further end closed in and surrounded, by pile over pile, of dark grey mountains and

snow-clad sierras, at last shutting out the horizon..... As I left Polla in the afternoon, the grand plain of the Vallone di Diano opened before me, level almost as a sea, of deep rich alluvial clays, which, as they approach the roots of the mountains that rise almost abruptly from the plain, assumes the form of a sort of sloping and almost continuous terrace all round the plain, elevated everywhere a few feet abowe its average surface, seldom rising more than 40 feet above it, frequently not half that. The outline section of this terrace, as it sweeps towards the centre of the plain, is that of a flat, hollow, parabolalike curve, wilh a slope varying from 15 to 1 to 60 to 1, or even still mor gradual, and suggests at once to the eye, the geologic conditions that produced the piano; once a large lake, or arm of the sea, which found egress for its waters at a level probably not lower than the summits of the Campestrina Pass. In that condition of things, the rich bed of mud was deposited, that now forms the basis of the valley and of its agricultural wealth. The great fracture, through which the Calore now finds its course *sub dio*, must have been subsequently formed, and through it the lake was drained down to the level of its marginal terrace. Its subsequent progress of desiccation must have been gradual, and dependent upon the rate of erosive deepening of the river at its north extremity; and for ages it must have remained a shallow and probably pestilential lake, of above 20 miles in length and 4 or 5 miles wide. The total difference of level now, between the water of the Calore at Polla and at the junction of the Peglia with it at the estreme southern end, is said not to exceed 6 or 7 feet, or only 3 inches to the mile. The marginal terrace round the plain contains numerous fragments of limestone, some angular, many more or less rounded. But the great clay central bed scarcely presents a pebble until high up toward the southern end of the valley, where the washings of the hill-side torrents disclose coarse gravel aud boulders also, embedded in it ». Oltre questa breve e precisa descrizione del Vallo di Diano Mallet diede anche nella stessa opera parecchie accurate sezioni dei sedimenti del finitimo antico lago dell'Agri, sulle quali avrò occasione di tornare nel corso di questo lavoro.

Dopo il viaggio di Mallet oltre un ventennio di silenzio si stese di nuovo su questo argomento e solo nel susseguente periodo di tempo, compreso tra il 1879 e il 1896, varî autori (De Giorgi, Bruno, Deecke, De Lorenzo, De Angelis, Böse e Cortese) hanno dato sugli antichi laghi dell'Italia meridionale delle notizie isolate, che saranno esposte nel corso di questo lavoro, a misura che si parlerà dei singoli casi da essi annunziati o descritti.

Fin qui non si hanno che notizie ed osservazioni sopra località isolate, senza alcun principio generale, che le tenga insieme unite e rivolte a uno scopo. La prima idea di riunire in un'unica categoria questi grandi laghi quaternari, di farne risalire l'origine a una medesima causa efficiente e di spiegarne la scomparsa in un modo generale, si trova esposta negli *Studi di geologia nell'Appennino meridionale* di G. De Lorenzo (Atti Academia d. Scienze di Napoli, S. 2ª, vol. VIII, 1896), che avrò anche più volte occasione di citare qui appresso. A pag. 97 di questo lavoro è detto: « In questa seconda fase del diastrofismo terziario si sono formati, oltre etc....., dei sedimenti di acque salmastre e lacustri, originàtisi durante tutto il periodo di emergenza, a causa di grandi bacini di reliquato che il mare, nel suo movimento negativo, abbandonava nelle conche prodotte dai movimenti orogenici ». A pag. 102: « Ho già detto far parte delle

rocce sedimentarie della seconda fase diastrofica terziaria dell'Appennino meridionale, oltre i depositi marini, anche dei sedimenti di origine salmastra e lacustre; e infatti, quando nell'aurora dei tempi postpliocenici il movimento di emergenza aveva fatto discendere il livello del mare a 600-700 metri sull'attuale, e lo spostamento negativo della linea di spiaggia pur sempre continuava, perdurando fino al giorno d'oggi, è naturale, che delle grandi masse d'acqua marina si raccogliessero nei bacini e nelle conche, formate per il primo movimento orogenico terziario e modellate dalla denudazione prepliocenica, e, aumentandosi poi il sollevamento, rimanessero legate al mare, di cui prima facevano parte integrante, solo mediante un canale di scolo od emissario. Queste reliquie di mare, addolcite a poco a poco dalle acque che scendevano abbondantissime dai monti circostanti, si cangiarono gradatamente in bacini di acque salmastre e divennero poscia delle masse di acqua dolce, dando così origine a dei grandi laghi quaternarî, i quali poi, col tempo, hanno lasciato nei loro sedimenti, nelle faune in questi contenute e negli effetti meccanici da essi prodotti, le prove della loro passata esistenza». E a pag. 116 finalmente: «Nelle pagine precedenti, parlando dei terreni sedimentarî pliocenici e pleistocenici, ho mostrato, che quando nell'ultima fase di emergenza il livello del mare, al principio dell'epoca pleistocenica, era giunto al di sotto dei 700 metri circa d'altezza sul mare attuale, grandi tratti di esso rimasero imprigionati nei bacini prodotti delle deformazioni della crosta terrestre e si costituirono dei veri laghi di reliquato, che s'andarono mano a mano addolcendo e che poi, continuando sempre il movimento negativo della linea di spiaggia, si vuotarono del tutto mediante gli emissari che li legavano al mare». Così dunque in questo lavoro è riconosciuto come un fatto, confortato da numerosi esempî, la generale esistenza nell'Appennino meridionale di antichi grandi laghi, ed è chiaramente posta la questione sulla loro genesi e la loro scomparsa: a me non rimane, che studiare alcuni di questi laghi, esaminare i fenomeni da cui la loro esistenza fu accompagnata e indagare quali furono le cause efficienti della loro origine e della loro fine.

Di questi antichi laghi vi ha nell'Italia meridionale numero grande e sorta svariatissime per genesi, evoluzione e grandezza; da piccoli bacini, larghi e lunghi poche diecine di metri, a grandi laghi che, come il Vallo di Diano, raggiungono e passano i 150 chm. q. di superficie, in modo da emulare i grandi laghi alpini lombardi, come il Lago Maggiore, quello di Como e di Iseo. Naturalmente il mio studio si restringe a questi grandi laghi, le cui reliquie sono ora rappresentate dal bacino di Baragiano, dal Vallo di Diano, dal Vallo dell'Agri, da quello del Mércure e dalla Valle del Noce. In essi possono distinguersi varî tipi geologici: da quel bacino che, come il Vallo di Diano, finì di svuotarsi completamente quasi in epoca storica e di cui i sedimenti sono quasi del tutto intatti, a un ultimo termine della serie, in cui, come nella Valle del Noce, solo pochi e scarsi lembi di sedimenti, scampati alla denudazione, e delle pallide terrazze marginali indicano l'esistenza in quei luoghi di un antico bacino lacustre.

Sul Vallo di Diano, per lo stato poco avanzato di erosione dei suoi sedimenti, poco c'è da aggiungere a quello che ne scrissero Waltershausen e Mallet e che è stato più sopra riportato. Qualche altra cosa sulla storia del bacino e sui suoi sedimenti ha scritto anche W. Deecke nelle sue *Bemerkungen über das neapolitanische Erdbeben im Jahre 1857* (Neues Jahrbuch f. Miner. etc., Jahrg. 1892, Bd. II, pag. 112): «Eine geologische Begehung des Gebietes von Caggiano und Auletta, sowie der Ketten von Polla

und Sala lehrt sofort, dass das untere Ende des Vallo di Diano ein typisches Bruchland ist. Dies über 30 km. lange, vom oberen Tanagro durchströmte Thal stellt nämlich einen schief zur Streichungslinie des Appennin eingesunkenen Graben vor. Seine Hauptrichtung ist NNW-SSO und schneidet die Ketten des Cilento und Mte Alburno unter etwa 30°. Seine Breite wechselt nicht unbedeutend; am grössten ist sie im Süden, wo auch das Thal am wenigsten eingeschnitten erscheint. Dann verschmälert es sich bei Padula und Sala bis auf 4 km., behält jedoch mit alleiniger Ausnahme bei Teggiano (Diano) diese Breite bis Polla bei, wo es plötzlich am Fusse der vom Mte Alburno herabziehenden Ketten mit stumpfer Spitze abschneidet. Die grösseren Unregelmassigkeiten seines Umrisses liegen fast alle auf der Westseite, wo bei Sassano und Teggiano durch ein Absetzen und Zurückspringen des Randbruches buchtenartige, ins Gebirge eingreifende Erweiterungen entstehen und die Breite bis zu 6000 m. steigt. In diesen Ausbuchtungen liegen Schollen von Pliocän und Macigno, welche durch ihre hügelige Oberfläche von dem ebenen Thalboden und durch ihren Anbau von dem kahlen, hinter ihnen schroff aufragenden Kalkfelsen abstechen. Sonst bauen den Untergrund der mittleren Thalebene, wie gelegentliche Einschnitte bei Anlage der Entwässerungscanäle dargethan haben, nur Schotter und alluviale Bildungen auf. Bei Polla sind unter dem Gerölle der Oberfläche ausgedehnte Torfmassen nachgewiesen, so dass wohl über die ehemalige Erfüllung des Beckens mit Wasser, also über die Existenz eines grösseren Sees im Vallo di Diano, keine Zweifel mehr obwalten können. Auch sind noch heute im mittleren Abschnitte des Thales die zwischen Sala und Teggiano, sowie die dicht oberhalb Polla gelegenen Wiesen so sumpfig, dass selbst die umfassende künstliche Entwässerung sie nicht trocken zu legen vermochte, vielmehr noch immer nach heftigeren Herbst-und Frühjahrsregen an diesen Stellen kleine Seen gebildet werden. Die Stauung des Wassers in dem Thalbecken geschah durch einen Gesteinsriegel, der sich vom Mte Alburno nach den Bergen von Caggiano und Atena quer vor dem Thal herüberzog. Erst seitdem einerseits die Vertiefungen hinter dieser Barrière durch die Wildbäche ausgefüllt sind, und seitdem andererseits der Abfluss des Sees, der jetzige Tanagro, sich in einer tiefen Schlucht (Gola) den Weg zum Sele eröffnete, hat die Trockenlegung begonnen. Dieselbe wurde ausserdem seit der Zeit der römischen Herrschaft von mehreren Regierungen durch Anlage von Canälen (Lagni) und Vertiefung des Flusses bei Polla beschleunigt, jedoch erfordert die beständige Schotterzufuhr von den Gehängen her unausgesetzte Aufmerksamkeit, um eine Zuschlämmung der Abflussgräben und des Tanagrobettes zu verhüten ». Dato dunque questo stato di cose, il Vallo di Diano è quello dei grandi laghi quaternarî dell'Italia meridionale, che presenta meno interesse degli altri dal punto di vista della loro storia geologica.

Siccome poi il bacino di Baragiano si trova in condizioni quasi identiche a quelle del bacino del Mércure, io lo lascerò per ora da parte, riducendo la trattazione di questo argomento a tre tipi principali e caratteristici, che rappresentano e riassumono completamente la storia dei nostri laghi. I tre tipi sono:

I. Lago dell'Agri. I sedimenti, quasi intatti nella parte alta della valle, sono largamente e profondamente incisi nella parte inferiore, senza però che l'erosione abbia raggiunto i terreni più antichi, che formano il fondo del bacino. Questo lago quindi costituisce lo stadio immediatamente successivo a quello rappresentato dal Vallo di Diano.

II. Lago del Mércure. La denudazione è molto progredita: i sedimenti sono da per tutto profondamente erosi, al punto che in qualche parte sono anche denudate e incise le rocce più antiche costituenti il fondo del bacino. Quasi nello stesso stadio si trova la conca di Baragiano.

III. Lago del Noce. Ultimo stadio della serie denudativa. I sedimenti sono stati quasi interamente denudati e solo qua e là ne avanzano alcuni lembi, che, insieme alle terrazze della sponda, restano a testimoni dell'antico lago: gli stessi terreni del fondo sono largamente denudati e profondamente incisi. Per poco ancora che la denudazione progredisca, non resterà più traccia alcuna dell'antico bacino lacustre.

Dopo aver così partitamente studiato le reliquie lasciateci da ciascuno dei principali laghi pleistocenici dell'Italia meridionale, potrò trarre delle conclusioni sui rapporti esistenti, da un lato tra l'origine di essi laghi e il corrugamento appenninico terziario, e dall'altro tra la loro scomparsa e il modellamento dinamico esterno delle nostre montagne.

I.

LAGO DELL'AGRI

§ 1.

Topografia, leggende, letteratura.

I sedimenti dell'antico lago dell'Agri si stendono da 40° 14′ a 40°25′ di latitudine nord e da 3° 16′ a 3° 33′ di longitudine orientale dal meridiano di Monte Mario (Roma), occupando per una superficie di circa 140 chm. q. la parte alta della valle dell'Agri, da Marsico Nuovo fino a Sarconi, Spinoso e Montemurro.

Uno sguardo generale su tal parte della valle si ottiene dall'alto della collina su cui siede Saponara; e non esito ad affermare, che questa veduta è da porsi tra le più belle, pittoresche e suggestive, che offre la parte continentale dell'Italia meridionale. A nord-ovest la valle si dilunga e si perde assottigliandosi verso i monti lontani di Brienza; a nord invece gli strati calcarei e silicei del gruppo del monte Vulturino (m. 1836) si innalzano in ampie volute verso il cielo e restano difesi dal nudo, gigantesco baluardo del monte di Viggiano (m. 1725), che verso la valle precipita in erti scaglioni, mentre a oriente si perde gradualmente nelle dolci colline argillose e arenacee di Montemurro e di Spinoso; a sud-est un lungo succedersi di colline ondeggianti, dietro le quali si disegna con linee taglienti e s'inarca l'aspro dorso del monte Alpe (m. 1906); a sud e a sud-ovest s'assiepano montagne boscose, che si dilungano innalzandosi e s'adergono finalmente nelle cime nevose del Sirino, campeggianti sul fondo remoto; sotto gli occhi s'allarga il piano, coperto di boschi, di seminati e di vigneti, risonante di muggito d'armenti e allegrato dai cori dei mietitori e delle vendemmiatrici, mentre sotto il fulgore del sole l'Agri solca il piano come una grande fascia d'argento; sicchè il dolce e tranquillo, e pur grandioso spettacolo, ricorda tutta l'intima poesia naturale condensata nel verso oraziano:

Laudaturque domus, longos quae prospicit agros.

E pure questi vigneti, che producono ancora i Lagarina vina nascentia prope Grumentum, già lodati da Plinio nella sua Storia naturale, son piantati sopra sedimenti lacustri; e, in un tempo geologicamente non molto lontano, su tutta la gran valle si stendeva un lago, che per area e per forma era quasi identico all'attuale lago di Como; val quindi la pena di vedere se, oltre che nei dati geologici, esiste nel linguaggio, nella leggenda e nella storia qualche ricordo di questo antico lago.

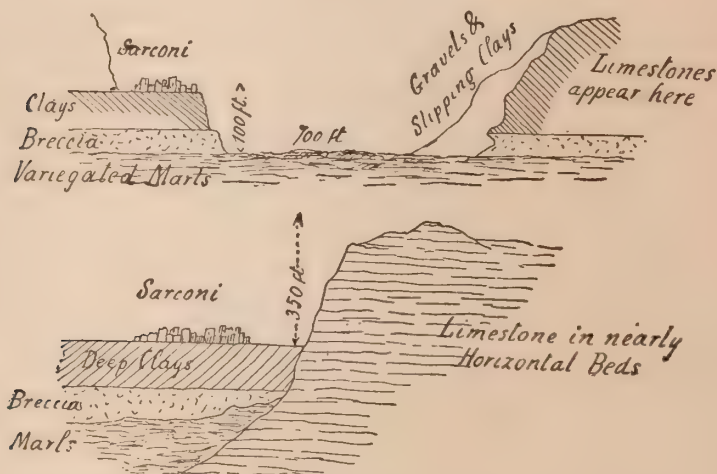
Nessuna traccia etimologica ho trovato, che rammenti un tale stato di cose; mentre più appresso per gli altri laghi vedremo, che esistono ancora in alcuni vocaboli delle radicali, che accennano alla presenza di bacini lacustri in luoghi attualmente asciutti; qui bisognerebbe ricercare il significato preciso della parola Grumentum, che il Niebuhr, come è noto, ritenne di origine pelasgica.

A una quasi leggenda invece hanno dato luogo i numerosi avanzi di elefanti, che si rinvengono nei dintorni di Saponara, e che sono generalmente da quegli abitatori ritenuti come appartenenti agli elefanti perduti da Annibale in quei luoghi. Livio infatti (Lib. XXVII, cap. 40 e 41) parla della sconfitta, che quivi Annibale subì dal console Claudio Nerone; e la sua esatta descrizione è per noi molto pregevole, perchè mostra, che i luoghi, nei quali la battaglia avvenne, di poco si son cambiati fino al giorno d'oggi. Annibale s'era col suo campo addossato alle mura di Grumentum, aveva sulla sinistra la nuda collina calcarea su cui ora sorge Saponara e di fronte, a 1500 passi di distanza, l'esercito romano: «Grumenti moenibus prope iniunctum videbatur Poenorum vallum: quingenti passi intererant. Castra punica ac romana inter iacebat campus; colles imminebant nudi sinistro lateri Carthaginiensium, dextro Romanorum; neutris suspecti, quod nihil silvae neque ad insidias latebrarum habebant». Ma l'astuto console romano, che era accampato nel luogo or detto La Cerreta, prese alle spalle Annibale, facendo passare delle coorti per il colle, oggi detto di S. Antonio, compreso tra la collina di Saponara e il Monte: «Tunc consul, ingenio hostis usus, quo minus in tam apertis collibus timeri insidiae poterant, quinque cohortes, additis quinque manipulis, nocte iugum superare, et in aversis vallibus considere iubet». Assaliti così di fronte e di fianco — «in transversa latera invaserant cohortes, secundis collibus via nuda ac facili decurrentes» — i Cartaginesi subirono una terribile disfatta, in cui lasciarono più di ottomila morti, settecento prigionieri e nove insegne militari. Ma gli «elephanti etiam, quorum nullus usus in repentina ac tumultuaria pugna fuerat, quatuor occisi, duo capti» nulla hanno da fare con gli avanzi, che oggi si raccolgono intorno a Saponara e che han dato origine alla storica leggenda, perchè questi, come si vedrà qui appresso, appartengono all'estinto *Elephas antiquus* Falc., e sono inglobati nei sedimenti dell'antico lago.

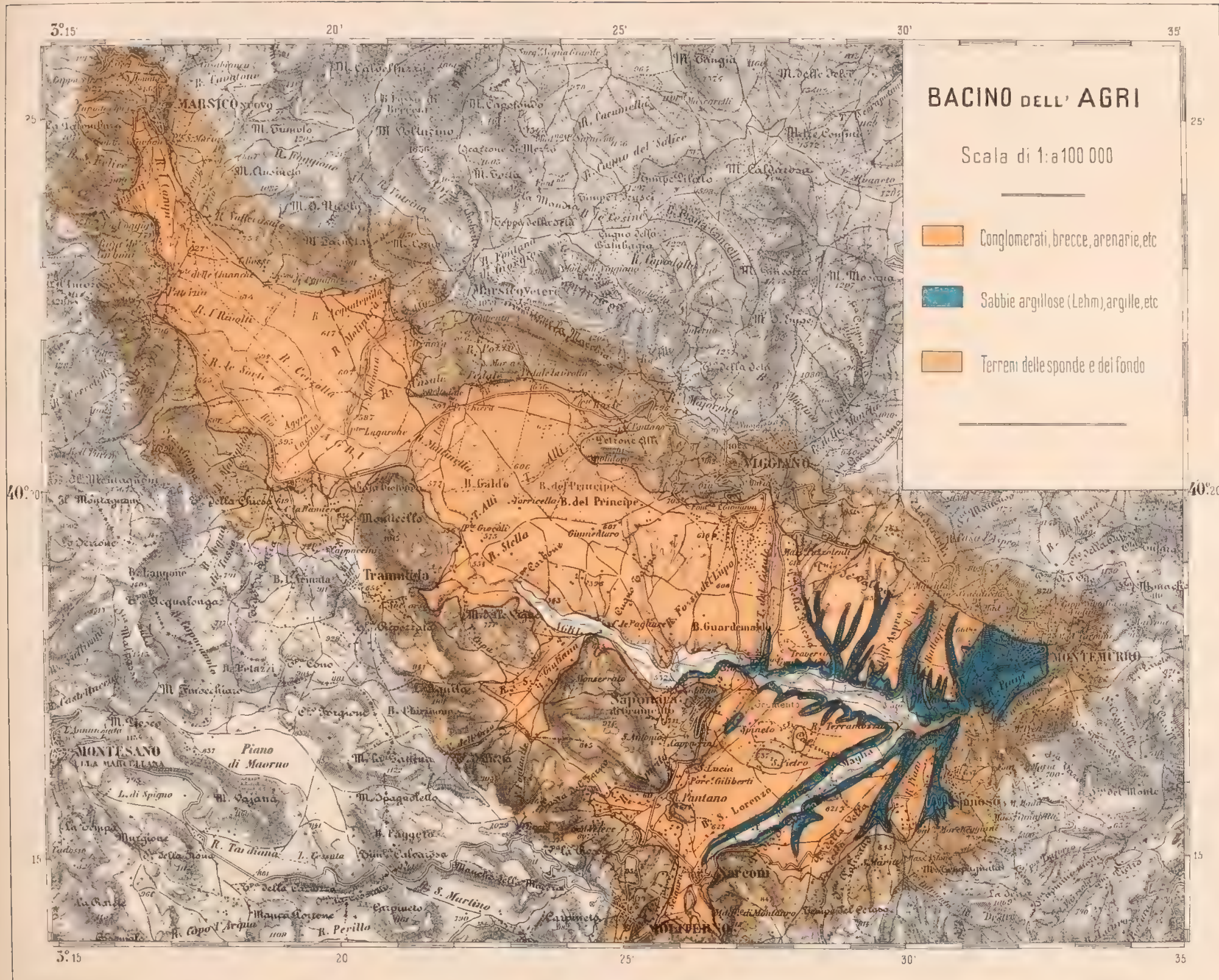
Dalle notizie che Strabone dà su Grumento e dintorni (Lib. VI, cap. 1, § 3): «καὶ Γρουμεντὸν δὲ καὶ Οὐερτῖναι τῆς μεσογαίας εἰσὶ καὶ Καλασάρνα καὶ ἄλλαι μικραὶ κατοικίαι μέχρι Οὐενουσίας, πόλεως ἀξιολόγου» nulla c'è da trarre che importi al nostro soggetto; ma lo stesso Strabone, parlando più tardi (Lib. VI, cap. 1, § 14) dei fiumi Agri e Sinni, li dice navigabili: «καὶ ποταμοὶ δύο πλωτοὶ Ἄκιρις καὶ Σίρις»; dal che si dovrebbe dedurre, che a quel tempo i due fiumi avessero copia d'acqua maggiore e corso men rapido e impacciato di quel che abbiano ora. Ma anche questo non ci autorizza a concludere sull'esistenza d'un qualche residuale bacino lacustre o d'una maggiore precipitazione atmosferica, da cui le acque fluviali fossero più riccamente che ora alimentate; perchè vediamo, che molto

tempo appresso, nel 1232, Federico II concedeva ai monaci basiliani di Carbone, di poter tenere per loro uso sul fiume una barca capace di dieci cavalli. Lasciando quindi per ora da parte ogni ricerca storica o filologica, è necessario rivolgersi solo alle testimonianze geologiche, che di sè l'antico lago dell'Agri ci ha lasciato.

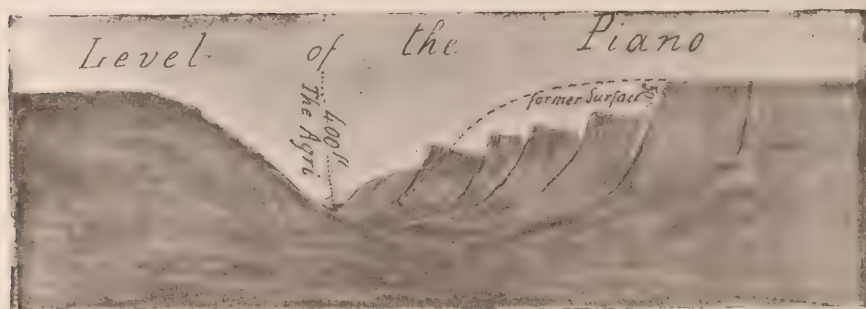
Il primo a fare su questi luoghi delle osservazioni geologiche accurate fu R. Mallet, che le riportò nella sua opera sul *Great neapolitan Earthquake of* 1857. Egli non solo notò (vol. I, pag. 403 e seg.) gli scisti silicei, che si trovano vicino al lago di Maurno, e descrisse le dislocazioni in essi prodotte dal recente terremoto, ma anche da Tramutola vide (vol. II, pag. 27), che gli strati del monte Vulturino erano quasi verticali e si dirigevano generalmente verso N. N. E.; più però che queste osservazioni sulle montagne circostanti sono interessanti le descrizioni e i profili che egli dà sul bacino dell'Agri e su cui mi fermerò un poco. Egli comincia anzitutto a dare delle esatte

1.

(R. Mallet, Great Neapolitan Earthquake of 1857, vol. I, pag. 414).

notizie sui sedimenti di Sarconi (vol. I, pag. 413 e seg.): « Sarconi stands on the lowest level of the piano, probably 700 feet, if not more, below Moliterno, upon the very edge of the steep and lofty bank of about 100 feet in deepth, of deep alluvium and clays, overhanging the north bank of the Maglia, here in winter a large river, whose stony bed is at least 700 feet wide. It is spread out at the town upon horizontal beds of green and grey thin-bedded marls, with calcareous breccias and deep clays abowe. (See Geolog. section, diagram No. 242, and Sketch, section, No. 244). Directly to the N.E. side of the town, a low colline of limestone rock rises to the height of about 350 feet abowe it, the hard and nearly horizontal beds of which, pierce up steep and abruptly through the clays, etc. This colline bears round the town a good way east and north. (See section, Sketch No. 245). The opposite or right bank of the Maglia shows limestone in highly inclined beds in some places, and covered wit deep alluvium ». I due schizzi, a cui l'autore si riferisce (lasciando da parte il diagramma, in cui sono molti errori per ciò che riguarda la costituzione geologica delle montagne circostanti il bacino), mostrano che

Istituto Geografico Militare, 1898.

la roccia fondamentale della regione è data dal calcare, che forma le colline dei dintorni di Sarconi, al quale si appoggiano in discordanza le « variegated marls » (probabilmente le argille e le marne del Flysch eocenico-miocenico), che compariscono da per tutto dove l'erosione ha profondamente intaccato i sedimenti lacustri, appalesandosi così quasi sempre come la base o il fondo di questi. Il sedimento lacustre più profondo sarebbe rappresentato dalla breccia calcarea, a cui sopra succederebbero dei letti orizzontali di marne grige e verdi sottilmente stratificate. In realtà sul terreno non s'osserva questo distacco netto tra i due depositi, come è indicato da Mallet; ma piuttosto un molteplice avvicendarsi di brecce, conglomerati, argille, marne etc., come suole avvenire in ogni sedimentazione di bacino lacustre specialmente, come nel caso, alle foci degli immissari. Del resto ciò poco toglie all'accuratezza delle osservazioni di Mallet, che acquistano non poco valore, ove si ponga mente al tempo e ai luoghi in cui furono fatte Procedendo da Sarconi verso Saponara Mallet notò che l'alluvium del bacino « must be reposing perfectly unconformably against the limestone beds; of which the lofty and steep conoidal hill, upon which Saponara stood, is composed ». Egli inoltre stando sotto la collina delle Cammarelle, osservò, che la sponda destra del fiume Sciaura « consists of still deeper alluvium, forming part of the Piano Spineto, etc., resting upon horizontal and exposed beds of clays and shaly argillaceous rocks. To the north and N.W., beyond the hill of Saponara, the Piano of Mattine delle Rose extends for some five or six miles, all of such formations, and beyond that the mountains rise to Marsico Vetico (Vetere), and bèyond to the crest of Monte Vulturino ». Più oltre (vol. I, pag. 428) continuando il suo viaggio da Saponara a Montemurro, osservò, che il livello medio del Vallo d'Agri è quasi identico a quello del Vallo di Diano e descrisse i prodigiosi effetti dell'erosione nei sedimenti lacustri, rilevando con accuratezza i materiali da cui questi sono costituiti: « This may be viewed as about the lowest level of the Piano Mattine, so that its mean level is nearly the same, as that of te great Piano of Diano. For some miles about the junction of the Maglia and Agri evidences of prodigions erosion exist. In many places in the main river bed — here from 500 to 700 feet, or upwards, in width, though rarely covered wholly with water — great insular masses challenge astonishment, by the rate at which they are being carried bodily off in winter..... They all consist of great beds of calcareous breccia, resting conformably upon perfectly level deep beds of extreme thinnes of parallel lamination of green, grey and purple clays, or marls, hard, dense and unctuous, but rapidly softened and dissolved when wetted. Abowe the breccia, lies an immense thickness of dense red brown, clay and loam; the laminated marl beds exist, just at the level of the watercourse of the two rivers, and as these get rapidly sapped and cut away, huge masses of to breccia break off and fall separate into small pieces, and with the clays shed off their summits, are swept away, leaving nothing deposited finally upon the river-beds, but the harder calcareous pebbles and boulders of the breccia, and those still harder travelled boulders, which it cotained in abundance. Amongst the latter are many of sienite and yellow granites, some of a green and white fine sandstone breccia, having litologically a most suspicious look of indurated chalk, from a green sand formation, and many of variegated jaspers. Large blocks of the latter, banded with green and purple, are found abundantly in the clays and on the slopes to the north side of the valley, and are plainly the product of intense metamorphic action upon the variegated marl beds ». I blocchi

di sienite, di granito e di arenarie, di cui parla Mallet, provengono dal Flysch eocenico-miocenico e i blocchi di diaspri variegati furono strappati dalle acque agli scisti silicei del trias medio, che sono tanto sviluppati nelle montagne del gruppo del Sirino e in quelle del Vulturino. Più oltre (vol. I, pag. 430; vol. II, pag. 4) descrive accuratamente le argille sabbiose lacustri di Montemurro e le arenarie del Flysch, che fanno a quelle da base: « Once landed on the left (north) bank of the Agri, we reach a new set of formations. The limestone and breccia here disappear, and are succeeded by thick argillaceous beds, with thin bands of something approaching to clay iron-stone; some beds of calcareous clays, much indurated, and, occasionally, heavy beds of a yellow and grey calcaroous soft sanstone, all not very far from horizontal, and dipping to the north and N.E. The whole of these are overlaid by enormous deposits of dense tenacious clays, red, brown, and yellow, almost without a pebble. These stand, as soft shedding cliffs, above this stream — now a brawling torrent of liquid mud, which is undercutting and sweeping them away, in masses. In many places 400 feet in deepth of these clays, overlay the soft rocks beneath. Near the junction of this torrent with the Agri, I had noticed many fragments and some large lumps of lignite in its bed, and when ascended, to within about a mile of Montemurro, I was enabled to see the lignite beds *in situ* beneath the clay cliffs at the opposite (east) side ef the Laderana, and nearly on the level of the water. They appeared to be from 1 to 2 feet in thickness, perfectly black, but as fuel of very inferior quality; they are unused, and apparently unknown to the inhabitants...... The mass of the plateau of Montemurro seems at first to be nothing but clay;

2.

Grandi scoscendimenti e fratture nel piano delle Mattine sul fiume Agri, presso Viggiano.
(Da R. Mallet, Great neapolitan Earthquake, vol. II, pag. 14).

but upon the highest points of the town, and a little beyond it to the north and N.E., the soft, crumbly, yellow, calcareous sandstone, a half compacted rock, comes bare up to the surface, and obviously forms a great cone, upon and around which the immense clay deposits are heaped up ». Molto interessanti sono le notizie sugli scoscendimenti recenti da lui osservati al piano delle Mattine (vol. II, pag. 14) e sulla rapidità e forza di erosione del fiume Agri (vol. II, pag. 16): « Passing along the Piano Mattine below Viggiano, and further northward, I found several most remarkable landslips, at the steep banks of le Agri; one of these is figured from eye-scketch in Diagram No. 274. It occurred at the salient boss of a curve of the river, where the bed was about 400 feet

below the level of the surface of te piano. The surface of loamy clay land which had slipped, had been covered with coarse grass, now formed into many concentric curved fissures, and not less by the eye than 50 acres English had descended, and the topmost terrace of the slip was about 50 feet below the level of the still standing land of the piano above it. The toe had protruted and greatly obstructed the bed of the Agri, which was fast sweeping it away. It had ponded up at its fall the small stream, without a name, that came in from the east, and this had obviously recently made a debacle of a waste mass of mud from its base, round and over which it now foond its way to the Agri, by channels momentarily altering. It appeared to me that in three or four winters the greater part, if not the whole of this wast mass would be clean gone and deposited in the Adriatic...... The fall of the river Agri is therofore 1171 feet within about 10 miles, or upsward of 108 feet per mile — a tremendous rush for denudation, with such a volume of winter water ». Mi son trattenuto su queste ricerche del Mallet più di quello che potrebbe parere all'uopo necessario, prima di tutto per non ripetere poi io a mia volta delle cose già precedentemente dette da altri; e poi perchè questo è l'unico esempio di così particolareggiate osservazioni sull'argomento che ho impreso a trattare.

Dal 1858 non si ha più notizia alcuna sui nostri laghi fino all'anno 1879, in cui C. De Giorgi nelle sue *Note geologiche sulla Basilicata* (pag. 113) accennò vagamente alla presenza di un antico bacino lacustre nella vallata dell'Agri fra Marsico Nuovo e Tramutola, segnando, nella carta geologica che accompagna il suo lavoro, una striscia di terreno alluviale tra Marsiconuovo appunto e Saponara. Anche nella *Carta geologica d'Italia a 1:1.000.000*, publicata a Roma nel 1889, appena un po' di quaternario recente è segnato lungo i corsi dell'Agri e della Sciaura, e tutto il resto del bacino lacustre, compreso tra Marsico Vetere, Viggiano, Montemurro, Spinoso e Sarconi, è riportato come terreno eocenico.

Finalmente De Lorenzo nei suoi *Studî di geologia nell'Appennino meridionale* (Napoli, Atti Acc. d. Scienze, 1896, pag. 116 e seg.) diede le ultime e più precise notizie sul bacino in discorso: « Il lago quaternario della valle dell'Agri ha forma di triangolo isoscele allungatissimo, di cui il vertice si trova a nord-ovest sotto Marsiconuovo e la base si stende tra Montemurro e Sarconi. Il lato settentrionale di questo triangolo, diretto da nord-ovest a sud-est, è principalmente constituito dai depositi eocenici giacenti tra Marsiconuovo e Garravita, dall'imponente gruppo triasico del monte Vulturino, dalle scoscese e nude balze meridionali del calcare cretaceo del monte di Viggiano e dai terreni prevalentemente eocenici, che vanno da Viggiano a Montemurro; il lato meridionale da Marsiconuovo a sud di Paterno è rappresentato dai terreni triasici dello spartiacque appenninico, da Paterno fino a Sarconi essenzialmente da grossi blocchi di calcari cretacei, che constituiscono il Monticello di Tramutola e il monte di Saponara, e subordinatamente da affioramenti di Trias medio e superiore; la base, tra Sarconi e Montemurro, è quasi tutta formata da depositi eocenici. Le deformazioni orogeniche che han dato origine al bacino sono in parte rappresentate da pieghe e in parte da fratture con spostamenti: infatti a nord-ovest il lago occupava la sinclinale intercorrente tra le pieghe triasiche del gruppo del Vulturino e il piccolo ellissoide di Paterno, formato anch'esso di terreni triasici; ma più a valle, tra Marsicovetere, Viggiano e Saponara, il lago si stendeva tra i grandi blocchi di calcari cretacei spostati per fratturazione, e solo in qualche punto lambiva le falde di qualche piega triasica affiorante per breve

tratto. I sedimenti di questo lago si trovano in generale a un'altezza alcun poco superiore ai 600 metri sul mare e sono principalmente rappresentati da argille, marne e marne sabbiose verso il centro, e da conglomerati più o meno grossolani verso i margini. I margini però non si trovano sopra una superficie piana o quasi piana come la parte centrale, ma sono gonfiati dalle conoidi e dai delta prodotti dai principali affluenti del bacino, tra cui primeggiano la parte alta dell'Agri sotto Marsiconuovo, il torrente S. Elia, i torrenti a ovest di Marsiconuovo, la larga conoide del fiume Alli, la valle Romana etc. Tutti questi corsi d'acqua si scaricano ora perpendicolarmente nel fiume Agri, che percorre il bacino lungo la sponda meridionale, tagliandone i sedimenti per un'altezza che in alcuni punti raggiunge i 70 metri e mettendo a nudo le marne e le argille più profonde, specialmente nel tratto che va da Grumento a Spinoso. Quando invece tutto questo bacino era occupato dal lago quaternario, tutti gli attuali affluenti dell'Agri si scaricavano direttamente in esso, portando gran copia di materiale detritico e di acqua, fornita dal clima umido dell'epoca glaciale, e contribuendo così ad addolcire rapidamente le acque dapprima salmastre. La parte più bassa dell'orlo del bacino era rappresentata dalle colline comprese tra Montemurro, Spinoso, Armento e S. Martino e da questo lato il lago si manteneva in comunicazione continua col mare in via di graduale abbassamento. Siccome però l'emissario del lago tendeva a raggiungere il livello basale di erosione, esso andava incidendo un canale diretto da occidente a oriente negli erodibilissimi terreni eocenici della sponda, e a misura che questo canale si approfondiva, la superficie del lago si abbassava, finchè, giunto quello a un livello di poco inferiore al fondo del lago, questo si trovò completamente vuotato e i suoi sedimenti cominciarono ad essere secati dai corsi d'acqua che prima li avevano constituiti. Ora questi si uniscono tutti nell'Agri e, seguendo il cammino indicato e inciso dall'antico emissario, continuano il loro infaticabile lavorio per raggiungere il nuovo livello basale dell'erosione ». Con questo breve schizzo storico si chiude la letteratura del bacino dell'Agri e io posso da questo punto dar principio alle mie osservazioni.

§ 2.

Terreni delle sponde e del fondo.

Il più antico dei terreni costituenti le sponde e il fondo dell'antico lago dell'Agri è dato dal trias medio del tipo scoperto e descritto per l'Italia meridionale da G. De Lorenzo (vedi principalmente il suo lavoro su *Le montagne mesozoiche di Lagonegro*, Atti Acc. Scienze di Napoli, 1894, e i suoi *Studi di geologia nell'Appennino meridionale*, id. id., 1896), rappresentato essenzialmente da calcari a noduli di selce e halobie, che verso l'alto passano a scisti silicei e a diaspri policromi, includenti amigdale di calcari diploporici a scogliera. Dopo la publicazione dei lavori di De Lorenzo sui dintorni di Lagonegro, questo trias medio fu segnalato nelle montagne, che circondano l'alta valle dell'Agri, da Baldacci e Viola nella loro Nota *Sull'estensione del trias in Basilicata e sulla tettonica generale dell'Appennino meridionale* (Boll. Com. geol. ital., vol. XXV). Essi ne verificarono l'estensione e trovarono posidonomie e halobie nei calcari a noduli di selce del ponte dell'Occhio presso Marsiconuovo, in quelli dei monti Calicchioso e Tumolo, del monte Vulturino, di Moliterno e del fiume Maglia; nonchè abbondanti neri-

tine e spirigerine in certi calcari della valle Scivogliata, intercalati nelle dolomie e sovrastanti agli scisti silicei presso Tramutola. Io stesso ho potuto constatare, che da per tutto questi terreni, stratigraficamente e paleontologicamente, corrispondono con esattezza a quelli dei dintorni di Lagonegro. Il trias medio, così costituito, contribuisce largamente a formare le sponde del bacino dell'Agri, sia dalla parte settentrionale, che dalla meridionale, restandone completamente libero il fianco orientale, più basso. A nord esso comparisce dapprima nel torrente Casale e comincia a formare quel tratto di sponda, segato dal torrente Alli, in cui si trova Viggiano, il monte S. Eno, la Tempa della Seta, Rupe Rossa e le basi orientali del monte di Viggiano, dai Canalicchi a S. Michele. Tra il torrente Alli e la Calanga di Marsicovetere il trias medio cede il posto ai calcari cretacei del monte di Viggiano, al disotto dei quali fuoriesce poi di nuovo per svolgersi ampiamente verso nord-ovest nel gruppo complesso del monte Vulturino, fino a Marsiconuovo e al monte Cugnone, a nord di questo paese, subendo una sola interruzione nel tratto compreso tra Garravita e il fiume Agri, ripieno dal Flysch terziario. Ripiglia sulla sponda occidentale a Paterno per un tratto di circa 3 chilometri e poi si dilegua di nuovo sotto le rocce di età posteriore, che vanno dal Pantano di Paterno fino al Monticello di Tramutola. Si presenta ancora a sud-est di questo, formando il tratto di sponda compreso tra le Tempe di Apollo e il Monte di Saponara e massimamente sviluppandosi lungo gli speroni orientali del monte dell'Aquila. Finalmente il trias medio si presenta per l'ultima volta a sud, formando le colline coronate da Moliterno, dal Pantanello all'Arvarale, le rocce segate dal Maglia (che mediante la Ferlosa e il monte Papa Nicola si riattaccano all'imponente gruppo del Sirino), nonchè la Tempa Mulino e il Castellazzo fino alle Cesine di Sarconi. Non mai il trias medio si presenta nel centro del bacino, anche dove i sedimenti di questo sono profondamente erosi.

Vien dopo il trias superiore, principalmente rappresentato dal Hauptdolomit bianco, che, appoggiato sul trias medio, o affiorante di sotto ai posteriori calcari, si trova in piccoli lembi nell'insenatura di Marsicovetere (tra il monte di Viggiano e il gruppo del Vulturino) e si sviluppa poi grandemente a ovest e a sud-ovest di Paterno, formando quella parte dello spartiacque appenninico, che è compresa tra Paterno, Padula e Tramutola e che è principalmente rappresentata, sul versante jonico, dalla Serra di Capurso (1211 m.), l'Amoroso (1288 m.), Maudrano, Serra Bandiera, Serra del Monaco (1393 m.) etc. Forma inoltre lo Hauptdolomit la parte inferiore meridionale del Monticello di Tramutola e di qua, dilungandosi pel Cozzo la Gatta, appare per l'ultima volta a sud-est, biancicando sotto i calcari cretacei di T. Nocito, Costa del Forno, della parte orientale del Monte (tra Codrazzo e Santo Spirito) e in quella meridionale del colle su cui siede Saponara, propriamente a S. Lucia.

Terreni appartenenti al lias non ho potuto con sicurezza constatarne: probabilmente spettano ad esso i calcari scuri e neri, bituminosi, in strati sottili, del monte dell'Aquila e dintorni, che rassomigliano litologicamente a quelli liasici inferiori dei dintorni di Lagonegro. Questi calcari neri del monte dell'Aquila si appoggiano sugli scisti silicei del trias medio e potrebbero quindi anche appartenere al trias superiore; a simiglianza dei consimili calcari della Calabria settentrionale e della Basilicata meridionale, sulla cui età *adhuc sub judice lis est*, la quale potrà essere apparata solo in seguito a minuti studî paleontologici sopra faune numerose e ben conservate.

Sviluppati molto invece sono i calcari cretacei, probabilmente spettanti al cretaceo superiore, rappresentati più dalla facies a gasteropodi anzi che da quella a rudiste, in banchi piuttosto grossi e di colore prevalentemente grigio, tendente più al chiaro che allo scuro. Formano il dirupato, nudo e pittoresco monte su cui è sito il santuario della Madonna di Viggiano; si trovano sui monti compresi tra Paterno e Tramutola e, addossandosi al Hauptdolomit., costituiscono la parte superiore e maggiore del Monticello di Tramutola, del Monte, a ovest di Saponara, e dello sperone calcareo su cui è fabbricato quest'ultimo paese. A sud-est poi, lontano però dal bacino, sono largamente sviluppati con facies a rudiste nel pianeggiante monte Raparo, ricco di pascoli profumati. Non sempre però è facile decidere se si tratti solamente di calcari cretacei o se questi siano in qualche punto superiormente fusi con i successivi calcari eocenici, i quali, quando non hanno fossili, possono facilmente confondersi con quelli.

I calcari eocenici, generalmente marnosi e brecciati, son ricchi di nummuliti, litotamni e pettini dell'eocene medio, nonchè di briozoi, di bivalvi e di echini, che li fanno agevolmente riconoscere: così per esempio a ovest di Marsiconuovo, lungo la parte orientale e meridionale del Piano di S. Vito, dove sono tipicamente sviluppati. In altri luoghi invece non hanno fossili e nemmeno una caratteristica struttura e non si possono quindi facilmente distinguere dai sottostanti calcari cretacei. Così io ora non posso affermare se la collina delle Cammarelle, tra Sarconi e Saponara, quella di S. Pietro e la Serra Calcinara, tra Saponara e Spinoso, che sporgono come isolette dai sedimenti del bacino, siano costituite da calcari cretacei o eocenici o da tutt'e due le sorta insieme; quantunque la natura della roccia mi faccia inclinare a supporre, che si tratti prevalentemente di calcari eocenici.

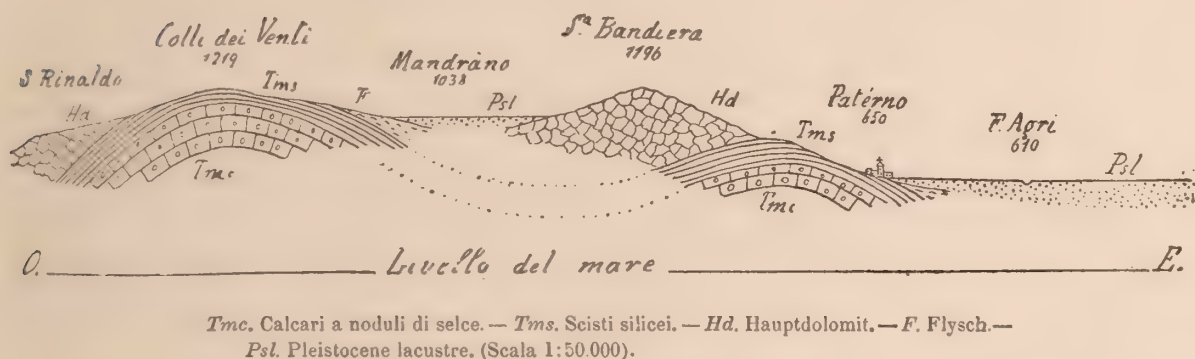
Vien finalmente il Flysch eocenico superiore, che comincia in basso con la facies argillo-scistosa a breccioline ricche di nummuliti bartoniane e si chiude in alto con le potenti arenarie e molasse, le quali salgono forse fino all'elveziano ma in basso hanno numerose alternanze con gli scisti argillosi. Anche Baldacci e Viola hanno, nel loro su citato lavoro, constatato in generale la predominanza della facies arenacea nelle parti più elevate della serie, mentre nelle parti più basse predominano gli scisti argillosi grigi passanti ad argille scagliose variegate, con strati intercalati di calcari alberesi e di calcari a piccole nummuliti. Tra le arenarie e gli scisti argillosi sono frequenti i conglomerati di rocce cristalline antiche, sulla cui composizione e genesi mi riferisco a quanto sul proposito ha scritto De Lorenzo nei suoi *Studî di geologia nell'Appennino meridionale*, pag. 67. Il Flysch così costituito colma tutte le depressioni comprese tra i grandi monti calcarei, resta in piccoli lembi addossato alle ripide pareti di questi e riempie le insenature, che si trovano lungo le sponde dell'antico bacino: accennerò quindi solo ai luoghi, in cui è massimamente sviluppato. Il bacino sinclinale di Garravita, compreso tra la piega del Cugnone-Marsiconuovo e le pieghe maggiori del gruppo del Vulturino, è tutto pieno dalla facies argillo-marnosa eocenica, che poi si presenta di nuovo alle Tempe di Cavolo (a nord-ovest di Tramutola), a sud di S. Giuliano, a S. Antonio (tra il Monte e Saponara) e sulla sponda destra del corso del Maglia. Da questo punto, andando verso nord-est e nord comincia a predominare la facies superiore arenacea, che forma le colline a sud-est di Spinoso, passa l'Agri e si espande largamente a est, a nord e a ovest di Montemurro, dalla fiumara di Armento al torrente Casale. Le arenarie di color grigio giallastro, non mostrano in generale visibile stratificazione e hanno una frammentazione poliedrica simile a quella del granito.

Chiudono infine la serie sedimentaria marina antica le argille, le sabbie, le arenarie e i conglomerati del pliocene superiore, che vanno da Latronico, per S. Chirico Raparo fino ad Armento, sono secate dall'Agri e toccano i 900 metri d'altezza sul mare.

La tettonica di tutti questi terreni costituenti le sponde e il fondo del bacino è di natura variabile e complessa, tale che a descriverla esattamente occorrono numerosi studî di dettaglio. Il trias medio, così come nel gruppo del Sirino, illustrato da De Lorenzo, è avvolto in grandi pieghe, le quali sono a lor volta addensate da sopraspinte (Ueberschiebungen) o spostate da numerose fratture scorrenti. Invece la pila di rocce secondarie e terziarie antiche, soprastante al trias, è di norma spezzata in numerosi blocchi, di grandezza variabile, scorrenti gli uni sugli altri senza alcun ordine apparente e formanti così le linee orografiche fondamentali di alcune parti della regione. Il Flysch, portato via dalla denudazione dai blocchi (Schollen) sollevati, è rimasto protetto e conservato su quelli depressi; gli strati di esso, contorti e frantumati in mille guise, urtano contro le facce di scorrimento o contro gli strati fortemente inclinanti dei blocchi di rocce più antichi, da cui son limitati. Il pliocene superiore è disposto in strati che inclinano in massa leggermente verso il mare Jonio.

Nelle sponde della parte alta del bacino predominano le pieghe, in quelle della parte bassa le fratture. Tra Marsiconuovo e Paterno la valle è rappresentata dal bacino sinclinale intercorrente tra le pieghe dello spartiacque e quelle del gruppo del Vulturino.

3.

Tmc. Calcari a noduli di selce. — *Tms.* Scisti silicei. — *Hd.* Hauptdolomit. — *F.* Flysch. — *Psl.* Pleistocene lacustre. (Scala 1:50.000).

Lo spartiacque appenninico, tra Paterno e Padula, è nella sua ossatura formato da due anticlinali, o meglio da due ellissoidi triasici medî, costituiti da calcari a noduli di selce e halobie e da scisti silicei. Il primo di questi due ellissoidi comincia a sud-est di monte Cavallo e propriamente fuoriesce dal piano di Mandranello, forma, sempre dirigendosi a sud, il Colle dei Venti, il monte Melone, il Monte Cirio, il cozzo Calvario, il Tasseto e all'altezza del bosco Cerreto, a 4 chm. a nord di Montesano, si immerge sotto lo Hauptdolomit, dopo aver occupato una lunghezza di 8 chm. circa. La falda occidentale di questa piega è vestita d'una fascia bianca di Hauptdolomit, alla quale si sovrappongono i calcari eocenici delle Serre di Padula e il Flysch, che si stende poi, sempre più allargandosi, da questo paese verso Montesano e Casalbuono. L'altro ellissoide affiora per più breve tratto — 3 chm. circa — stendendosi da La Loggia fino al Pantano di Paterno. Inoltre le cime formate dalla prima piega giungono fino a 1150 (Colli di Venti), 1270 (cozzo Calvario) e 1340 (monte Cirio) metri sul mare; mentre gli scisti silicei della

seconda appena arrivano, sotto Serra Bandiera, a poco più di 900 metri d'altezza, alla stessa latitudine dei Colli dei Venti. Tra i due ellissoidi si stende un ampio bacino sinclinale, aumentato forse in profondità da fratture scorrenti, in cui si ammassa lo Hauptdolomit, che biancheggia da Mandrano alla Serra Bandiera, qua e là coperto da lembi di calcari eocenici e di Flysch. Questo Hauptdolomit è un vasto serbatoio d'acqua, la quale si versa mediante numerose e abbondanti sorgenti dagli orli del bacino siliceo impermeabile, tanto dalla parte di Paterno che da quella di Padula. L'ellissoide di Paterno sembra formare una sola piega con l'altro, che più a nord costituisce la collina, su cui siede Marsiconuovo, e il monte Cugnone. Tra questa piega e le molteplici volute del gruppo del Vulturino interviene di nuovo il profondo bacino sinclinale di Garravita, ripieno di Flysch eocenico superiore, dal quale a oriente si innalzano le belle e complicate pieghe del gruppo del Vulturino, già sommariamente descritte da De Lorenzo

4.

Tmc. Calcari a noduli di selce. — *Tms.* Scisti silicei con intercalazioni di calcari a scogliera. — *Cr.* Calcari cretacei. — *F.* Flysch eocenico superiore. (Scala 1 : 100.000).

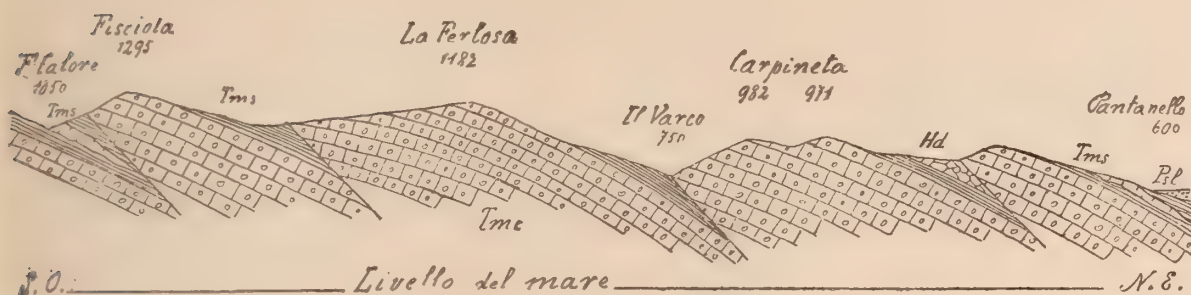
nei suoi *Studi di geologia nell'Appennino meridionale.* Il trias medio di questo gruppo non è però soltanto dislocato da semplici pieghe, ma è anche tagliato da profonde fratture, le quali sono particolarmente numerose nelle pendici meridionali, verso la valle. A determinare bene queste varie fratture trasversali e a verificare se realmente trattisi di fratture scorrenti oppure di fratture con spinte, sarebbe necessario fare parecchie

5.

Tmc. Calcari a noduli di selce. — *Tms.* Scisti silicei con intercalazioni di calcari a scogliera. — *Hd.* Hauptdolomit. — *Psl.* Pleistocene lacustre. (Scala 1 : 50.000).

escursioni ascendendo il corso del torrente Molinara: io ne do qui uno schizzo approssimativo, rappresentante lo stato delle cose come a me parve più probabile che fosse, guardandolo dal basso della valle. Sulla sponda opposta, meridionale, di questa però il

trias medio anzi che attraversato da fratture scorrenti, sembra essere tagliato da numerose sopraspinte, che hanno prodotto una struttura embricata, come può osservarsi nelle belle montagne a pascoli alpini, che si stendono tra il fiume Calore e Moliterno, in cui le suddette dislocazioni hanno prodotto un numeroso e complicato alternarsi di calcari a noduli di selce, scisti silicei a radiolarie e calcari a scogliera del trias medio. Nella

6.

Tmc. Calcari a noduli di selce.— *Tms.* Scisti silicei con intercalazioni di calcari a scogliera.— *Hd.* Hauptdolomit.— *Psl.* Pleistocene lacustre. (Scala 1:50.000).

parte mediana della valle le sponde sono precipuamente rappresentate dal Hauptdolomit, la creta e l'eocene, che, spezzati in numerosi blocchi, scendono verso il piano mediante fratture scorrenti a staffe o a gradinata. Così sulla sponda meridionale, tra la valle di S. Martino, a ovest di Moliterno, e quella dell'Agri, vi è appunto una di queste serie di

7.

Tmc. Calcari a noduli di selce.— *Tms.* Scisti silicei con intercalazioni di calcari a scogliera. — *Hd.* Hauptdolomit. — *Cr.* Calcari cretacei. — *F.* Flysch eoc. sup. — *Psl.* Pleistocene lacustre. (Scala 1:50.000).

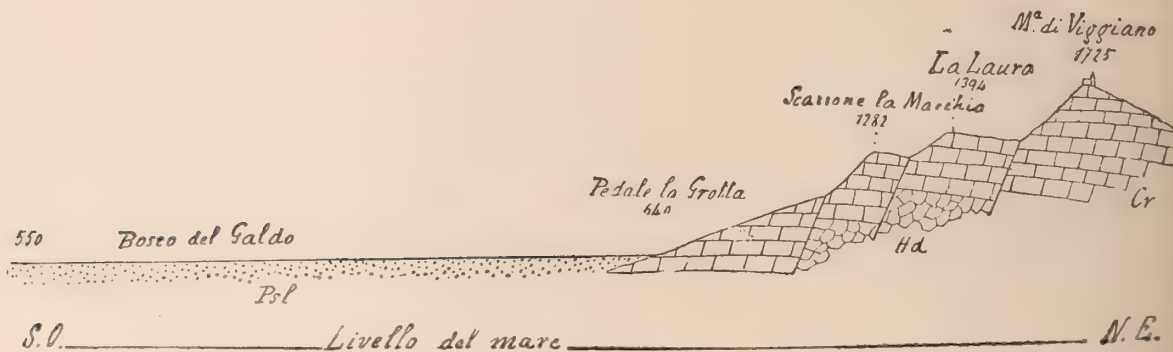
fratture a gradinata, che lascia bellamente vedere lo Hauptdolomit affiorante a quando a quando di sotto ai calcari grigi probabilmente cretacei, i quali sono a lor volta ricoperti qua e là da lembi sottili di Flysch eocenico superiore. Parimenti il Monticello di Tramutola, costituito di una pila di calcari a nerinee soprapposti al Hauptdolomit, rappresenta un blocco, limitato nella valle di Tramutola da una grossa frattura corrente da nord-ovest a sud-est, che lascia affiorare, da S. Palumbo a Pantano, lo Hauptdolomit di base, e fa inclinare gli strati dalla parte opposta, verso la valle dell'Agri. Dirimpetto al Monticello, sulla sponda settentrionale, giganteggia il nudo e precipite monte della Madonna di Viggiano, essenzialmente composto da calcari cretacei a rudiste e nerinee,

che si appoggiano sul Hauptdolomit, il quale a sua volta sovrasta agli scisti del trias medio. Lo Hauptdolomit comparisce qua e là per fratture a ovest di Marsicovetere, mentre il trias medio si sviluppa a nord-ovest verso il Vulturino (v. fig. 4) e a

8.

Hd. Hauptdolomit. — *Cr.* Calcari cretacei. — *F.* Flysch eocenico sup. — *Psl.* Pleistocene lacustre. (Scala 1:50.000).

sud-est verso Viggiano, essendo in ambedue i lati coperto direttamente per transgressione dai calcari cretacei. Questi sono percorsi da una serie di fratture longitudinali, dirette da nord-ovest a sud-est, mediante le quali si abbassano a gradinata verso il bacino. Particolarmente interessanti sono le tre grandi facce di scorrimento di Scarrone

9.

Hd. Hauptdolomit. — *Cr.* Calcari cretacei. — *Psl.* Pleistocene lacustre. (Scala 1:50.000).

la Macchia, La Laura e Madonna di Viggiano, che sembrano verso nord-ovest continuarsi con le fratture trasversali, dianzi descritte, delle pendici meridionali del Vulturino. In questa parte del bacino, se si considera che da un lato e dall'altro, cioè dal monte di Viggiano e da quello di Saponara, i medesimi terreni si abbassano a gradinata verso il centro della valle e tendono a incontrarsi; e se si pensa, che questi medesimi fratturati terreni sono frequentemente scossi da tremiti sismici: si ha una rappresentazione plastica delle parole poste da Shakspeare in bocca a Corin nel « *As you like it* » (Act. III, sc. 2): « ... mountains may be removed with earthquakes, and so encounter! » Fratture si trovano ancora sotto Viggiano e alle Cesine di Sarconi, ma a oriente di questi due punti i terreni secondarî cedono il posto al Flysch eocenico-miocenico, in cui

scompaiono le linee orografiche nette e ben determinate per dar luogo agli ondeggiamenti tristi degli scisti argillosi e delle arenarie che lo compongono e che van poi a immergersi definitivamente sotto i sedimenti pliocenici delle pendici joniche.

§ 3.

Sedimenti.

I sedimenti del bacino dell'Agri, nella gran massa di origine meccanica, in piccola quantità di origine organica e chimica, variano a seconda della qualità delle rocce di sponda, dal cui disfacimento provengono, e dalle condizioni di trasporto e di deposizione. In generale si possono ridurre ai pochi tipi fissi, che si presentano di solito in tutti i bacini lacustri: argille turchine, argille marnose, marne, argille sabbiose, sabbie argillose, sabbie, conglomerati a piccoli elementi, puddinghe e brecce a frammenti angolosi.

Le argille plastiche, turchine, buone per la produzione di laterizi e di terrecotte, sono di solito confinate a pochi punti delle parti più profonde dei sedimenti lacustri, come per esempio lungo il corso della Sciaura e del Maglia e nelle parti più basse dei numerosi valloni e valloncelli d'erosione, che scendono da Montemurro verso il corso dell'Agri. Esse non sono un prodotto immediato del disfacimento di silicati alluminiferi, ma si trovano in giacimento terziario, essendo state dall'acqua tratte fuori da conglomerati, arenarie, scisti, marne e altre simili rocce contenenti argille. Impregnate d'acqua diventano molto maneggevoli e plastiche: asciugandosi si screpolano e si spaccano. Non sono mai dei silicati d'allumina idrati puri, ma contengono sempre carbonati di calce, di magnesia e di ferro in discreta quantità (come è rivelato dalla forte effervescenza che esse fanno con gli acidi), nonchè una certa quantità di minuta sabbia quarzosa e di pagliuzze di mica. Non mancano cristalletti di pirite e di gesso e col microscopio si vedono anche piccoli aghetti cristallini, appartenenti probabilmente a rutilo. Qualche volta da ossidi di ferro son colorate in rossiccio e da sostanze carboniose in bruno o nero. Oltre i piccoli letti di lignite si trovano frequentemente in esse degli intrecci fittissimi di ramoscelli semicarbonizzati di piante terrestri e acquatiche, non esattamente determinabili. Avanzi di molluschi o di altri animali non mi è accaduto di vedere in esse mai, ma non è improbabile che un giorno o l'altro vi si debbano trovare. Nelle argille della Sciaura (sotto il giardino di Giliberti, a est di Saponara) il dottor A. De Gasparis ha potuto osservare i seguenti avanzi di diatomee, tutti in un cattivissimo stato di conservazione ed enormemente frammentati e logori:

Podosphemia gracilis (frequente)
Encyonema prostratum
Epithemia argus
Cymbella lanceolatum
Navicula n. sp.?
Diatoma Ehrenbergi
Podosphemia sp.

Sono, come si vede, tutte specie di acque dolci e salmastre.

Col grande aumentare del carbonato di calce si hanno delle argille marnose e delle

marne leggiere, porose, di color crema pallido, quasi terrose, di cui ho potuto constatare l'esistenza solo in un punto a nord-ovest di Saponara, nella regione S. Vito, e propriamente lungo il piccolo sentiero incassato, che dalla regione Cerreta scende al ponte in legno di S. Vito sull'Agri. In queste marne giallicce esistono, insieme ad altri numerosi avanzi vegetali macroscopici e indeterminabili, le seguenti diatomee:

Amphiprora alata (frammenti)
Cymatopleura elliptica (individui alterati)
Cocconema cistula
Eunotia gracilis
Tryblionella angustata
Epithemia Westermannii
Cyclotella antiqua (frammenti)
Stauroneis acuta
Amphora salina
Pinnularia Brebissoni (frammenti)
Encyonema coespitosum
Himantidium Soleiroli (frammenti)
Himantidium gracile
Diatoma tenue
Diatoma elongatum (frammenti)
Gonphonema vulgare
Odontidium hyemale

Osserviamo fin d'ora che questa flora microscopica è del tutto diversa da quella degli altri grandi laghi quaternarii contemporanei, il che esclude, con una certa probabilità, che esistessero tra essi delle comunicazioni continentali. Lo stato molto avanzato di frammentazione e di logorazione, in cui si trovano quasi tutti questi avanzi di diatomee, può essere spiegato sia mediante un trasporto fluviale (per esempio per mezzo della Sciaura e del Maglia), che col movimento ondoso delle acque del lago sulla spiaggia. Com'è noto, infatti, non solo tutti i laghi d'acque dolci, le paludi, i fiumi e i ruscelli contengono una ricca flora di diatomee, ma queste, e specialmente le diatomee suturate, vivono a preferenza in acque basse e presso le coste, rampando col muco protoplasmico sulle alghe e gli sfagni. Infatti i due giacimenti diatomiferi su citati sono immediatamente addossati alla collina di Saponara, che sporgeva come un'isola, o una penisola, dalle acque del gran lago pleistocenico. Nelle argille di Montemurro, più lontane dall'antica spiaggia, non si vedono che scarsissimi e indeterminabili avanzi di diatomee.

Quando queste argille acquistano una quantità considerevole di sabbia quarzosa finissima e vengono colorate in giallo rossiccio dal sesquiossido di ferro idrato, passano a costituire dei veri depositi di Lehm e di Loess. Questi depositi sono ampiamente e potentemente sviluppati a Montemurro (dove per primo li osservò e li descrisse Mallet, che parlò di « an immense thickness of dense red brown clay and loam) », raggiungono e sorpassano nelle ripide pareti del Fosso Scazzero lo spessore di 100 metri, formano la regione dei Piani e la Serra di Castelluccio e risalgono il corso dell'Agri e quello dei suoi principali affluenti (Maglia, Sciaura, Vallelonga, Rifreddi etc.) fino all'altezza di Saponara, sottoponendosi qui ai conglomerati grossolani superiori, mentre nei dintorni immediati di Montemurro restano addirittura scoperti. Il colore bruno-gialliccio di que-

sti depositi, la grande abbondanza di granuletti finissimi di quarzo, dai quali sono quasi per intero costituiti, la consistenza farinosa di essi e la mancanza assoluta di plasticità quando sono rammolliti dall'acqua, la finezza e l'uniformità della polvere quarzosa, che appena si sente sotto le dita, la porosità, il finissimo intreccio di radichette e ramoscelli in essi impastati e la mancanza di stratificazione li fanno rassomigliare in modo sorprendente al tipico Loess: carbonati di calce o di magnesia mancano quasi del tutto (perchè trattando la roccia con gli acidi non si nota la più piccola effervescenza) e questo è l'unico carattere che li distingue dal vero Loess. Inoltre per questo nostro disseccato limo giallastro non si può affatto invocare l'origine eolica, che per il Loess cinese e europeo propose Richthofen e accettarono Tietze, Pumpelly, Neumayr, Sauer etc.: senza dubbio esso rappresenta un deposito lacustre, quale oggi pare si debba ritenere anche il Loess della valle del Reno, e corrisponde a quei terreni, che nel *Führer für Forschungsreisende* Richthofen chiama Lossähnliche Bodenarten. Nel nostro caso l'origine di questo Loess deve ricercarsi in circostanze locali. Infatti noi vediamo, che esso è limitato solo alla parte orientale del bacino, che raggiunge a Montemurro la sua maggiore potenza e che verso ovest poi va dileguandosi e cedendo mano a mano il posto ai conglomerati grossolani. Ora appunto ad est del bacino, e specialmente sopra Montemurro, si stendono e s'innalzano le colline composte dal Flysch dell'eocene superiore, che là è principalmente costituito da potentissime molasse. È naturale quindi che le acque correnti, passando attraverso queste erodibilissime molasse, giungessero al lago cariche di limo finissimo e ve lo depositassero, dando origine a quella specie di Loess: infatti là, dove più alte sono le colline eoceniche, come al Passo di S. Vito a nord-est di Montemurro, massimo è lo spessore del deposito sabbioso lacustre, che poi s'assottiglia verso Spinoso e verso Saponara.

Alle argille, ai fanghi e alle sabbie bisogna aggiungere i conglomerati a elementi più o meno grossi (angolosi e più grandi verso i margini, arrotondati e più minuti verso la parte centrale del bacino) che all'altezza del fiume Maglia cominciano a sovrapporsi alle sabbie e alle argille e poi si stendono, acquistando sempre maggiore potenza, verso occidente, e formano tutta la parte occidentale del bacino. Evidentemente la natura degli elementi di questi conglomerati dipende dalla natura delle rocce da cui provengono. Così nel seno di Sarconi, del Maglia e della Sciaura predominano gli elementi di rocce cristalline, strappati dalle acque correnti ai conglomerati eocenici di rocce cristalline, che abbondano lungo la parte orientale dell'alto corso del fiume Maglia: a essi si aggiungono prevalentemente frammenti di rocce del trias medio, portate via dalle ultime propaggini settentrionali del gruppo del Sirino. A destra e a sinistra dei torrenti Alli e Molinara prevalgono i frammenti di scisti silicei, tolti al trias medio del gruppo del Vulturino e di Viggiano, mentre lungo la costa meridionale danno ai conglomerati un discreto contributo i calcari cretacei di Saponara e Tramutola.

Nei conglomerati e nelle sabbie molto grossolane di Grumento e degli altri dintorni di Saponara si trovano frequentemente avanzi di grossi mammiferi estinti, che vengono conservati dai contadini e dai signori di quei luoghi come preziose reliquie; specialmente quando si tratti di ben riconoscibili avanzi di proboscidiani, i quali, come ho più innanzi accennato, son ritenuti come appartenenti agli elefanti perduti da Annibale nella sconfitta quivi subita da parte del console Claudio Nerone. In realtà non si tratta di *Elephas (Loxodon) Africanus* Lin., e tanto meno poi di quattro, quanti Anni-

bale a Grumento ne perdette, ma invece di numerosissime zanne, tibie, fibule, costole, e di non meno numerosi molari, femori etc. appartenenti a

Elephas (*Euelephas*) *antiquus* Falc.,

come risulta dalla lunghezza, gracilità e debole curvatura degli incisivi superiori, nonchè dalla grande altezza e dalla strettezza dei molari, di cui le lamine trasversali sono numerose, per la maggior parte diritte e molto scannellate: caratteri questi, che, insieme presi, escludono la possibilità che si tratti di *E. meridionalis* o di *E. primigenius*. Sia poi che si voglia considerare l'*E. antiquus* come una specie a sè, sia che la si ritenga come una varietà dell'*E. meridionalis*, la sua presenza nei nostri depositi lacustri ha molta importanza per decifrarne l'età. Infatti, quantunque sembri che esso abbia vissuto in Italia, Francia e Inghilterra nel pliocene più alto insieme all'*E. meridionalis*, pure la sua estensione massima ebbe luogo (v. Zittel, *Handbuch*, IV Bd.) nel diluvium preglaciale e interglaciale d'Alemagna (Taubach, Weimar, Apolda, Tonna, Mülhausen e altre località della Turingia, Mosbach, Wiesbaden, Mauer etc.), della Svizzera (Schotter interglaciale d'Utznach e di Dürnten), di Francia (Saint-Acheul, nella vallata della Somme, Chelles, in val di Marna, nei dintorni di Parigi e di Lione, Gironda etc.), d'Inghilterra (Tamigi e valle dell'Ouse), d'Italia (Torino, Milano, Pavia, Livorno, Val di Chiana, Val d'Arno, dintorni di Roma, provincia di Caserta e di Benevento, Basilicata, Calabria, Sicilia), della Spagna meridionale (Gibilterra, Siviglia), del Marocco e del sud della Russia. A provar meglio ciò, insieme a questi avanzi di *E. antiquus* si trovano nei dintorni di Saponara anche frammenti di corna, premolari e molari di

Cervus elaphus Lin.,

che, com'è noto, è uno dei fossili pleistocenici più abbondanti in tutta l'Europa e l'Asia occidentale. Ho anche raccolto un grande canino (lungo 17 cm. secondo la curvatura) con ogni probabilità appartenente a

Sus scrofa ferus Lin.

(esistente già nei Forest-beds d'Inghilterra e diffusissimo nel pleistocene d'Europa e d'Asia), nonchè altri avanzi di mammiferi, non suscettibili d'una esatta determinazione, ma dimostranti che accurate ricerche paleontologiche in quei luoghi darebbero buoni frutti.

10.

Tmc. Calcari a noduli di selce. — *Tms.* Scisti silicei. — *Hd.* Hauptdolomit. — *Cr.* Calcari cretacei. — *F.* Flysch eocenico superiore. — *Pslc.* Conglomerati pleistocenici lacustri. — *Pslf.* Lehm lacustre. (Scala 1:50.000).

C' è da aggiungere, che delle accette levigate di selce e di diabase, trovate forse nei medesimi conglomerati, sembrano accennare alla probabile contemporaneità dell'uomo neolitico con quelli animali pleistocenici e con l'esistenza del lago; siccome però queste accette non le ho trovate io in sito, ma mi sono state mostrate dopo raccolte, riferisco tal fatto solo per debito di storia.

Fin qui ho parlato delle varie specie di sedimenti, tenendole distinte l'una dall'altra, ma in realtà tale netta distinzione in natura non esiste e solo all'ingrosso si può riportare nelle carte geologiche e nelle sezioni. Non solo infatti i conglomerati, col graduale impicciolirsi degli elementi costitutivi, passano a sabbie, ma in queste esistono anche frequenti intercalazioni di quelli, e viceversa. Tanto i conglomerati che le sabbie poi, per cangiamento di elementi o per intercalazioni, passano al fango argillo-sabbioso rossiccio (Lehm o Loess) e mediante questo alle argille turchine plastiche. Così pure, mentre le sabbie e i fanghi hanno costituzione piuttosto uniforme, i conglomerati invece variano, come s'è visto, a seconda dei terreni dai quali provengono i loro costituenti. In generale in questo lago dell'Agri, al contrario di quel che avviene nel bacino del Mèrcure, le sabbie, i fanghi, le argille e i detriti minuti sono di regola sottoposti ai conglomerati grossi. Inoltre i fanghi sabbiosi (Lehm e Loess) sono sviluppati all'estremità sud-est del bacino, verso Montemurro e Spinoso, e, procedendo verso l'alto della valle, si assottigliano a poco a poco, per cedere il luogo ai conglomerati grossolani, che occupano, con frequenti intercalazioni fangose, la maggior parte della superficie del bacino. È necessario osservare ancora una volta la distribuzione di questi conglomerati. Nell'estremità settentrionale predominano quelli di natura mista, formati di elementi triasici medi e superiori, cretacei, eocenici (tanto calcarei che argillosi), trasportati dall'antico Agri e dai brevi affluenti della sponda destra, da Paterno a Tramutola. In corrispondenza del torrente Alli e del torrente Molinara predominano in modo assoluto i conglomerati a elementi del trias medio (strappati al gruppo del Vulturino e a quello del monte Pilato), che respingono l'Agri attuale fin contro la sponda meridionale del bacino. All'altezza di Saponara già si nota l'alternanza dei conglomerati grossolani con i fanghi sabbiosi, che poi pigliano così largo sviluppo verso Montemurro e Spinoso. A nord-ovest di Saponara, salendo per la mulattiera che va dal ponte di S. Vito a S. Sebastiano, sopra un'altezza di una ventina di metri s'incontra la seguente successione di terreni dal basso all'alto: Lehm, conglomerati grossolani, Lehm, conglomerati, Lehm, marne bianco-giallicce farinose (20 cm.), Lehm, conglomerati, Lehm, marne simili alle precedenti, Lehm. — Procedendo verso est si trovano superiormente i conglomerati portati dalla Sciaura e dal Maglia, composti anch'essi di elementi variabili, prevalentemente eocenici e triasici medi, e inferiormente i fanghi sabbiosi e le sabbie argillose, che poi si espandono largamente e s'ingrossano verso Spinoso e Montemurro, appunto perchè in quei luoghi sono maggiormente sviluppate le molasse del Flysch eocenico superiore, dal disfacimento delle quali il così detto Loess proviene. A S. Pietro e alla Serra Calcinara piccoli isolotti di scisti eocenici e di calcari probabilmente cretacei interrompono l'uniformità dei sedimenti. La distribuzione dei depositi spiega in modo semplice e naturale l'attuale corso dell'Agri. Questo fiume infatti, da Paterno a Saponara, non corre nel mezzo della valle, ma si mantiene lungo i fianchi meridionali di essa, toccando in alcuni punti e incidendo addirittura i terreni più antichi di sponda. Or bisogna riflettere, che dalla sponda settentrionale affluiscono nella valle torrenti e fiumi

come il Molinara e l'Alli, i quali, largamente nutriti dalle montagne alte da cui discendono e lunghi (fino alla lor foce nel bacino) da 5 a 6 chilometri, trascinarono nell'antico lago gran copia di materiali, gonfiandone i sedimenti con due larghe conoidi, che posteriormente furon poi incise dagli stessi corsi d'acqua che le avevano generate. Invece i pochi ruscelli della parte più alta della sponda meridionale han breve corso e poca pendenza: quindi il detrito da essi trasportato non solo era scarso, ma veniva anche ricacciato e limitato a sud dalle invadenti alluvioni provenienti dal gruppo del Vulturino e del monte di Viggiano. È naturale quindi, che, scolandosi gradatamente il lago, le acque correnti si adunassero lungo la depressione già esistente tra le gonfie conoidi del nord e le scarse alluvioni del sud, e che questa stessa depressione venisse poi in seguito incisa dalle medesime acque, cui già il preesistente modellamento del terreno aveva segnato il cammino.

§ 4.

Storia del bacino.

La storia del bacino dell'Agri, come anche quella degli altri bacini lacustri in questo lavoro descritti, si riattacca alla generale storia tettonica dell'Appennino meridionale mesozoico, che nelle sue linee principali è stata già abbozzata da De Lorenzo nei suoi *Studi di geologia nell'Appennino meridionale*: da questi dunque piglieremo le principali notizie sul nostro argomento.

I primi elementi nella modellazione delle sponde del bacino dell'Agri son dati dalle pieghe triasiche del gruppo del Vulturino e del Sirino, le quali con la loro direzione meridiana, tagliante obliquamente la catena appenninica, e con la transgressione immediata dei terreni liasici e cretacei sul Hauptdolomit sembrano indicare un movimento orogenico pre-liasico, che formò le prime vertebre rocciose di quella parte dell'Appennino. Le lacune tra il lias e la creta e tra questa e l'eocene medio possono avere varie spiegazioni: a ogni modo tanto esse, quanto l'ipotetico movimento preliasico poca importanza hanno per questi grandi bacini, di cui l'esistenza si palesa dopo il grande diastrofismo post-eocenico, che, accompagnato da una grande extravasazione di magma eruttivo, formò nella sua massa l'attuale Appennino e fece forse, verso la fine del miocene, emergere le terre nostre a un'altezza sul mare anche maggiore di quella che ora hanno. Posteriormente si ebbe una novella subsidenza, che portò le acque del pliocene superiore a più di 1000 metri sul mare attuale, e alla fine del pliocene ricominciò il sollevamento che tuttora continua in tutto l'Appennino meridionale. La storia tettonica probabile dei nostri bacini va dunque compresa in quest'ultimo periodo geologico, che dalla fine del miocene viene sino ai nostri giorni: essendo chiaro, che prima del grande diastrofismo eocenico, non esistendo ancora l'Appennino, nemmanco potevano esistere le grandi cavità, che di questo Appennino sono parte integrante. L'origine del bacino dell'Agri può dar luogo a cinque ipotesi principali diverse: esaminiamole una per una, per vedere quale di esse sia più e quale meno attendibile.

I. In seguito al grande diastrofismo eo-miocenico si sarebbe formato il bacino dell'Agri, che, chiuso a oriente da una barriera, la quale avrebbe in seguito impedito il passaggio alla transgressione del mare pliocenico superiore, si sarebbe dapprima presentato come un bacino d'acqua salmastra privo di sfogo. A poco a poco però le acque

dolci affluenti avrebbero diminuito e fatto scomparire del tutto la salsedine primitiva, innalzando nello stesso tempo il livello del lago, fino a farlo riversare verso oriente. Formatosi in questo modo (o pure per erosione regressiva, o per una qualsiasi altra cagione) l'emissario, che andava a poco a poco erodendo e approfondendo il suo letto verso est, le acque del lago gradatamente effluirono dal bacino, finchè, in tempo non lontano, questo rimase del tutto a secco. Stando così le circostanze originatrici del lago, si dovrebbero ora, sotto i sedimenti pleistocenici e pliocenici d'acqua dolce trovare anche quelli miocenici d'acqua salmastra e marina. Invece noi abbiamo visto, che il bacino è tutto riempito da depositi d'acqua dolce con fossili pleistocenici, e che sotto di questi si trovano immediatamente i terreni dell'eocene superiore e più antichi, e che le molasse di Spinoso e di Montemurro, se non appartengono addirittura all'eocene superiore, al più rimontano fino all'elveziano: invece dunque di andare a cercare le ragioni ipotetiche della scomparsa dei sedimenti, che questa prima ipotesi richiederebbe, è meglio scartare l'ipotesi stessa, come assai poco probabile.

II. Gli stessi movimenti orogenici avendo prodotto i medesimi effetti orografici, si può anche supporre, che l'avanzo di mare miocenico, rimasto chiuso ed isolato, con poco afflusso di acque dolci e con molta evaporazione, si sia gradualmente essiccato; e che posteriormente, per mutate condizioni climatiche, il bacino sia stato di nuovo riempito di acqua dolce. In tal caso rimarrebbe sempre difficile a spiegarsi la mancanza dei depositi marini miocenici e quella dei sedimenti saliferi e gessiferi, precipitatisi in seno a quello svaporantesi lago salato. Nè si può imaginare che tali sedimenti siano stati denudati prima del nuovo avvento delle acque dolci, perchè si dovrebbero pur sempre trovare raccolti in qualche punto i prodotti di tale denudazione, essendosi supposto sin da principio il bacino chiuso e separato dal mare. È evidente quindi, che anche quest'ipotesi non regge all'analisi critica.

III. Si può in terzo luogo supporre, che il diastrofismo eo-miocenico non avesse prodotto il bacino dell'Agri e che questo, formatosi per movimenti posteriori della crosta terrestre, sia stato riempito dalle acque dolci alla fine del pliocene o al principio del pleistocene. Ora nell'Appennino meridionale, dopo quel grande diastrofismo, non si è avuto che alla fine del pliocene un novello sollevamento, che tuttora dura e che ha portato i sedimenti del pliocene marino superiore a 1000 metri sul mare attuale: è dunque a questo sollevamento che bisognerebbe riferire la formazione del bacino dell'Agri e il successivo riempimento di esso mediante acque dolci. Ma questo movimento ha avuto un carattere generale, continentale o epeirogenico, e non è stato d'indole tale da produrre uno smembramento o modellamento orogenico molto notevole: infatti i sedimenti marini del pliocene superiore e del pleistocene, che scendono verso il Jonio, non sono tormentati da grandi fratture o da pieghe, ma sono in massa rialzati verso i monti, inclinando leggermente verso il mare in strati non interrotti o poco disturbati. È chiaro quindi, che anche questa supposizione non è accettabile.

IV. Date le medesime cause generatrici del bacino alla fine del miocene, e supponendo che un reliquato di mare miocenico sia rimasto in esso imprigionato, si può imaginare che la barriera orientale non sia stata tanto alta da opporre un impedimento alla transgressione del mare pliocenico superiore, e che questo si sia avanzato nel bacino, fondendo le sue acque con quelle già avanzate dal mare miocenico. In seguito poi al sollevamento postpliocenico le acque del bacino sarebbero rimaste legate al mare

mediante un emissario e si sarebbero a poco a poco addolcite. Anche in questo caso però bisognerebbe spiegare la mancanza di sedimenti miocenici marini e salmastri sotto quelli pleistocenici d'acqua dolce; e certo non è agevole solvere tale difficoltà.

V. Lasciando, alla fine del miocene, le medesime condizioni orografiche del caso precedente, si può infine supporre, che il lago di reliquato si sia gradualmente essiccato, che nel bacino abbia posteriomente avuto luogo una larga e profonda denudazione e che finalmente i prodotti di questa denudazione e il fondo e le sponde stesse del bacino siano stati ulteriormente abrasi dalla transgressione del mare pliocenico superiore. Quando alla fine del pliocene cominciò a manifestarsi il nuovo sollevamento, nel bacino rimase imprigionato un lago di reliquato, che comunicò sempre col mare mediante un emissario e che fu gradualmente addolcito dalle acque dei monti. Certo anche in questo caso rimane inesplicabile la mancanza di sedimenti marini del pliocene superiore sotto quelli lacustri pleistocenici, ma queste lacune dei sedimenti marini costituiscono ancora uno dei più disperanti problemi di tutta la scienza geologica, nè sono quindi una specialità del nostro caso: basta pensare alla misteriosa mancanza dell'eocene inferiore nei sedimenti marini eocenici del bacino del Mediterraneo. Viceversa quest'ipotesi spiega la mancanza dei sedimenti marini e lacustri miocenici, nonchè la denudazione e l'erosione e l'abrasione subita dal fondo e dalle sponde del bacino, prima di accogliere le acque e i sedimenti del pleistocene lacustre. Inoltre con essa si può ammettere l'incursione del mare pliocenico nella valle dell'Agri, cosa che rimane esclusa dalle prime tre ipotesi e che rende queste ipotesi stesse oltremodo improbabili, perchè non è assolutamente concepibile come il mare del pliocene superiore, il quale nelle nostre latitudini ondeggiò a più di mille metri d'altezza sull'attuale, non abbia superato la barriera orientale del bacino, la quale, dato il modo di procedere della denudazione postpliocenica, non poteva essere tanto alta quanto da quelle prime tre ipotesi viene imaginata. Pur non acquistando dunque un grado assoluto di certezza (cosa oltremodo difficile in tutte le speculazioni e induzioni geologiche) è questa l'ipotesi, che, sull'origine del bacino e del lago dell'Agri, presenta il numero maggiore di probabilità.

Qualunque sia stata la genesi del bacino dell'Agri, è certo che questo al principio del pleistocene era occupato da un gran lago di acqua dolce, il quale defluiva al mare, allora a 700 m. circa d'altezza sul mare attuale, mediante un emissario continuo e considerevolmente grande. Sotto quali condizioni visse e sotto quali si estinse questo lago?

Noi abbiamo visto, che i sedimenti scarsi inferiori sono fini e argillosi, mentre i superiori son rappresentati da potenti conglomerati grossolani: ciò potrebbe far pensare a un primo periodo di clima umido, ricco di foreste, che impedivano una larga e profonda denudazione e concedevano alle acque correnti solo del limo finissimo, seguito da un periodo di clima relativamente asciutto, in cui le nude montagne furono largamente e profondamente erose dalle alluvioni torrenziali, che trascinavano e depositavano nel lago gran copia di materiale grossolano o di sabbie argillose, a seconda della natura delle sponde del bacino. In tal caso il primo periodo corrisponderebbe forse alla grande o seconda epoca glaciale (Saxonian di J. Geikie) e al postpliocene siciliano e appenninico a faune nordiche, mentre il secondo periodo equivarrebbe alla seconda epoca interglaciale (Helvetian di J. Geikie) o epoca dell'*Elephas antiquus*. Così anche nell'America settentrionale infatti il periodo glaciale è, secondo Dana, seguito dal Champlain Period, rappresentato dall'esistenza di grandi laghi e di animali, ora estinti, di clima

caldo. Se poi il clima glaciale sia dovuto a un temporaneo sollevamento e l'interglaciale a un abbassamento delle terre, come vorrebbe Dana, o viceversa, come vorrebbe J. Geikie, è cosa che in questo caso non si può per ora dimostrare.

Mentre però i monti si andavano a poco a poco spogliando delle nevi e delle selve e le acque torrenziali impinguavano il lago con le loro alluvioni, l'emissario continuava infaticabilmente a incidere il suo corso nei terreni eocenici della sponda orientale, tendendo sempre a raggiungere il livello basale d'erosione, rappresentato dal mare che s'andava a mano a mano ritirando verso il Jonio attuale. Questa progressiva erosione dell'emissario produsse lo svuotamento graduale e il disseccamanto finale del lago, perchè quando la gola d'erosione giunse allo stesso livello dei sedimenti lacustri, non ci fu più per il bacino alcuna possibilità di contenere una massa d'acqua stabile. Da quel momento le acque affluenti alla valle dell'Agri diedero principio a un lavorio contrario a quello fin'allora usato, e mentre prima avevano colmato di sedimenti il bacino, cominciarono dopo ad attaccare questi medesimi sedimenti da essi depositati, incidendoli, devastandoli, smuovendoli e portandoli verso il mare. Veramente i corsi d'acqua della parte più alta della valle continuarono ancora per un pezzo, e alcuni di essi continuano tuttora a coprire di alluvioni la piana, mentre quelli della parte bassa, a grande pendenza, non fanno che erodere e distruggere. Così l'erosione procede dal basso all'alto, dal mare al monte, e mentre sotto Montemurro i depositi lacustri sono incisi dall'Agri e dai suoi affluenti immediati su una profondità di più che 150 metri, questa profondità si riduce a meno di 100 all'altezza dell'antico Grumentum, a una cinquantina di metri sopra Saponara, e va a mano a mano diminuendo, finchè verso Paterno l'Agri ha prodotto appena un solco leggiero nella superficie pianeggiante dei sedimenti lacustri. Intanto a est di Spinoso e di Montemurro lo stesso Agri, approfondendo sempre il suo corso nella stessa direzione segnata dall'antico emissario, è giunto, tra i piani di Miglierina e la Serra del Varco, a meno di 450 metri sul mare, vale a dire a più di 250 metri di profondità sotto il probabile livello della superficie dell'acqua dello scomparso lago pleistocenico, e ha già attaccato i terreni più antichi mascherati dal Flysch eocenico, mentre questo stesso Flysch si può seguire a monte lungo l'Agri fino alla confluenza col Maglia, palesandosi sempre come il terreno di fondo su cui si appoggiano i depositi lacustri. L'erosione, come già osservò Mallet, procede con grande celerità; le sponde dell'Agri e dei suoi affluenti smottano e si sfiancano, le sabbie si sfarinano, le argille si spappolano e i conglomerati si rompono e si sciolgono, mentre le acque sonanti rapiscono di nuovo l'antica loro preda e la trascinano con corso vittorioso verso le jonie acque azzurre, le quali chiamano a sè le sorelle dei monti, mentre vanno pur esse allontanandosi dagli antichi templi greci di Metaponto e di Heraclea.

II.

LAGO DEL MÉRCURE

§ 1.

Topografia, leggende, letteratura.

Il bacino del Mércure è compreso tra 39°55′ e 40°1′ di latitudine settentrionale e 3°29′ — 3°38′ di longitudine orientale dal meridiano di monte Mario. Si presenta come una larga valle concava di circa 80 chm. q. di superficie, transversalmente solcata da numerosi cañons o forre con pareti quasi verticali, che giungono a volte a 200 metri circa d'altezza, e percorsa longitudinalmente dal fiume Mércure, il quale si stende come una gran fascia d'argento da est a ovest, per poi piegare bruscamente a sud, incassandosi nella cupa gola di Lajno e ricevendo d'indi in poi il nome antico di Lao. I piani, che nella parte meridionale sono compresi tra i singoli cañons, essendo costituiti di pingui alluvioni e nutriti di acque abbondanti, sono ubertosissimi e hanno verde rigoglio di vegetazione; mentre le biancheggianti penisole marnose del lato settentrionale, non essendo così riccamente impregnate di acqua, sono alquanto più sterili. A nord il bacino è coronato dalla cinta argillosa eocenica, che da Castelluccio si stende fino a Viggianello, dietro alla quale spuntano i picchi arditissimi del monte Alpe e si profilano di lontano le linee maestose del gruppo del Sirino: invece a ovest, sud ed est si serrano e si accavallano le selvose montagne calcaree, che a sud-est, nei monti Apollinei, si rivestono di faggi e di abeti e s'innalzano fino 2272 metri sul livello del mare, costituendo i giganti dell'Appennino meridionale.

La forma concava e chiusa della valle e la stretta e profonda gola, per cui il Mércure scorre al mare, dovevano fin nella mente dei primi abitatori far sorgere spontanea l'idea, che in epoca remota si accogliesse in quel bacino copia grande di acque lacustri, le quali poi per improvviso cataclisma si fossero vuotate nel mare. Infatti a Rotonda ho sentito raccontare una diffusa leggenda popolare, secondo la quale tutto il bacino era un tempo occupato da un lago e che il terremoto, avvenuto quando Cristo spirò sulla croce, produsse sotto Lajno quella grande spaccatura verticale, per la quale le acque del lago effluirono al mare e per cui ancora continuano a scorrere tutte le acque della valle. A questa interessante leggenda sono connessi molti nomi attuali, che danno l'idea di laghetti, paludi e pantani a contrade, in cui ora non v'è più traccia di essi: ma sull'origine di questi nomi e sulla loro etimologia e sull'importanza che essi hanno per il nostro argomento avrò ragione di occuparmi più tardi, quando parlerò del lago della valle del Noce. Sarebbe necessario studiare l'etimologia del nome Lao, Lajno etc., perchè questo, anzichè di origine greca, potrebbe essere osko, come accennano i molti nomi oski (Vibius, Comius, Statius, Opsidius) trovati sulle monete dell'antica Laos.

Oltre queste leggende e testimonianze archeologiche abbiamo sul bacino del Mércure anche degli antichi cenni storici lasciatici da Plinio il giovane, che parla della città e del fiume Laos, e dall'accurato e dottissimo Strabone. Questi dà alcune notizie (Libro VI, Cap. I), che possono essere importanti per i cambiamenti geologici

avvenuti in queste contrade da quell'epoca fino ai nostri giorni: « μετὰ δὲ Πυξοῦντα Λᾶος κόλπος καὶ ποταμὸς Λᾶος καὶ πόλις, ἐσχάτη τῶν Λευκανίδων, μικρὸν ὑπὲρ τῆς θαλάττης..... » Infatti qui Strabone parla di un golfo del Lao (Λᾶος κόλπος), mentre ora il fiume Lao termina a mare con un delta prominente, simile a triangolo isoscele ottusangolo: è chiaro quindi che questo gran delta, largo alla base più di 10 chilometri, si è formato dopo i tempi di Strabone e che prima dell'era volgare esistesse in suo luogo uno spazioso golfo o seno (κόλπος), che dai promontori di Scalea e di Cirella s'internava molto nelle terre, fino a incontrare le acque dolci del fiume Lao (ποταμὸς Λᾶος). Ciò va d'accordo con la poca distanza (μικρὸν ὑπὲρ τῆς θαλάττης), che separava la città (Λᾶος πόλις) dal mare.

Dopo Strabone non si ha più su quelle contrade alcuna notizia interessante dal punto di vista geologico fino all'anno 1780, in cui Alberto Fortis fece il suo viaggio in Calabria. Fortis non solo (*Mineralogische Reisen durch Calabrien und Apulien*, Weimar 1788, pag. 38) trovò le conchiglie lacustri nelle marne bianche del bacino del Mércure: « In der Gegend von Castelluccio beobachtete ich grosse Schichten einer weisslichen Kalkerde, die zur Düngung der Aecker sehr geschickt sein müsste; in einigen derselben fand ich, ehe ich an das Ufer des Lao kam, eine Menge sehr weisser Conchilien, die den berühmten Conchilien aus Touraine ähnlich waren », ma descrive anche (id. id., pag. 42) con molta esattezza l'antico bacino lacustre del Pantano, a sud di Mormanno: « Von Mormanno nahm ich den Weg auf der Landstrasse durch das oben erwähnte Thal, und gelangte zu einem kleinen runden Kessel, il Lago (der See) genannt, der rings umher mit Kalkbergen umschlossen war, und vor Alters Wasser gehalten zu haben scheint ». Queste notizie di Fortis e le altre, già citate, di Sartorius von Waltershausen su Campotenese, sono tanto più interessanti, in quanto che molto tempo dopo di loro, nessuno più s'accorse dell'esistenza di antichi laghi nelle nostre regioni.

Così Pierre de Tchihatchoff nel suo *Coup d'œil sur la constitution géologique des provinces méridionales du royaume de Naples* (Berlin, 1842, pag. 154) descrisse molto bene i sedimenti del bacino di Rotonda, senza peranco sospettarne la loro origine lacustre: « Le bassin de Rotonde a une forme alongie dans la direction de l'E. à l'O.; au N. O. il continue en une bande étroite le long de la grande route jusqu'à la plaine presque circulaire nommée Campo del Galdo. Des montagnes plus ou moins hautes entourent le bassin de toute part, et ses bords élevés, surtout du côté de Castelluccio superiore (Castelluccio inferiore est déjà dans le domaine tertiaire) se détachent fortement des masses mollement ondulées, qui constituent le fond du bassin, et qui malgré leur composition analogue à celle des collines de la Basilicata, n'en offrent ni l'aspect décharné ni la monotonie, étant presque toujours animées par une riante verdure. Des couches puissantes et plus ou moins horizontales de sable, de galet, de marne, et d'argile, forment la substance de ces dépôts, à travers desquels on voit, de temps à autre, percer les roches calcaires, quelquefois en volume très considérable. C'est ainsi que le sommet de la hauteur sur laquelle est construite Rotonda, placée presqu'au centre du bassin, ne présente que du calcaire jurassique, tandis que ses flancs, qui portent une partie de la ville, son revêtus de dépôts tertiaires; et plus loin, au N.N.O. de cette dernière, tout près de Castelluccio inferiore: un rempart de calcaire, également jurassique, traverse, comme un gros filon, une partie du bassin ». A parte l'errore, perdonabilissimo per quei tempi, di ritenere giurassici dei calcari eocenici, chiunque abbia visitato quei luoghi non può non ammirare l'esattezza di questa descrizione.

Anche De Giorgi, nelle sue *Note geologiche sulla Basilicata* (Lecce, 1879) ritenne come riempito da pliocene marino il bacino di Rotonda. Quindi molto importanti sono i pochi righi scritti su questo bacino dall'ing. G. B. Bruno nel suo *Breve cenno geologico sull'alta valle del fiume Sinni* (Potenza, 1891), perchè egli con essi rivela pel primo la natura lacustre dei depositi della valle del Mércure, quantunque erri nell'assegnarli al pliocene: « Nel limitrofo bacino del Mércure il pliocene è rappresentato da un'importante formazione lacustre, che raggiunge la potenza di m. 250 ed è di grande estensione superficiale. Sono banchi di sabbie e di argille, e nella parte più alta non mancano i travertini incrostanti e la torba, ultimi prodotti di quell'immenso lago prima della sua completa disparizione ». Dello stesso Bruno sono le notizie geologiche contenute nel lavoro di Lacava sul *Sito di Lao, Blanda e Tebe lucana* (Napoli, 1891): « Il bacino del Lao fu veramente un lago di vaste dimensioni, col suo asse maggiore rivolto da Viggianello a Laino, e col minore da Castelluccio a Rotonda. La giacitura e posizione dei terreni è proprio quella di un lago. Rotonda poggia sopra un masso calcareo, che come isola si elevava su questo lago. Vi è tra Castelluccio inferiore, Viggianello e Rotonda un grande deposito di torba dipendente dall'accumulo delle erbe palustri vegetanti alle sue sponde; torba che in un luogo brucia da varii anni, senza che alcuno si fosse dato pensiero di estinguerla. Castelluccio inferiore poggia su d'un deposito di materiali, che colmarono questo grande lago, depositi trasportati da torrenti in essi immittenti. A maggior conferma di essere stato questo bacino un lago, si trovano delle conchiglie lacustri; e il tufo, che è pure una formazione lacustre, si rinviene in varii luoghi. Il lago poi per lungo tempo fu laguna, onde l'accumulo della torba ». Bisogna fare tanto maggior conto di queste giuste vedute di Bruno, in quanto che esse pochi anni dopo furono affatto dimenticate.

Infatti, dopo che nel Bullettino dell'Accademia Gioenia di scienze naturali (Gennaio 1895) De Angelis ebbe annunziato l'esistenza de *L'Elephas antiquus Falc. nei dintorni di Laino-Borgo*, nonchè di molluschi d'acqua dolce e di diatomee nelle marne della medesima località, comparve, nel vol. IX delle Memorie descrittive della carta geologica d'Italia, la *Descrizione geologica della Calabria* dell'ing. Cortese, nella quale invano si cercano su quel bacino le diffuse ed esatte osservazioni, che da essa si potevano aspettare. Non si trovano peranco accennati i numerosi fossili che gremiscono quei depositi e che erano stati visti fin dal 1780 da A. Fortis, e tutte le descrizioni si riducono a poche notizie sparse qua e là. A pag. 169 son citati i conglomerati del pliocene marino superiore, che si vedono a Laino, il che va d'accordo con quel ch'è segnato nella carta geologica 1:500.000, che accompagna il volume, nella quale il bacino di Rotonda è colorato appunto come costituito da terreni di quella specie. Ma a pag. 211 si trovano i seguenti periodi, che io non giungo a comprendere bene: « Questa erosione del Lao si è prodotta lungo una spaccatura naturale, generatasi secondo un'anticlinale, nella quale sono penetrate le acque di scarico del bacino lacustre di Laino e Rotonda. Fra questi paesi e Castelluccio, si estende una massa di depositi pliocenici, coperti anche da depositi recenti, nelle parti basse. Tutto questo rivela un antico bacino chiuso, durante l'epoca pliocenica, e infatti i depositi di questa età sono conglomerati di ciottoli calcari, alla base, e argille sabbiose tenui, al di sopra. I depositi posteriori accennano poi veramente ad un lago. Il corso d'acqua, fino che arriva alle gole di Laino, si chiama Mércure, e nella parte inferiore del suo corso diventa il Lao. Tutto

il bacino pliocenico e il lago quaternario si sono scolati per quella gola, che le acque hanno inciso sempre più profondamente ». Che significa tutto ciò? Se i depositi sottostanti appartengono al pliocene marino, come è detto innanzi e dipinto nella carta, come mai si son depositati in un bacino chiuso? Forse il bacino lacustre risale al pliocene? Questa ipotesi pare esclusa dalla frase « i depositi superiori accennano poi veramente ad un lago » e dalla distinzione messa tra « il bacino pliocenico e il lago quaternario »; dunque si tratta solo di un lago quaternario, che doveva essere anche molto piccolo, giacchè a pag. 194 è detto che « il più esteso bacino quaternario lacustre, che supera di gran lunga tutti gli altri, è il Campo Tenese che ha un'estensione di 10 chilometri quadrati ». Ma allora perchè descrivere l'ampio bacino di Rotonda come « un antico bacino chiuso, durante l'epoca pliocenica? »

Negli *Studi di geologia nell'Appennino meridionale* (Napoli 1896) De Lorenzo diede un elenco di fossili raccolti in quei depositi e una succinta descrizione del bacino: « Una storia quasi del tutto simile (a quella del lago dell'Agri) ha avuto l'antico lago quaternario del Mércure, di cui ho già precedentemente descritti i depositi, principalmente rappresentati in basso e al centro da marne bianche con diatomee e dreissensie e da argille grige con numerosi avanzi di molluschi d'acqua dolce, e sopra e ai margini da sabbie, ghiaie e conglomerati con avanzi di mammiferi. Questi depositi ora sono incisi per tutta la loro lunghezza e larghezza, e per una profondità di più che 120 metri, dal fiume Mércure e dai suoi affluenti, la Canalèa, il Turbolo, la Laura, la Truscera, S. Primo, Grottascura, la Cagna etc., che prima avevano largamente contribuito alla formazione dei depositi stessi. Le sponde del bacino sono rappresentate: a nord-ovest dalle dolomiti triasiche e dai calcari cretacei del monte Zacchena; a nord dal Flysch eocenico superiore a rocce eruttive e dai sedimenti pliocenici, che si stendono da Castelluccio fino ai Piani della Croce, a est e a sud dai terreni dolomitici e calcarei, triasici, liasici e cretacei fortemente dislocati, che formano le pendici estreme del gruppo del Pollino tra Viggianello e Mormanno, e a cui qua e là si addossano dei lembi di Flysch eocenico superiore con rocce eruttive; a ovest predominano le dolomiti triasiche, i calcari liasici e i calcari cretacei. Le comunicazioni tra il lago, prima salmastro e poi dolce per la grande quantità di acqua portata dagli affluenti, e il mare in via di regressione eran mantenute per il lato più basso del bacino, a sud-ovest, verso Papasidero e Scalea, e in questa direzione appunto l'emissario scavò il suo letto, tagliando non più le erodibili rocce argillose eoceniche, come l'Agri, ma secando invece i durissimi calcari eocenici, cretacei e liasici.... » Nelle *Geologische Beobachtungen in der südlichen Basilicata und dem nordwestlichen Calabrien* von E. Böse u. G. De Lorenzo (Jahrbuch d. geol. Reichsanstalt in Wien, Bd. 46, 1896) si trovano press'a poco ripetute le medesime cose con alcune nuove osservazioni di dettaglio.

Finalmente nella sua nota *Per la Geologia della Calabria settentrionale* (Boll. Soc. geol. ital., 1896) il dott. G. Di Stefano ribadisce la postpliocenicità dei depositi del bacino di Laino e di Rotonda, chiudendo così la serie degli scrittori, che fino ad oggi si sono occupati di questo argomento.

§ 2.

Terreni delle sponde e del fondo.

Nei su nominati lavori di Böse, De Lorenzo e Di Stefano si trovano numerose notizie, che rischiarano alcun poco la costituzione geologica, molto complicata e in parte ancor molto oscura, di quelle montagne selvagge e inaccesse della Basilicata meridionale e della Calabria settentrionale.

Il terreno più profondo dei dintorni del bacino di Rotonda è rappresentato dal Hauptdolomit, ossia da una pila potente di dolomiti bianche, grige, scure o nere, ricche di avanzi di *Gervilleia exilis* Stopp. sp., di *Pleurotomaria solitaria* Ben. sp. etc., di raro intercalate da strati calcarei. Così costituito questo terreno forma le rupi pittoresche su cui è fabbricato Castelluccio superiore, il monte Cardalano, la parte inferiore di S.M. della Zàcchena, m. Zàcchena e Conca Scotella e, girando per i monti Mangosa, Ginipero e Petrara, si espande per Fodenoi e Lillipietre verso Lajno e Mormanno, dove è profondamente inciso dal Lao e dal suo affluente, il Battiniero. Ripiglia poi ad est di Mormanno nel monte Cerviero e dà le ultime rappresentanze alle propaggini estreme del gruppo del Pollino, immediatamente a sud di Rotonda fino al Vallone di Mauro, al di là del quale si estingue

Un retico s. str. non è stato con sicurezza finora trovato nell'Italia meridionale, quindi al Hauptdolomit tengon subito cronologicamente dietro i calcari scuri e grigi, cristallini e compatti, del lias inferiore e medio, che sono riccamente rappresentati nel gruppo del Pollino, sembrano mancare in quello del monte Zacchena e Mangosa e si trovano forse di nuovo nella sponda destra del Lao, da Laino al monte Ciagola.

I calcari cretacei, predominantemente a rudiste, subordinatamente a nerinee, sono molto sviluppati nel gruppo dei monti Zacchena e Mangoso, dove si appoggiano direttamente sul Hauptdolomit; scarseggiano nelle montagne della sponda meridionale; sono invece sviluppatissimi lungo la sponda orientale, nel gruppo del Pollino, dove, appoggiandosi sul lias, costituiscono con grandi pile la Serra di Mauro fino al Vocolio, il monte Saria e le rupi della regione Alberigo. Forse al cretaceo sono anche da riferirsi, secondo Di Stefano, i calcari a sezioni megalodontiformi, che si trovano a sud di Mormanno. In appoggio di questa sua opinione aggiungo, che io stesso al Monte Spina, sopra Acquafredda, ho trovato dei calcari grigi cristallini a grosse sezioni cordiformi, spatizzate, situati concordantemente tra i calcari del cretaceo superiore e quelli dell'eocene medio, in posizione tale però, da non poter con sicurezza stabilire, se spettano ai primi piuttosto che ai secondi; lo stesso Di Stefano del resto non esclude, che questi calcari della Calabria settentrionale a sezioni megalodontiformi possano anche spettare all'eocene medio.

L'eocene medio poi in quelle contrade è indiscutibilmente rappresentato dai calcari nummulitici, ricchi di frammenti di rudiste e di ellipsactinie, che si stendono indifferentemente sui calcari cretacei, sui liasici e sul Hauptdolomit. Essi sono massimamente sviluppati nel gruppo del Pollino e in quello del Cerviero; formano inoltre l'isolotto calcareo, su cui è edificato il castello di Rotonda e la parte del paese a nord della piazza; compariscono nella gola del fiume Sirico presso il mulino e formano l'alta sco-

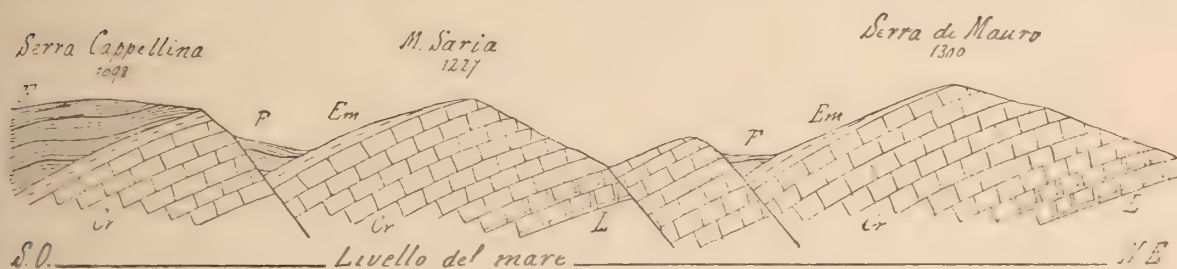
Istituto Geografico Militare. 1898.

gliera che si trova quasi al confluente del torrente Bongianni col Mércure, a nord-est del Piano Coperto. Probabilmente è anche costituito da calcari eocenici l'isolotto di Monte Petrasso, a sud-est di Castelluccio.

Tutti questi terreni sono, specialmente nelle parti più basse, coperti da un ampio e spesso mantello del Flysch, che dall'eocene superiore sale forse fin nel miocene inferiore. Mentre nel Flysch della valle dell'Agri predominano le arenarie e i conglomerati grossolani, qui invece abbondano gli scisti marnosi e argillosi associati a numerose rocce eruttive verdi (dioriti, diabasi, gabbri, serpentine etc.), cui fanno corona tufi e sedimenti tufogeni, più o meno metamorfosati, simili spesso in tutto a scisti cristallini antichi. Questo Flysch costituisce tutta la sponda settentrionale del bacino, dai monti Cardalano e Misciarulаro a est di Castelluccio, fino alla regione Alberigo, a nord-est di Viggianello, nonchè tutta la sponda meridionale, dall'imbocco della gola del Lao presso Lajno fino al fiume Sirico a sud di Rotonda. Inoltre esso comparisce quasi sempre dove l'erosione ha profondamente inciso i sedimenti lacustri, palesandosi così come la prevalente roccia di fondo.

Qua e là, specialmente nella sponda settentrionale, lungo il corso del fiume Peschiera e del Sinni, le rocce mesozoiche e terziarie antiche sono coperte dalle argille turchine e dai conglomerati potentissimi del pliocene superiore, che salgono fino a 1000 m. circa sul mare e inclinano in massa e leggermente verso il Jonio.

Le sponde del bacino possono, dal punto di vista geologico, scindersi in due categorie diverse, che naturalmente danno dei tipi di paesaggio del tutto differenti tra di loro. A est e a ovest sono formate da alte montagne prevalentemente calcaree mesozoiche, a nord e a sud da minori elevazioni, predominantemente costituite da rocce argillose cenozoiche; mentre però a nord queste molli alture terziarie si espandono ampiamente, stendendosi fino al fiume Sinni e al di là, a sud invece si addossano immediatamente a una nuova barriera calcarea mesozoica, quella del Velatro e del Cerviero.

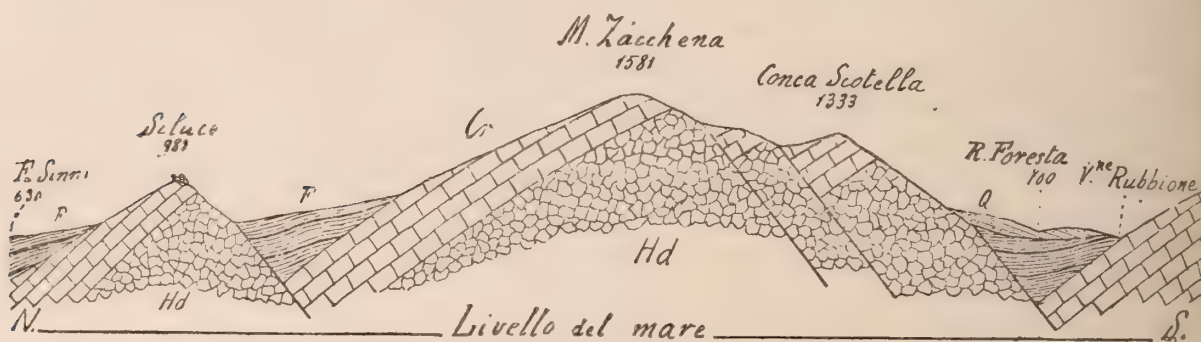
11.

L. Lias? — *Cr.* Calcari cretacei a rudiste. — *Em.* Eocene medio? — *F.* Flysch eocenico superiore. (Scala 1:50.000).

La tettonica dei diversi terreni, quantunque informata a una sola idea dominante, varia nelle singole parti e si complica in maniera straordinaria.

A est il gruppo del Pollino, essenzialmente formato da Hauptdolomit, lias, creta ed eocene medio, e subordinatamente rivestito qua e là dal Flysch eocenico superiore, presenta una tettonica molto complicata, in cui però i motivi dominanti son dati da una generale inclinazione degli strati verso nord e verso nord-est e da una doppia se-

rie di fratture principali: vale a dire da un fascio di fratture longitudinali, dirette da nord-ovest a sud-est, e da un altro di fratture trasversali, normali alle prime, dirette da sud-ovest a nord-est. Se infatti si fa da nord-est a sud-ovest, ossia dalla valle del Frido sotto S. Severino lucano fino al Vallone di Mauro, una sezione nella sponda orientale del bacino, si ottiene una serie di fratture longitudinali con spostamenti a staffa o a gradinata di grandi blocchi calcarei (Schollen), nei punti più bassi dei quali si trovano, rispettati ancora dalla denudazione, gli ultimi avanzi del Flysch eocenico superiore. Per tali fratture a gradinata sporgono anche dai sedimenti lacustri i calcari eocenici di Rotonda e quelli che son messi a nudo dall'erosione in fondo al vallone Sirico, vicino al mulino. Fratture trasversali, interrotte da fratture longitudinali, han prodotto l'uniforme linea di sponda orientale, diretta anch'essa da sud-ovest a nord-est.

Una simile disposizione tettonica si riscontra nella sponda occidentale, rappresentata dai gruppi dei m. Zacchena e Mangosa e costituita prevalentemente da Hauptdolomit e cretaceo, subordinatamente da eocene superiore; forse qua e là tra il trias e il cretaceo esistono dei lembi di lias, come tra il cretaceo e l'eocene superiore si troveranno anche degli strati di calcari mummulitici, ma io non ho potuto constatare l'esistenza degli uni nè degli altri. Anche qui gli strati inclinano in generale verso nord-est e si hanno delle fratture longitudinali a gradinata, dirette da nord-ovest a sud-est, e delle fratture trasversali, molto irregolari, dirette generalmente da nord-est a sud-ovest.

12.

Hd. Hauptdolomit. — *Cr.* Cretaceo. — *F.* Flysch eocenico superiore. — *Q.* Alluvione quaternaria. (Scala 1:50.000).

A causa di tali fratture vien fuori tra i sedimenti lacustri l'isolotto calcareo (cretaceo o eocenico) del Petrasso a sud-est di Castelluccio e l'altro, di calcari o di scisti eocenici, denudato dal torrente Bongianni presso alla sua confluenza col fiume Mércure. L'intersezione delle fratture trasversali con le longitudinali dà luogo alla linea di spiaggia occidentale. In conclusione, il bacino del Mércure, sito tra il gruppo montuoso del Pollino e quello del Zacchena, rappresenta una conca fratturata ovvero una plaga spezzata e abbassata rispetto alle regioni collaterali, non inabissatasi però in blocco, come sogliônsi imaginare gli sprofondamenti a bacino (Kesselbrüche), ma approfonditasi gradatamente mediante numerosissime e importanti dislocazioni.

A nord, nello spazio compreso tra il m. Alpe, il gruppo del m. Zacchena e quello del m. Pollino, si addensa il Flysch eocenico superiore a rocce eruttive, coperto in trasgressione dai sedimenti del pliocene superiore, che si ammassarono e stratificarono

di prevalenza nelle depressioni dovute alla denudazione prepliocenica. Nel letto del fiume Sinni, tra Latronico e il m. Brancato, le filladi eoceniche sono dirette da nord-

13.

F. Flysch eocenico superiore. — *Pla.* Pliocene superiore (argille). — *Plc.* Pliocene superiore (conglomerati). (Scala 1:50.000).

ovest a sud-est, vale a dire nello stesso senso della catena appenninica; nel piano a est del m. Brancato, alto 700 m. circa, che è probabilmente un terrazzo formato dal mare pleistocenico, si trovano in esse le prime intercalazioni di rocce eruttive verdi, che poi si ritrovano di nuovo in fondo al vallone della Mola, al Serrapollo, al Cannataro, alla Fagosa etc. I sedimenti e i sedimenti tufogeni sono rappresentati da rocce simili a scisti cristallini antichi: argilloscisti, filladi, micascisti, calcescisti, oficalci, ofisilici, calcari cristallini etc. La parete meridionale de la Fagosa offre nuda allo sguardo una magnifica sezione, in cui si ponno studiare strato per strato tutte le intercalazioni, gli avvicendamenti e le metamorfosi dei sedimenti, sedimenti tufogeni, tufi e rocce eruttive, depositatesi probabilmente tutte nel fondo del mare eocenico. Il pliocene superiore è rappresentato da conglomerati rossicci, prevalentemente costituiti da frammenti di rocce eoceniche e subordinatamente da blocchi di rocce mesozoiche, potenti da 400 a 500 metri, che in basso passano a sabbie argillose, argille sabbiose e argille turchine, in qualche punto molto ricche di fossili, come per es. sulla sinistra del Sinni, tra Latronico ed Episcopia. A Chiaromonte nei conglomerati furon raccolte due grosse zanne di *Elephas meridionalis*, conservate nel Museo geologico dell'Università di Napoli, che indicano con una certa approssimazione l'età di quei depositi marini. Le rocce del Flysch sono molto contorte e fratturate: invece i sedimenti pliocenici, i cui ultimi lembi salgono nei fianchi della Fagosa fino a 1000 m. sul mare, inclinano uniformemente e in massa, con leggiera pendenza, al Jonio.

Sulla sponda meridionale vigono i medesimi rapporti. I monti del gruppo del Cer-

14.

Hd. Hauptdolomit. — *F.* Flysch eocenico superiore. — *Psl.* Pleistocene lacustre. (Scala 1:50.000).

viero e del Velatro sono limitati da numerose fratture longitudinali e trasversali, lungo le quali è scivolato, abbassandosi a nord, il Flysch eocenico, che sostiene i sedimenti

lacustri, ricco anch'esso, come quello della sponda settentrionale, di rocce eruttive verdi, che si presentano specialmente lungo le pendici rivolte a maestro del monte Cerviero e in quelle settentrionali del Colle Trodo. Lo Hauptdolomit dei dintorni di Mormanno inclina a sud, e sembra così formare la parte meridionale di una gigantesca cupola, di cui la parte settentrionale sarebbe rappresentata dal gruppo dei monti Zacchena e Spina: a simiglianza di quanto si verifica nel resto dell'Appennino meridionale.

§ 3.

Sedimenti.

I sedimenti del bacino del Mércure sono costituiti, per quantità, qualità e distribuzione, in modo diverso da quelli del bacino dell'Agri. Mentre in questo infatti predominano in modo assoluto i depositi di origine meccanica, nella vallata di Rotonda invece a essi si mescolano largamente e si fondono in considerevole quantità dei sedimenti d'origine organica e anche puramente chimica. Essi possono in generale ripartirsi in tre grandi categorie: detrito e depositi di sponda; conglomerati d'origine meccanica; calcari lacustri e marne.

Il detrito di sponda, che si trova quasi da per tutto intorno agli orli dei bacino, appeso o attaccato alle rocce antiche in strati fortemente inclinati, si compone di blocchi grandi e piccoli, strappati immediatamente alla sponda, appena lisciati dal movimento ondoso di spiaggia, a volte del tutto angolosi, insieme caoticamente ammassati, senza alcuna separazione meccanica dei componenti, e cementati da una pasta fangosa o argillosa molto eterogenea. Questo detrito è massimamente sviluppato lungo la sponda nord-est e quella sud-ovest, mentre nelle altre parti non è facilmente distaccabile dai sedimenti normali, con i quali si confonde e ai quali passa gradualmente anche lungo i due lati suddetti. A Castelluccio inferiore, e anche in parecchi altri punti, associati e sovrapposti a questo detrito di sponda si trovano dei banchi di travertino molto poroso, ricco di foglie e di cauli erbacci incrostati, simile al travertino della Calda di Latronico, e al pari di questo depositato dalle sorgenti calcarifere sgorganti dalle pendici del gruppo del m. Zacchena.

I conglomerati, specialmente abbondanti nei lati sud e sud-ovest, costituiscono il terreno fondamentale e più potente in tutto il bacino. Gli elementi che li formano provengono da tutte le rocce di fondo e di sponda, descritte nel precedente capitolo, e hanno grossezza variabilissima, da grossi blocchi di $\frac{1}{2}$ metro cubico e più di volume fino a ciottoletti piccolissimi. Di solito le dimensioni appunto dei componenti producono la stratificazione e distinguono uno strato dall'altro, ma non raramente nello stesso strato evvi varietà grande di composizione, come naturalmente deve avvenire in materiale trascinato da potenti alluvioni e depositato in un fondo lacustre di dimensioni non eccessivamente grandi. Il colore predominante di questo terreno è dato da una bella tinta giallo-rossastra, dovuta alla parte argillosa limonitifera infiltrata nel cemento calcareo, che lo fa distinguere fin da lontano lungo le scoscese e nude pareti dei cañons o valloni, che solcano il bacino: in qualche punto però, come per es. a Lajno Castello, la roccia assume una tinta chiara, biancastra, per la grande quantità di blocchi dolomitici e calcarei in essa inclusa. Lungo la sponda settentrionale prevalgono le puddinghe poligeni-

che, varicolori, createsi a spese del Flysch eocenico superiore, ricco di rocce eruttive, che forma appunto quella sponda. Intercalate in strati, o come variazioni locali di strati a elementi grossi, si trovano delle arenarie, delle sabbie, sabbie argillose, dei fanghi e delle plaghe di vero Lehm, che però rimangono sempre confinate ad alcuni punti, e non assumono, come nel bacino dell'Agri, una grande diffusione. Però, come in questo, così anche nel bacino di Rotonda le argille turchine non acquistano mai una grande estensione e potenza, e si trovano soltanto qua e là (Vallone Garavetti, Vallone Sirico, Vallone di Mauro, Vallone Turbolo etc.) come piccoli lembi, sotto gli altri sedimenti e immediatamente addossati al Flysch eocenico del fondo o delle sponde, di cui sembrano un'alterazione dovuta alle acque correnti. I conglomerati tra Lajno e Mormanno superano i 200 m. di potenza.

Come intercalazioni o inclusioni tra questi conglomerati si trovano a volte (p. es. a S. Onofrio, lungo la nazionale che da Mormanno scende al Mércure) strati o lenti di marne e marne calcaree, giallastre, compatte, che contengono delle concrezioni digitiformi, argillose, di color giallo, simili a riempimenti di vacuoli scavati da molluschi litofagi e identici in tutto alle concrezioni argillose, gialle, dei noti calcari cretacei ittiolitiferi di Pietraroja. Se però le concrezioni di Pietraroja potrebbero anche ritenersi come riempimento di fori di litofagi — cosa non sempre facilmente dimostrabile —, non può dirsi altrettanto di questi delle marne della valle del Mércure, di cui ancora non ho potuto farmi un concetto esatto. Esse, in ogni caso, debbono ritenersi, o come vere concrezioni argillose in un ambiente più ricco di calce, o come riempimenti di vacuoli prodotti da organismi. In qualche altro punto, come p. es. nella via carrozzabile da Rotonda a Viggianello, queste marne calcaree acquistano tanto di calce, o perdono tanto di silice, da dar luogo addirittura a un vero calcare d'acqua dolce, o limnocalcite, di color giallo-rossiccio, compatto nella pasta, ma ricco di cellette e di vacuoli e di pori, con frattura scheggiosa o concoide. Alcuni dei fori o vacuoli sono apparentemente informi e sembrano dovuti a organismi vegetali; altri invece mostrano chiara l'impressione delle conchiglie lacustri (*Planorbis*, *Limnaeus* etc.) che li produssero e di alcune delle quali ancora si conserva intatto, o quasi, il delicatissimo guscio. Questi calcari lacustri compatti sono però piuttosto rari rispetto agli altri sedimenti. Nei conglomerati e nelle sabbie che li accompagnano si trovano, a volte, ma molto raramente, avanzi di mammiferi, appartenenti ai generi *Cervus*, *Sus* e all'*Elephas antiquus* Falc.

Invece hanno una larghissima diffusione e acquistano una grande potenza (circa 150 metri a ovest di Viggianello) le marne bianche conchiglifere, che furono osservate e descritte fin dal 1780 da A. Fortis e che costituiscono una vera caratteristica del bacino di Rotonda. Esse hanno in generale color bianco o bianco gialliccio, tendente a volte a un pallido giallo crema, e non raramente hanno anche delle variazioni in grigio, dovute al prevalere del materiale argilloso sul calcareo: hanno anche una stratificazione molto sottile, ma netta, che sembra appunto dovuta a leggieri cambiamenti verticali nella natura della roccia. Queste marne assumono la maggiore potenza nell'angolo nord-est del bacino, presso Viggianello, e di là vanno assottigliandosi e svanendo a misura che si procede verso nord-ovest e sud-est, in modo che nell'angolo estremo sud-ovest, tra Mormanno e Lajno, non se ne trova più alcuna traccia. Questa disposizione è dovuta al fatto (che esamineremo anche appresso), che i maggiori corsi d'acqua e le maggiori alluvioni in antico, come ancor oggi s'avvera, scendevano dai gruppi mon-

tuosi del Pollino e del Cerviero, in modo che le marne finissime, e le conchiglie e le diatomee in esse incluse, potevano depositarsi e prosperare prevalentemente nelle acque tranquille e più limpide della sponda orientale e settentrionale, da cui non scendevano che brevi e scarsi ruscelli, carichi solo del limo finissimo tolto al Flysch eocenico. Per la medesima ragione probabilmente nelle marne si formarono i grossi banchi di lignite, di cui alcuni ora ardono spontaneamente. La successione poi delle marne molto fine ai conglomerati grossolani può indicare anche, come abbiamo visto precedentemente pel bacino dell'Agri, dei cambiamenti nelle condizioni climatiche di quei luoghi, durante il periodo vitale del bacino lacustre. In queste marne sono abondantissimi gli avanzi di molluschi di acque dolci e salmastre, che, come abbiamo innanzi visto, furono osservati fin dal 1780 da Fortis e sfuggirono poi, strano a dirsi, a tutti gli altri geologi che percorsero quelle regioni. In generale essi sono equamente distribuiti nella roccia, che li impasta, ma non di rado formano da sè degli straterelli, in cui non ci è quasi più traccia di materiale marnoso. La presenza di queste conchiglie aumenta in modo notevole il tenore in calce delle marne, in cui, come vedremo qui appresso, la parte silicea è anche di origine organica, dovuta cioè agli innumerevoli avanzi di diatomee. Tra i resti di molluschi prevalgono assolutamente quelli dei gastropodi, sia per numero di individui che per numero di generi e di specie; a essi si associano subordinatamente quelli dei lamellibranchiati. Qualche volta però, come ad esempio lungo la sponda destra della Canalèa, sotto Viggianello, avviene di trovare degli strati di 10-20 cm. di spessore, molto continui ed estesi, costituiti per intero da gusci di dreissensie insieme ammassate. Molto interessante dal lato biologico sarebbe lo studiare tutti i molluschi delle marne a cominciare dagli strati più bassi fino ai più alti, a 150 m. circa sopra i primi, per vedere quali cambiamenti sono eventualmente avvenuti nelle forme successive. Le conchiglie sono fragilissime ed è molto difficile il poterle bene isolare; tra esse possonsi distinguere numerosissimi individui appartenenti alle specie seguenti:

Valvata piscinalis
Bythinia tentaculata
Hydrobia stagnalis
Hydrobia ventrosa
Limnaeus ovatus
Limnaeus truncatulus
Limnaeus stagnalis
Limnaeus palustris
Planorbis complanatus
Helix pulchella
Dreissensia De Stefanii
Dreissensia ex aff. Dr. polymorphae

La *Dreissensia De Stefanii* Di Stef. è una nuova specie recentemente trovata da Di Stefano nei sedimenti del lago quaternario di Teano. Essa e gli altri fossili dimostrano a sufficienza l'età pleistocenica dei depositi del bacino del Mèrcure.

Trattando queste marne con acido cloridrico si ha un notevole residuo argilloso, in parte di origine meccanica, in parte formato da avanzi abbondantissimi di diatomee. Il dott. De Gasparis, studiando queste diatomee in quattro campioni raccolti, dal basso all'alto, sopra una medesima verticale di 7 a 8 metri d'altezza della sponda sinistra della Canalèa, sotto Viggianello, ha ottenuto i seguenti risultati.

Nel primo campione, che più degli altri mostra abbondanza di materiale depositatosi meccanicamente, non vi ha quasi traccia alcuna di diatomee.

Nel secondo si notano le seguenti forme:

Nitzschia amphioxys
Nitzschia plana
Nitzschia vivax
Campylodiscus costatus
Navicula radiata
Navicula elliptica
Gomphonema capitatum
Gomphonema vibrio
Epithemia turgida
Epithemia argus
Epithemia Hyndmanni
Cymbella turgida
Cymbella Ehrenbergi
Cymbella prostrata
Amphora ovalis
Amphora membranacea
Pinnularia oblonga
Cyclotella operculata
Spongilla lacustris

Nel terzo campione si ripetono quasi tutte le specie del secondo.

Nel quarto invece si ha:

Cocconema cymbiforme
Amphora ovalis
Amphora aponina
Synedra ulna
Navicula elliptica
Navicula acuta
Navicula radiata
Navicula vulgaris
Encyonema caespitosum
Himantidium Soleiroli
Himantidium undulatum
Himantidium pectinale
Cyclotella Kutzingiana
Cyclotella compta
Cyclotella operculata
Ennotia monodon
Epithemia gibba
Epithemia turgida
Epithemia argus
Epithemia alpestris
Epithemia ocellata
Epithemia saxonica
Epithemia sorex
Epithemia ventricosa
Epithemia zebra

Epithemia Hyndmanni
Ceratoneis arcus
Melosira distans
Melosira varians
Melosira arenaria
Melosira granulata
Cymbella lanceolatum
Pinnularia Brebissoni
Pinnularia nobilis
Pinnularia oblonga
Tryblionella angustata
Gomphonema intricatum
Gomphonema constrictum
Achnantes flexella
Achnantes exilis
Cocconeis pediculus
Cocconeis lineata
Cocconeis placentula
Cocconeis salina
Cocconeis helvetica
Campylodiscus costatus
Campylodiscus spiralis
Pleurosigma alternatum
Cymatopleura elliptica
Diatoma vulgaris
Diatoma Ehrenbergi
Tetracylus lacustris
Fragilaria mutabilis
Fragilaria Harrisoni
Grunovia tabellaria
Stauroneis punctata
Spongilla lacustris.

Come si vede, non c'è grande differenza nelle faune diatomifere dei tre campioni, ove si faccia astrazione dal gran numero di specie e dal grande sviluppo delle *Epithemiae* nell'ultimo saggio, numero e sviluppo dovuti forse a circostanze locali più che ad altro, come pure a circostanze locali deve probabilmente attribuirsi la mancanza di diatomee nel primo campione. Le forme appartengono tutte alle acque dolci, tranne qualche specie, che può vivere anche nelle acque salmastre: ciò è naturale, perchè il punto della Canalèa, in cui i quattro campioni furono raccolti, corrisponde non alla parte inferiore, ma quasi alla parte mediana dei sedimenti lacustri del bacino, parte che si depositò quando le acque del gran lago, se pur prima erano state salate o salmastre, erano già divenute interamente dolci.

Le varie sorta di sedimenti non sono nettamente staccate tra di loro, ma piuttosto si fondono e si confondono l'una con l'altra, in modo che riesce impossibile separare i vari membri con estrema precisione, quantunque, presi nelle masse maggiori, sia piuttosto agevole distinguerli con una certa chiarezza. Così il detrito di sponda passa gradualmente tanto alle marne che ai conglomerati, e questi non solo passano alle marne per una graduale diminuzione di elementi e per un contemporaneo arricchimento di argilla fina e di carbonato di calce, ma anche si avvicendano con essa per banchi in-

tercalati, in guisa che, come in tutti i sedimenti di origine continua, si passa a poco a poco da un terreno all'altro, senza potersi fermare a un limite netto e sicuro tra i due.

Ciò non ostante all'ingrosso nel bacino del Mércure si può tener nettamente distinta la gran massa delle marne bianche dalle potenti accumulazioni di conglomerati rosso-giallastri: anzi, siccome le prime sono ricchissime e i secondi scarseggiano di fossili, è necessario studiarne i rapporti stratigrafici vicendevoli, per trarne delle deduzioni cronologiche e corologiche. A prima vista pare che le marne siano posteriori e superiori ai conglomerati, e così è di fatto in alcuni punti; ma dopo un maturo esame si giunge alla conclusione, che quelle rappresentano, in massima, dei sedimenti contemporanei ed eteropici di questi. Infatti, si ponga prima di tutto mente ai rapporti altimetrici dei due depositi. L'altezza media della parte superficiale dei sedimenti lacustri del bacino di Rotonda oscilla tra 450-550 m. sul livello del mare, e quest'altezza è indifferentemente occupata dalle due specie di terreni, dalle marne a nord-est e dai conglomerati a sud-ovest: cosa importante, quando si tenga presente, che in questi depositi lacustri non esistono grosse disturbanze tectoniche e che gli strati, non piegati o dislocati, pendono uniformemente con leggera inclinazione verso la parte centrale del bacino. Così la media altezza della parte profonda dei sedimenti, messa a nudo dall'erosione del Mércure e dei suoi affluenti, sta tra 250 e 350 m., e ad essa corrispondono tanto marne che conglomerati. Ai 250 metri di potenza, che i conglomerati raggiungono a Lajno, corrispondono i 150 metri di potenza delle marne nelle colline a ovest di Viggianello, e i due spessori sono esattamente proporzionali alla tenuità di questi e alla grossolanità di quei depositi. Vero è che a nord-ovest di Lajno, a sud di Castelluccio, e intorno a Rotonda i conglomerati sono sempre sottoposti alle marne; ma non è men vero, che alla sommità della Serra, a ovest di Viggianello, e in altre colline, sopra le marne si trovano di nuovo dei lembi abbastanza potenti di conglomerati. Pare quindi che i depositi di marne bianche rappresentino, verticalmente, un grande cuneo, di cui la base è situata a Viggianello e l'apice è rivolto verso sud-ovest. A prova di ciò si ascendano gli altipiani del Cugno, della Guardia e della Montagna, a sud-ovest di Rotonda, e si vedranno nitidamente, nelle precipiti pareti dei cañons d'erosione, le marne assottigliarsi gradatamente e finalmente incunearsi tra i potenti conglomerati, che costituiscono quegli altipiani. Siccome però è indiscutibile la sovrapposizione delle marne più basse della regione Imparco, a ovest di Viggianello, sui conglomerati messi a nudo dall'erosione alla confluenza della Canaléa col Mércure, si deve definitivamente conchiudere, che la sedimentazione delle marne cominciò alquanto tempo dopo le prime alluvioni dei conglomerati, ma che la gran massa di esse, a nord-est, sia da ritenersi contemporanea alla gran massa di conglomerati sviluppata a sud-ovest. Le ragioni poi, per cui, mentre nella plaga di Viggianello si depositavano le marne finissime fossilifere, in quella di Lajno si deponevano conglomerati molto grossolani, sono state già dianzi accennate. Lungo la sponda meridionale esistono ancora al giorno d'oggi dei corsi d'acqua, come il Mauro, il Sirico, il Battiniero, i quali, giungendo alle sponde dell'antico lago dopo essere stati nutriti da montagne acquifere, altissime e nevose, e dopo un corso di 7 a 15 e più chilometri, con un dislivello, dalle loro sorgenti, di 700, 800 e 1000 metri, portano un gran volume d'acqua e copia grande di materiale d'erosione. Invece lungo la sponda settentrionale i ruscelli maggiori non oltrepassano, fino alle rive dell'antico lago, i 3 o 4 chilometri di lunghezza, con un dis-

livello, che appena in qualche punto raggiunge i 400 metri. Inoltre a sud si hanno montagne costituite da rocce dolomitiche e calcaree molto dure, mentre a nord prevalgono le colline formate dal Flysch eocenico superiore di natura argillosa, facilmente franoso e spappabile sotto l'azione delle acque. Queste differenze erano press'a poco le stesse durante l'esistenza del lago e noi le troviamo infatti rispecchiate nei sedimenti del bacino. Non solo a sud prevalgono i conglomerati, ma questi si gonfiano in due grandi conoidi in corrispondenza dei due maggiori corsi d'acqua affluenti al lago, dell'attuale vallone di Mauro cioè e del fiume Battiniero sotto Mormanno. Il Battiniero, avendo il corso più lungo ed essendo alimentato dagli altri due bacini lacustri di Campo Tenese e del Pantano sotto Mormanno, era il più potente tributario del lago; infatti i conglomerati da esso trascinati occupano quasi la metà di tutto il bacino, si stendono a nord fin quasi a Castelluccio, e da Lajno, curvandosi a vôlta nella regione Fornari, vanno ad abbassarsi e a fondersi verso Rotonda con la conoide creata dall'antenato dell'attuale vallone di Mauro. Frattanto a nord e a nord-est il limo finissimo, lavato via dalla sponda settentrionale, veniva a depositarsi pianamente nelle acque limpide di quella parte del lago e, inglobando gli avanzi di diatomee, di piante e di molluschi, che là prosperavano rigogliosamente, dava origine alle attuali marne bianche, ricche di diatomee, di conchiglie e di lignite.

Alcune sezioni trasversali e longitudinali nei sedimenti del bacino illustreranno

15.

Hd. Hauptdolomit. — *Cr.* Calcari cretacei. — *F.* Flysch eocenico superiore. — *Pslc.* Conglomerati lacustri. — *Pslm.* Marne lacustri. (Scala 1:50.000).

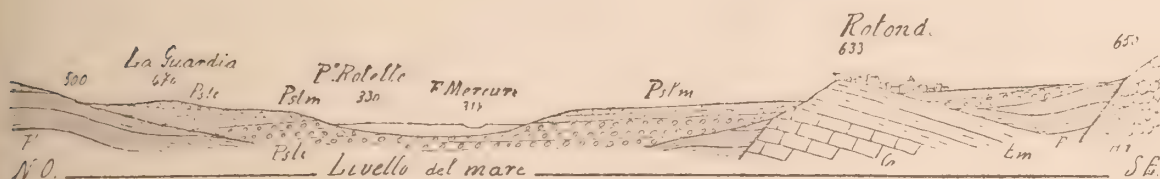
meglio il già detto. Scendendo dalla regione Alberigo, a nord-est di Viggianello, per S. Elia, Acropoli, la Serra e l'Imparco fino al Mércure e di qua risalendo verso i primi

16.

Hd. Hauptdolomit. — *F.* Flysch eocenico. — *Pslc.* Conglomerati lacustri. — *Pslm.* Marne lacustri. — *l.* Ligniti. (Scala 1:50.000).

contrafforti del gruppo del Pollino, s'incontra dapprima il detrito di spiaggia appoggiato all'eocene e poi una gran massa di marne bianche a gastropodi e dreissensie, po-

tente circa 100 metri, coronata in alto da due masserelle di conglomerato rossiccio e appoggiata in basso ai potenti conglomerati, che scendono dalla sponda settentrionale in strati inclinanti sempre verso nord. Il passaggio tra questo conglomerato inferiore, potente più di 100 metri sulla sponda meridionale, e le marne bianche non è brusco, come apparisce da lontano, ma avviene per gradi, mediante passaggi ad argille turchi-

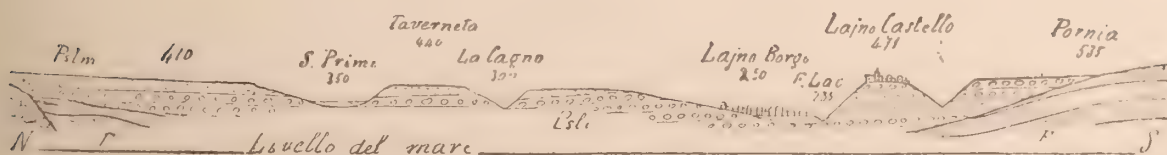
17.

Hd. Hauptdolomit. — *Cr.* Cretaceo. — *Em.* Eocene medio. — *F.* Flysch eocenico. — *Pslc.* Conglomerati lacustri. — *Pslm.* Marne lacustri. (Scala 1:50.000).

nicce impure e ad argille marnose. Nell'altipiano compreso tra il fiume di Grottascura, a est di Rotonda, e quello che scende dal vallone di Mauro, le marne sono di nuovo coronate da un conglomerato simile a quello di base (v. fig. 16). Lungo le fiumare del Turbolo e della Laura le marne raggiungono e passano i 150 metri di spessore e con-

18.

Cr. Cretaceo. — *F.* Flysch eocenico. — *Pslc.* Conglomerati lacustri. — *Pslm.* Marne lacustri. (Scala 1:50.000).

tengono intercalati dei letti di lignite, a volte autocomburenti. Nella sezione successiva verso ovest (v. fig. 17) c'è da notare l'isolotto di calcari eocenici di Rotonda, di cui gli strati sono diretti da nord-ovest a sud-est e inclinano fortemente a nord-est, mentre la frattura longitudinale, da cui è stato messo in evidenza, si trova a sud-ovest, anche

19.

Hd. Hauptdolomit. — *F.* Flysch eocenico. — *Pslc.* Conglomerati lacustri. — *Pslm.* Marne lacustri. (Scala 1:50.000).

essa, naturalmente, diretta da maestro a scirocco. Intorno a questo scoglio, probabilmente del tutto sommerso sotto le acque dell'antico lago, si depositarono le marne bianche a gastropodi e dreissensie, e i conglomerati su cui ora è edificata la parte meridionale e più recente del paese di Rotonda. Un altro scoglio di simil genere, composto di calcari brecciati eocenici, alternanti verso l'alto con scisti argillosi e con arenarie, si trova al confluente del Bongianni col Mércure e propriamente all'angolo nord-est del Piano Coperto. Questo stesso Piano Coperto e il limitrofo Piano Rotelle e gli altri piani che si stendono allo stesso livello fino a Lajno Borgo, su essi appunto edificato, rappresentano le antiche alluvioni del Mércure, che le ha già profondamente erose con i suoi affluenti. La collina invece su cui s'erge Lajno Castello è un prodotto di denudazione e d'erosione, rimasto isolato dai potenti conglomerati lacustri della Pornia dei Colli e de l'Anzo, di cui faceva in origine parte integrante. I conglomerati dell'Anzo, a ovest di Lajno Borgo, si appoggiano alle rocce più antiche di T. S. Angelo e Colle Maurojanni, lungo le quali formano una nettissima terrazza marginale. Risalendo i valloni, che da occidente scendono verso Lajno ad affluire nel Mércure, dapertutto sotto i sedimenti lacustri s'incontra il fondo del bacino, per la maggior parte costituito dal Hauptdolomit, i cui blocchi dislocati sono coperti da lembi di Flysch eocenico superiore, oppure, più raramente, da calcari liasici (?), cretacei e dell'eocene medio. Il m. Petrasso, vicino Castelluccio, è costituito appunto da calcari grigi, forse eocenici, i cui strati inclinanti a nord-est lo appalesano quale un frammento staccato dal gruppo del m. Zacchena. Così in fondo al vallone Sirico, a sud-ovest di Rotonda, e propriamente sotto il Mulino s'incontrano di nuovo i calcari eocenici identici a quelli della collina di Rotonda, da cui forse si sono staccati mediante una frattura longitudinale con spostamento a gradinata. Siccome ai due lati del vallone i calcari eocenici sono di nuovo coperti e mascherati dai sedimenti lacustri, si ha un bellissimo esempio dell'erosione in Puppenzustand di Richthofen. Infatti il fiume Sirico, spinto nella sua attuale direzione da una qualche originaria depressione dei sedimenti lacustri, cominciò a incidere direttamente le tenere marne e i disgregabilissimi conglomerati; e quando giunse sulle testate de' sottoposti durissimi calcari eocenici, trattenuto dalle sue sponde e non potendo più deviare a diritta o a sinistra, dovette continuare e continua tuttora a incidere verticalmente gli stessi calcari in una direzione

20.

Hd. Hauptdolomit. — *L.* Lias? — *Cr.* Cretaceo. — *Em.* Eocene medio. — *F.* Flysch eocenico superiore. — *Pslc.* Conglomerati lacustri. — *Pslm.* Marne lacustri. (Scala 1:50.000).

tale, che nei tempi futuri, quando la denudazione avrà portato via facilmente i circostanti sedimenti lacustri, se il mondo continuerà ancora a riflettersi in cervelli simili ai nostri, questi rimarranno imbarazzati a spiegare quella strana valle di erosione così come rimaniamo imbarazzati attualmente noi, nello spiegare le nostre valli odierne.

§ 4.

Storia del bacino.

Nelle montagne, che circondano il bacino del Mércure, non è visibile traccia alcuna di terreni del trias medio, quindi in questo caso non si possono ammettere, come s'è fatto pel bacino dell'Agri e si farà per quello del Noce, gli effetti orografici visibili di un movimento orogenico pre-liasico e bisogna confinarsi all'esame stratigrafico delle rocce, che compongono immediatamente le sponde del bacino. Queste rocce, principalmente rappresentate dal Hauptdolomit, il lias, la creta, l'eocene medio e il Flysch eo-miocenico, sono disposte in una pila di strati concordanti, tutti di natura sedimentaria, tranne quelle del Flysch, in cui si trovano le prime intercalazioni di rocce eruttive, massicce e tufacee. Le lacune, che si trovano in questa pila, rappresentate dalle transgressioni parallele del lias, del cretaceo e dell'eocene medio sui terreni più antichi, non sono dovute a movimenti orogenici, ma piuttosto ad oscillazioni epeirogeniche o ad altre cause ancor non bene accertabili. Il primo vero movimento orogenico ci è indicato dalle rocce eruttive del Flysch, le quali accompagnarono lo svolgimento del grande diastrofismo appenninico, che, cominciato alla fine dell'eocene, si protrasse, diminuendo d'intensità, lungo tutto il miocene e si chiuse con la grande ed estesa emersione del piano pontico. Siccome il successivo sollevamento postpliocenico ebbe, come abbiamo innanzi dimostrato, carattere epeirogenico e non produsse notevoli dislocazioni regionali, è chiaro, che tutti gli attuali grandi rilievi montuosi e le profondità notevoli, e tra queste naturalmente anche il bacino del Mércure, sono essenzialmente dovute alla prima e più grande fase (eocenica) del diastrofismo terziario, e subordinatamente alla estesa e profonda denudazione, e possibile abrasione, da cui quel movimento orogenico fu accompagnato e seguito.

Ora, facendo per questo bacino del Mércure una serie di ragionamenti identici a quelli dianzi usati per la conca dell'Agri, si giunge, per l'origine di questo lago, a conclusioni simili a quelle ottenute per l'origine di quello. Bisogna anzitutto escludere le prime tre ipotesi, secondo le quali il mare pliocenico non sarebbe mai penetrato nel bacino in discussione, perchè siccome ora i conglomerati a *El. meridionalis* del pliocene superiore marino della valle del Sinni salgono fino all'altezza di circa 1000 metri sotto La Fagosa e coronano tutto il ciglione del bacino, è sommamente improbabile, anzi addirittura inverosimile, che le acque, in cui quei conglomerati si depositavano, non abbiano anche occupato la sottoposta larga conca del Mércure. Così bisogna concedere pochissime probabilità all'altra supposizione, per cui le acque marine, abbandonate dal sollevamento miocenico, si siano poi fuse di nuovo con le acque posteriormente introdotte nella vallata dalla transgressione pliocenica; perchè resterebbe inesplicata la mancanza di depositi miocenici e pliocenici sotto i sedimenti lacustri pleistocenici. Veramente questa difficoltà non resta del tutto eliminata neanche con l'ultima

ipotesi, secondo la quale il bacino, prodotto dal movimento orogenico eo-miocenico, ulteriormente modellato dalla denudazione e dall'abrasione, che precedettero l'avanzarsi del mare pliocenico superiore, rimase occupato dalle acque di questo, che, col sopravvenire del nuovo sollevamento postpliocenico, dettero luogo prima a un braccio di mare, poi a un lago salmastro e quindi a un lago di acqua dolce effluente al mare. Infatti anche in questo caso resta misteriosa la sovrapposizione diretta dei sedimenti lacustri quaternarî al Flysch eocenico-superiore, che rappresenta il più recente terreno del fondo e delle sponde; ma la difficoltà è diminuita, perchè così non bisogna spiegare altro, che la mancanza di sedimenti marini del pliocene superiore sotto quelli lacustri, mentre nelle ipotesi precedenti, oltre questa, sussistevano altre gravi difficoltà.

Qualunque sia stata l'origine prima del lago, è certo però, che, all'aurora del pleistocene, il bacino attuale del Mércure era occupato da una grande massa d'acqua, salmastra forse dapprima e poi dolce, la cui superficie ondeggiava a più di 650 metri sul mare attuale e di cui le acque si scaricavano a sud-ovest, dalla parte più bassa dell'orlo della conca, nelle acque marine tirreniche ancor poco lontane. I corsi d'acqua effluenti al lago, trascinando gran copia di materiale d'erosione, parte sospeso e parte disciolto, lo depositavano in fondo al bacino — in alcune parti ricco di vita animale e vegetale — che così a poco a poco riempissi d'una pila di sedimenti d'origine meccanica, chimica e organica, la quale raggiunse e passò i 250 metri di spessore. I fossili trovati in questi sedimenti, e specialmente l'*El. antiquus* di Lajno e l'abbondanza delle *Limnaeidae* nelle marne, che denota un clima umido e freddo, indicano che il lago esistette probabilmente durante la seconda, o grande epoca glaciale (Saxonian di J. Geikie) e l'epoca interglaciale che la seguì (Helvetian di Geikie) ossia proprio durante il pleistocene, usando questo nome nel senso retto e originario datogli da Lyell.

Intanto, mentre i materiali d'alluvione e di precipitazione si depositavano in seno al bacino, le copiose acque alpine, che li avevano portati, gonfiavano il lago e traboccavano dall'orlo più basso di esso (dato dai blocchi abbassati e fratturati, che si trovano a sud-ovest di Lajno), effluendo al mare, che andavasi sempre più spostando verso occidente, a causa del sollevamento postpliocenico. L'emissario, spinto dalla forza di gravità a raggiungere il sempre sfuggente livello basale d'erosione, incideva sempre più profondamente il suo letto, provocando il contemporaneo abbassamento delle acque del lago; e quando l'imbocco dell'emissario giunse a livello della superficie dei sedimenti, che riempivano il bacino, questo si trovò del tutto vuotato di acque. Allora cominciò immediatamente un lavorio perfettamente inverso a quello sino a quel punto seguito. Le acque, che avevano infaticabilmente spogliato le montagne per accumulare in quell'ampia conca il prodotto del loro lavoro distruggitore, ora, quasi avendo riacquistata nuova forza in quella sosta temporanea, ricominciarono non meno infaticabilmente a erodere i sedimenti da esse medesime creati, per fluitarli al mare; in modo che il lago rappresenta quasi una sosta benefica nella corsa vertiginosa dei materiali terrestri dai monti al mare, o un grande collettore, che, per non sprecare della forza, affida a un solo e grande corso d'acqua il lavorio, che dovrebbe essere ripartito tra mille rivoletti. Quanto poi questa sosta o trasformazione delle forze fisiche geologiche abbia giovato allo sviluppo delle forze vitali contemporanee, e come le une e le altre siano tra loro strettamente e *teleologicamente* legate, non è qui il caso di esaminare, avendo intenzione di occuparmene in un altro mio lavoro di indole più filosofica, o meno empirica, che

questo non sia. Certo si è, che questo cambiamento nella maniera d'operare delle forze terrestri, ossia questa trasformazione dell'opera creativa in opera distruttrice (distruttrice pel lago, creatrice pel mare) avvenne nel bacino di Rotonda (Mércure) alquanto tempo prima dello stesso avvenimento nel bacino dell'Agri, perchè in questo l'erosione è molto meno avanzata che in quello non sia. Da per tutto infatti nel bacino del Mércure i sedimenti lacustri sono ampiamente e profondamente erosi dal Mércure e dai suoi affluenti, in modo che strette penisole, a superficie piana o ondulata, sono limitate da profondi, oscuri e ramificati cañons, di cui il solco primitivo fu determinato da originarie depressioni dei terreni lacustri superficiali. Anche qui come nel bacino dell'Agri, gli effetti massimi dell'erosione esistono naturalmente nella parte più prossima all'emissario antico e al mare e i minimi in quella più lontana.

Il letto del Mércure, al punto in cui supera i limiti del bacino e piglia il nome di Lao, si trova ora appena a 230 metri sull'attuale livello del mare e a circa 420 metri sotto il livello dei sedimenti costieri dell'antico lago; vale a dire che dal tempo dell'esistenza di questo lago fino ad oggi il livello delle acque fluenti in quel punto si è abbassato di più che 400 metri. Tale caduta d'acqua, per quanto lenta e appena percettibile dai nostri sensi, ha naturalmente prodotto un lavoro d'erosione enorme. I conglomerati di Lajno Castello sono incisi per una profondità di 240 metri, e più a valle la gola del Lao, nella parte dovuta alla sola erosione, diventa sempre più profonda. Il Battiniero, il Laganello vicino Lajno, il canale della Cagna e gli altri affluenti più bassi del Mércure scorrono tutti in cañons d'erosione (scavati nei sedimenti lacustri fino a toccare le rocce di fondo), le cui pareti a picco raggiungono e passano i 200 metri d'altezza; il Sirico, la Scala, la Laura, la Truscera etc., quantunque abbastanza profondamente scavati, non agguagliano la profondità di quelli; finalmente anche la parte più alta della valle e dei sedimenti lacustri è incisa per più di 100 metri d'altezza dal Turbolo e dalla Canalèa; in modo che qui non esiste più una parte dei sedimenti ancor piana ed intatta, come quella che si trova nell'apice più alto della valle dell'Agri, tra Marsiconuovo, Tramutola e Marsicovetere. Quando il letto del Mércure era giunto presso Lajno Borgo all'altezza di poco meno di 300 metri sul mare, avvenne, forse a causa delle dure rocce dolomitiche e calcaree incontrate più a valle, un rallentamento nel lavorio d'erosione e quindi nella velocità delle acque fluenti, per cui molto materiale si depositò nell'ampio letto della fiumara e diede origine ai depositi di alluvione recente (Piano Rotelle, Piano Coperto etc.) che si trovano tra il confluente del Truscera col Mércure e Lajno, sulla sponda destra del fiume, che poi li ha secati di nuovo. Questo rallentamento di velocità potrebbe essere anche dovuto a che l'erosione aveva forse per un certo tratto di tempo proceduto con più vigore verso l'alto, anzi che verso il basso del bacino, in modo che qui si venne a formare una specie di diga o di strozzatura, a eliminare la quale occorse una nuova breve sosta. Probabilmente i primi uomini assistettero, con gli elefanti, gli orsi e i rinoceronti, all'estinguersi graduale del gran lago, e l'imagine che di esso riecvettero nelle loro vergini menti si conserva forse ancora nelle vaghe leggende ereditate per lungo ordine d'anni; quando però le tribù pelasghe e le oske e le elleniche si stabilirono in quelle plaghe, il bacino dell'Agri aveva press'a poco acquistato l'assetto attuale, quantunque non fosse ancora a questo identico, come ne fanno fede le già citate testimonianze di Strabone. Ora le acque continuano senza posa la loro opera musicale, lenta e formidabile, trascinando le disciolte montagne al Tirreno, che sempre più ritrae le sue acque glauche lungi dai cupi boschi dell'Appennino.

III.

LAGO DEL NOCE

§ 1.

Topografia, leggende, letteratura.

Il bacino del Noce, abbracciante, nella parte occupata dall'antico lago, un'area di circa 55 chm. q., si stende tra 40°1′ e 40°6′ di latitudine settentrionale e tra 3°17′ e 3°24 di longitudine orientale dal meridiano di Monte Mario in Roma. Del tutto diversa dalle altre grandi vallate dell'Italia meridionale, nelle quali i piani fecondi si offrono volonterosi e lieti al faticoso lavoro umano, questa valle del Noce ha pure il suo peculiare carattere di bellezza, triste e grave, datole dal severo paesaggio, che d'intorno grandeggia imponente. A scirocco, austro, libeccio, ponente e maestro si estollono dalle valli brune i massicci monti calcarei, nereggianti di boschi o biancicanti di roccia viva, che formano il tipo dominante e l'ossatura dell'Appennino meridionale; a greco invece e a levante con ampie, aeree volute s'innalza rapidamente verso il cielo il colossale gruppo del Sirino, sulle cui superbe spalle d'inverno è gettata una candida cappa di neve e di ghiaccio, di primavera e d'estate un verde ammanto d'erbe e di boschi, d'autunno un imperial mantello di porpora. E immediatamente sotto la bella montagna si stendevano un giorno le acque cerulee dell'antico lago: là dove ora s'apre larga e profonda la concava valle.

Come nel bacino del Mércure, così anche in questo del Noce vive ancora il leggendario ricordo d'un antico lago, ora estinto. A Lagonegro comunemente si crede, che lungo il corso del fiume Serra, tra il Castello, il Timpone rosso e Monte Jatile, esistesse in tempi antichissimi un lago profondo e scuro, da cui poi prese il nome il paese. In altri punti ancora i nomi di lago, pantano, palude, etc. ricordano la presenza di acque in punti ora perfettamente asciutti. Tutto ciò ha costituito sempre per me un interessante problema, perchè in tali luoghi realmente dei laghi esistevano, ma questi laghi, contemporanei o di poco posteriori all'epoca glaciale, non furono visti che dagli uomini quaternarî, che appena cominciavano a maneggiare armi di pietra: come pretendere dunque, che l'imagine impressa in quelle vergini menti si sia tramandata e mantenuta fino ai nostri giorni? Si deve credere, che il ricordo e il concetto sia rimasto intatto mentre pur si mutavano le genti e i linguaggi? O pure le antiche radicali fonetiche son rimaste immutate in servizio dell'idea primeva?

Imbarazzato da tali quistioni, ho voluto su esse chiedere il giudizio del mio sapiente amico, dott. K. E. Neumann di Vienna, il profondo ed elegante traduttore dei discorsi di Gótamo Buddho dai testi Pali; ed egli mi ha concisamente accennato le possibili varie soluzioni filologiche di questo problema della geologia dell'Appennino meridionale.

« I. *A priori* scheint deine Vermuthung nicht ganz ungegründet, es könne sich in *lago* noch ein Sprachrest einer längst vergangenen Urzeit finden, als man mit dem Worte den Begriff des Eisigen, Gletscherhaften bezeichnen wollte. Wir haben im keltischen *ladgo*, *ladgá* für Schnee, irisch *ladg*, *ladhg*, littauisch *ledas* Eis, russisch *led*,

und so noch *ledus, ladis, ladu* im lettischen, bez. altpreussischen, altkirchenslavischen. Der Uebergang von *d* in *g* bietet keine Schwierigkeit, kommt vor.

II. Ist es aber denkbar, dass sich von der Sprache des quaternären Menschen Resten erhalten haben sollten? Ich denke nein. Hätten sie sich aber erhalten, so würde es uns unmöglich sein irgend etwas mit ihnen anzufangen. Denn der quaternäre Mensch war *kein* Indo-Europäer, wie es die Knochenfunde dieser Periode am Bodensee evident beweisen. Es bleibe also nur noch übrig in die praehistorische Zeit herabzusteigen & eine Besiedelung von Unteritalien durch Keltoslaven anzunehmen; das ist zwar möglich, aber ob wir, in dieser verhältnissmässig doch späterer Zeit, da noch Gletscher annehmen dürfen, wage ich nicht zu bestimmen. Immerhin wäre die Sache denkbar & dann ergäbe sich allerdings ein Verhältniss von ladgo ↪ led: lago.

III. Die bekannteren Etymologien von lago sind:

1) indoeurop. $\sqrt{\text{leik}}$ fliessen lassen; davon liquor, liqueo, liquidus.
2) laghus flach; davon: λάχεια (Homer) flach, lágr (altnord.) niedrig, laege (mhd.) do., legho liegen, dazu gehörig: laegr, lago, lagu, See.
3) $\sqrt{\text{leq}}$, $\sqrt{\text{lenq}}$ biegen, einsenken; davon: lacus, λάκκος, irisch: loch, kirchensl: lomu, littauisch: lekmene, alle i.d. Bedeutung See, Sumpf & dergl.

Weniger bekannt ist:

4) Albanesisch, lagém, lagám, Mine, unterirdische Kanal, vergl. türkisch lagém, mazedonisch lagame, neugr. λαγούμι; (laguna?)
5) Indisch (der Kuriosität halber), lákschâ Lack, mittellatein: laca, ital. span. etc.: lacca, bez. laca, frz......... laque. Unter diesem «Lack» kann nun sehr wohl Harz in Allgemeinen, *Baumharz*, verstanden worden sein schon seit sehr alter Zeit.

IV. *A posteriori*, d. h. vom kulturhistorischen Standpunkte aus, scheint mir die Etymologie sub 3) am meistem für sich zu haben. Jene Zwergrasse, die zur Eiszeit in Unteritalien lebte, hat uns zwar Steinwerkzeuge hinterlassen, aber von einer Sprache wissen wir absolut Nichts. Die Keltoslaven, die ungezählte Jahrtausende später gekommen sind, durften kaum noch Schnee und Eis vorgefunden haben, dort nämlich, wo man heute lago sagt. Bleibt also nicht Anderes übrig, scheint mir, als sich an die Graeco-Italiker zu halten. Deren Zeiten reichen ja freilich hoch hinauf dass sehr wohl an eine Berührung mit Keltoslaven gedacht werden kann. Weil mir aber eben scheinen will, dass damals die Eiszeit in Italien längst vorbei gewesen sein muss, glaube ich, dass wir nicht an led etc., sondern an $\sqrt{\text{leq}}$ etc. den richtigen Anhaltspunkt haben. »

Su tale piano, così come è stato qui tracciato da Neumann, si potranno in avvenire fare delle ricerche più minute, per risolvere completamente questo doppio problema di geologia e di linguistica.

Tranne queste leggende e le testimonianze filologiche, non si ha più alcuna notizia storica o scientifica su tale argomento, e bisogna arrivare fino all'anno 1894, per avere delle osservazioni positive sui laghi pleistocenici dei dintorni di Lagonegro. Nelle *Montagne mesozoiche di Lagonegro* di G. De Lorenzo (Atti Acc. Scienze di Napoli, serie 2ª, vol. VI), pubblicato appunto in quell'anno, si hanno i primi profili e le prime descrizioni di quei bacini lacustri, come qui le riporto dalla pag. 76 del lavoro. « Importanza molto minore hanno, nell'area da me studiata, i depositi d'origine alluvionale o fluviatile, stante il carattere montuoso della regione, che non permette se non

in qualche raro punto la sedimentazione dei materiali portati dalle acque correnti. Un deposito tipico alluvionale si trova al punto in cui sorge la stazione ferroviaria, e ne costituisce la piccola spianata, limitata a occidente dal Timpone Rosso, a oriente dal torrentello San Francesco e a sud dal fiume Serra, appoggiandosi su un fondo di scisti silicei triasici e, in piccola parte, di materiale argilloso eocenico. Esso terreno è costituito da una massa di fango argilloso giallo-rossastro, inglobante caoticamente materiali solidi di volume diversissimo e senza ordine alcuno, da schegge sottilissime fino a blocchi di circa un metro cubico di volume. Tali materiali provengono tutti dalle formazioni descritte; predominano in modo notevole i frammenti di scisti silicei triasici, vengono dopo i pezzi di argilloscisti compatti, di grès e di arenarie silicee dell'eocene superiore, ultimi i calcari triasici, come quelli che occupano la parte centrale e più difesa degli ellissoidi.

I pezzi di calcari a noduli di selce e di scisti silicei provenienti da luoghi lontani sono arrotondati in ciottoli ellissoidali molto regolari, che si mescolano senz'ordine con frammenti angolosi, o appena troncati e smussati sui vertici e sugli spigoli, di altre rocce trasportate da punti più vicini. Alla formazione di questo deposito alluvionale in posizione abbastanza strana, più che il torrentello S. Francesco, al quale si trova vicino, credo abbia pigliato parte il fiume Serra, il quale attualmente si trova a un livello molto più basso. Precedentemente, parlando della formazione delle valli transversali, ho accennato a una ipotesi, che potrebbe spiegare l'origine di tale materiale alluvionale.

Si deve cioè supporre, che in un certo tempo non esistesse fra il M. Jatile e il T. Russo la valle d'erosione, nella quale scorre attualmente il fiume Serra, e che questo, urtando contro le spalle orientali dei detti monti, si espandesse in una specie di bacino lacustre, in cui si poteva accumulare il materiale portato giù dai monti. Posteriormente, per effetto di erosione diretta o della cosidetta erosione regressiva di Löwl, le acque, avendo avuto un libero passaggio, abbandonarono a monte i depositi alluvionali dell'antica espansione lacustre e poscia, per erosione diretta, arrivarono a un livello molto più basso di essi depositi. Se questi si siano formati dopo la grande glaciazione del Sirino, o se siano a questa anteriori, e in questo caso, di quanto l'abbiano preceduta, non è possibile stabilire. Mi pare però più naturale supporre, che essi si siano formati in seguito al grande disgelo delle masse nevose del Sirino.

Un altro importante deposito alluvionale si trova nella valle di Vallone Siccu o dell'Accampamento ed è di origine certamente lacustre. In esso sotto un grossolano conglomerato giallastro si trovano delle argille turchine plastiche: è da augurarsi, che in queste, o nel conglomerato soprastante, si trovino degli avanzi organici, che permettano di stabilirne con sicurezza l'età ».

Quest'augurio s'è poi in parte realizzato, perchè nelle argille turchine, scavate e usate per laterizî, si trovò posteriormente la parte prossimale del metatarso destro di un *Cervus elaphus*, che ne dimostra chiaramente l'età pleistocenica.

Fin qui si tratta solo dei piccoli bacini compresi nelle immediate prossimanze di Lagonegro: un primo cenno del grande bacino pleistocenico della valle del Noce si ebbe solo nel 1896, a pag. 118 e seg. degli *Studî di geologia nell'Appennino meridionale* di G. De Lorenzo: «Molto importante per lo studio dei fenomeni di diastrofismo e di deformazione durante i tempi pleistocenici ed attuali, è il grande lago pleistocenico

della valle del Noce. Le sue sponde si aprivano poco sotto Lagonegro lungo l'attuale corso del Noce, battevano contro i fianchi occidentali e meridionali della Serra Luceta e del Bitonto, urtavano contro lo sprone calcareo e dolomitico della Ferriera di Nemoli e poi, per la regione La Rosa e S. Maria, andavano fino a Lauria; di quì giravano lungo le pendici settentrionali del m. Messina, passavano per Trecchina, lambivano le falde meridionali, orientali e settentrionali del m. Coccovello, e si stendevano finalmente lungo le pendici meridionali di Serra Longa. I sedimenti di questo antico lago sono rappresentati dai lembi di conglomerati grossolani sparsi quà e là nell'area occupata una volta dalle acque, e di cui le plaghe maggiormente rispettate dalla denudazione si trovano vicino Rivello e sotto Nemoli, dove raggiungono una potenza superiore ai 100 metri. L'altezza del pelo delle acque sul fondo originario del bacino (dato dal Flysch eocenico sottostante vicino Nemoli al conglomerato lacustre) misurata dalle terrazze di sponda, era almeno di 300 metri. La depressione, che comprese in sè le acque abbandonate dal mare regrediente, è, come si vede dalla fig. 11, data da un bacino sinclinale molto dislocato e fratturato. Infatti a nord gli ellissoidi triasici del gruppo del Sirino e quelli liasici e cretacei di Serra Luceta e Serra Longa, inclinano con le loro falde meridionali verso il centro del bacino, e, viceversa, le grandi pile di calcari liasici e cretacei, componenti i monti di Lauria, il gruppo del m. Messina, i monti di Trecchina e il m. Coccovello, inclinano in massa con i loro strati verso nord; il fondo del bacino è occupato dal Flysch eocenico sfuggito alla denudazione prepliocenica, e tutta la conca sedimentaria è attraversata da grandi fratture scorrenti, da quelle stesse fratture, che, prodottesi nella prima fase diastrofica terziaria, permisero l'estravasazione del magma diabasico e peridotico, che in quel punto si trova. Le comunicazioni del mare col lago avvenivano dapprima per la valle di sinclinale intercorrente tra Serralonga e il m. Coccovello, per la valle di frattura tra il Coccovello e i monti di Trecchina e per la valle, egualmente dovuta a frattura, tra Serra Murazza (a sud di Trecchina) e m. Messina; ma poi, essendosi il livello del mare abbassato con maggiore velocità di quella, con la quale progrediva l'erosione nei primi due sbocchi, questi si obliterarono e il lago si scolò, tra il gruppo dei monti di Trecchina e quello del monte Messina, mediante un unico emissario, che, per il continuo movimento di emergenza e il conseguente abbassarsi del livello basale di erosione, ha prodotto il vuotamento del lago e ha dato origine all'attuale basso corso del fiume Noce o Talágo....... Tutt'attorno all'area occupata dal lago del Noce, quando forse si trovava al più alto livello delle sue acque, si vedono ora delle distinte terrazze, intagliate per lo più nei calcari liasici e cretacei, che corrispondono con esattezza a quelle, che Gilbert chiama wave-cut terraces. Esse inoltre sono di solito coperte da materiale di spiaggia, e più specialmente da galets, formati dagli scisti silicei del trias medio, che meglio hanno resistito alla consunzione, loro apportata durante il trasporto dagli affluenti nel lago, e al lavorio di lisciamento prodotto dalle onde di questo che battevano in breccia la sponda. Una di queste terrazze si trova sul piano sud-ovest di Serralonga, un'altra ad essa dirimpetto, è a sud-ovest della Serra Luceta, una terza è incisa nello sperone calcareo, che sovrasta alla ferriera di Nemoli, una quarta è situata a est del monte Coccovello, nella contrada Orcitello, una quinta si trova a Trecchina e altre sono accennate nelle pendici settentrionali del gruppo del monte Messina. Se queste terrazze furono, com'è certo, incise dalle onde del lago pleistocenico, ora esse dovrebbero giacere in un medesimo piano orizzontale, nel quale dovrebbero anche tro-

varsi gli inizî degli antichi tre emissarî. Ora ciò non è. Infatti la terrazza di Serralonga è compresa tra 620 e 670 metri d'altezza sul mare attuale, quella di Serra Luceta tra 600 e 610, l'altra della Ferriera di Nemoli tra 530 e 540, la terrazza dell'Orticello tra 530 e 550 e finalmente quella di Trecchina tra 490 e 550. Non si può pensare, che queste terrazze di varia altezza, rappresentino varî livelli raggiunti dal lago pleistocenico, perchè giammai esse si veggono soprapposte in modo da formare più d'una serie di terrazze, e perchè la diminuzione in altezza non avviene saltuariamente, ma si svolge progressivamente, a misura che da nord si cammina verso sud. Infatti dai 610 e dai 600 metri segnati dai limiti inferiori delle terrazze di Serralonga e Serra Luceta, passando per i 530 dati dal più basso gradino dell'Orcitello, si giunge gradatamente ai 490 metri della terrazza di Trecchina nel suo limite inferiore. Questo enorme dislivello di 120 metri sopra una distanza di poco meno di 10 chilometri, non può essere spiegato, che ammettendo, che la seconda fase diastrofica abbia continuato a deformare le sponde e il fondo del bacino lacustre durante e dopo la formazione e la scomparsa del lago pleistocenico e continui tuttora a deformarli, insieme a tutto il resto dell'Appennino meridionale ».

Con queste osservazioni di De Lorenzo s'inizia e con esse parimenti si chiude tutta la breve letteratura geologica del grande lago pleistocenico della valle del Noce.

§ 2.

Terreni delle sponde e del fondo.

La stratigrafia e la tettonica di queste montagne è stata ampiamente descritta da me in molteplici lavori: ne riassumo qui tanto, quanto occorre all'intelligenza del nostro argomento.

Il terreno fondamentale della regione è rappresentato dalla parte superiore del trias medio, costituito, dal basso all'alto, dai seguenti membri: I. Calcari a liste e noduli di selce, contenenti avanzi di radiolarie, alghe, halobie e posidonomye, di colori prevalentemente scuri, non bituminosi, con intercalazioni di scisti marnosi e passanti gradatamente verso l'alto alla sovraincombente massa degli scisti silicei. Questi calcari raggiungono e passano i 500 metri di potenza, formano le montagne maggiori dei dintorni di Lagonegro e rappresentano la base visibile più profonda di tutti i terreni posteriori. II. Tra gli strati più alti dei calcari a noduli di selce cominciano a intercalarsi degli scisti marnosi e silicei, che passano superiormente a una pila di scisti silicei e di diaspri policromi, potenti in qualche punto fino a 300 metri, i quali coprono, totalmente o in parte, le grandi pieghe formate dai sottostanti calcari a halobie: essi sono costituiti da innumerevoli scheletri silicei di radiolarie e portano sulle superficie degli strati avanzi di fucoidi. III. Intercalate amidgaloidamente negli scisti silicei, e, qualche volta, anche nei calcari a noduli di selce, si trovano delle scogliere calcaree grigio-chiare, potenti in media da 50 fino a 300 metri, le quali han fornito numerosissimi avanzi dell'antica fauna e della flora, a cui esse debbono essenzialmente l'origine loro. Dall'esame di tali avanzi risulta chiaramente, che queste scogliere calcaree hanno la medesima età dei calcari di Esino e della Marmolata e degli strati di Wengen e di S. Cassiano, e che quindi allo stesso orizzonte bisogna riferire gli scisti silicei, di cui il calcare a scogliera non rappresenta che una facies diversa contemporanea. Siccome però gli scisti silicei

sono indissolubilmente legati ai sottostanti calcari a noduli di selce e in questi giungono anche le scogliere calcaree con la fauna suddetta, ne consegue, che i tre terreni rappresentano complessivamente la parte superiore del trias medio e propriamente quel gruppo ladinico istituito da Bittner, il quale nelle Alpi settentrionali comprende il Wettersteinkalk, i Partnachschichten, i Reiflinger Kalke e parte del Ramsaudolomit di Böse, e nelle Alpi meridionali gli strati di Wengen e di S. Cassiano, gli strati di Buchenstein, il calcare di Esino, del Lathemar e della Marmolata e la dolomite dello Schlern.

Sopra gli scisti silicei si trovano, non legate da passaggi graduali, ma appoggiate con brusca transizione, delle dolomiti generalmente bianche, raramente scure, stratificate o sabbiose, a volte con intercalazioni di calcari neri, che, per i fossili finora dati, corrispondono con esattezza al Hauptdolomit alpino, e con molta probabilità nella parte inferiore rappresentano anche il livello di Raibl. Queste dolomiti si presentano a Serra Luceta e allo sperone della Ferriera di Nemoli, che non sono costituiti solamente da lias, com'è erroneamente segnato nella carta geologica publicata da me nel 1894, bensì da Hauptdolomit e da calcari, probabilmente liasici e cretacei. Inoltre si trovano a Rivello, Nemoli etc.

Tutta la serie triasica è coronata da calcari grigi e neri, massimamente sviluppati lungo la sponda destra del fiume Noce, tra Casalbuono e Rivello, che contengono una fauna identica a quella di Taormina e corrispondono quindi alla parte superiore del lias inferiore. Invece nei monti che stanno alle spalle di Trecchina pare che sul Hauptdolomit si trovi immediatamente il lias medio, rappresentato da calcari grigi cristallini, o compatti e molto chiari, con *Terebratula Aspasia.*

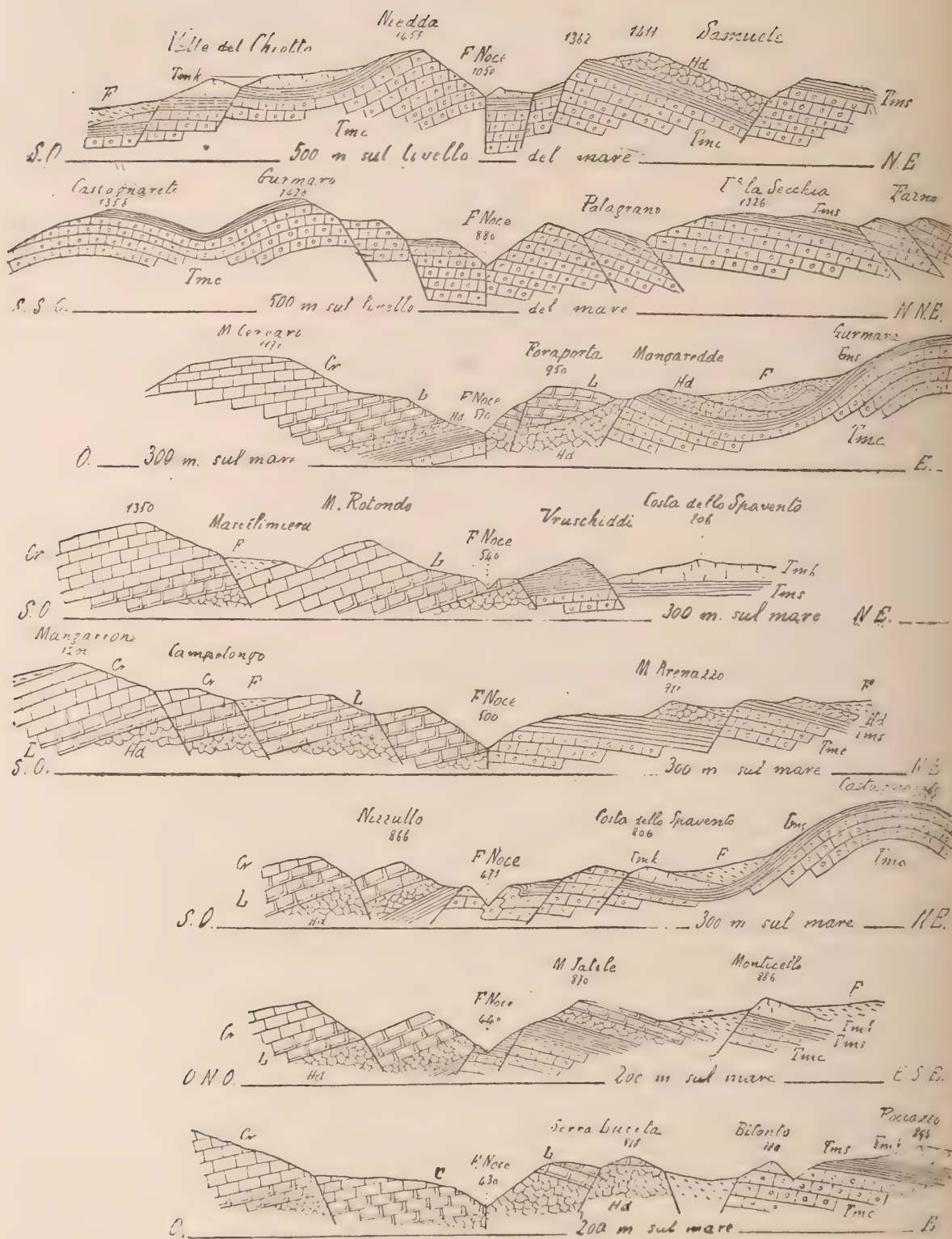
I calcari cretacei a rudiste formano i due gruppi massicci di Serralonga e del monte Coccovello, presentando uno spessore di oltre 1000 metri e salienti probabilmente dall'urgoniano al turoniano senza apparenti variazioni nell'enorme pila tutta costituita da grossi strati di calcari scuri, bituminosi. Compariscono anche in piccoli lembi a sud e a sud-ovest di Trecchina e si estendono poi con grande potenza a formare tutti i monti fratturati (m. Messina, Serra del Monaco, Serra S. Elia, Serra Pastorella, m. Rotondo etc.) compresi tra il fiume Noce, Lauria e il corso alto del Sinni.

Probabilmente l'eocene medio è rappresentato dai pochi lembi di calcari brecciati, a volte con sezioni megalodontiformi, che coronano il monte Spina sopra Acquafredda. Invece l'eocene superiore è largamente e potentemente rappresentato dal Flysch prevalentemente argilloso, a rocce eruttive verdi e a breccioline nummulitiche e orbitoidiche, che riempie tutto il bacino e corona le alture minori.

Il pleistocene morenico o glaciale si presenta nel gruppo del Sirino con una certa estensione e notevole spessore.

Le linee fondamentali del paesaggio, le alture e le depressioni son date dalle dislocazioni prodotte dai movimenti orogenici: l'erosione e la denudazione non rappresentano che il lavorio ultimo, di finitura e perfezionamento continuo, nel modellamento orografico. Ciò si può osservare, non solo esaminando i terreni, che formano immediatamente le sponde e il fondo del bacino, ma anche dando una fuggevole occhiata al corso dei principali affluenti del bacino medesimo.

Il più importante di questi affluenti è rappresentato dalla parte superiore del corso dell'attuale fiume Noce, che giungeva al lago dopo circa 15 chilometri di cammino. Come si vede dai qui annessi profili (v. fig. 21), il corso di questo fiume è, in generale,

21.

ALTO CORSO DEL FIUME NOCE

Tmc. Calcari a noduli di selce. — *Tms.* Scisti silicei. — *Tmk.* Calcari a scogliera. — *Hd.* Hauptdolomit. — *L.* Lias inferiore. — *Cr.* Cretaceo. — *F.* Flysch eocenico superiore. (Scala 1 : 50.000).

segnato da una sequela di depressioni tettoniche; solo qua e là si hanno delle vere incisioni profonde dovute all'acqua, che rappresentano la parte ultima e più recente della valle. Nasce infatti il fiume Noce nella vallata di sinclinale del Cacciatore, e, seguendo la direzione di questa sinclinale, si dirige a nord; ma giunto a Petinachiana gli si para innanzi una depressione, originata da una serie di fratture a gradinata, dirette da nord-ovest a sud-est: l'acqua è costretta quindi a pigliare questa direzione, volgendo poi addirittura a ovest, attraverso i blocchi dislocati, che interrompono la piega del monte Gurmàra e di Gianni Griecu. Più in là, a Serra dell'Alto, forse una frattura segnò primieramente la via all'erosione, che poi indipendentemente seguì il suo cammino verticale, incidendosi il profondo passo, che intercorre appunto tra Serra dell'Alto e il Nacola. Dallo sbocco di questa valle, o meglio dai Carcuni, fino all'antico sbocco del fiume nel lago, presso Serra Luceta, esistono numerosissime e complicate fratture, con scorrimenti e spinte, che nell'insieme han dato origine a un'unica grande zona rettilinea di depressione, diretta approssimativamente da settentrione a mezzogiorno, la quale separa i terreni prevalentemente triasici medî del gruppo del Sirino e di Lagonegro, da quelli prevalentemente liasici e cretacei del gruppo di Serralonga e sue propaggini orientali. Questa zona di depressione fu appunto scelta, per scorrervi, dal fiume Noce, che là, dove esistevano piani di frattura verticali, seguì sempre le superficie di spostamento, mentre dove c'erano sopraspinte, o fratture con piani di scorrimento obliqui, ebbe da questi segnata la primitiva direzione e poi seguì indipendentemente il suo lavorio d'erosione verticale. Qua e là lungo il corso, e specialmente sulla sponda destra, si trovano delle terrazze, incise sulle rocce calcaree e dolomitiche, sparse di ciottoli e di galets silicei, provenienti da luoghi abbastanza lontani: è quindi chiaro, che queste terrazze, le quali ora si trovano a un'altezza superiore anche ai 100 metri sul fondo della valle, segnano il livello dell'antico corso del fiume. La più grande di esse, lunga un 300 e larga un 150 metri, si trova sui fianchi orientali del monte Rotondo, a sud-

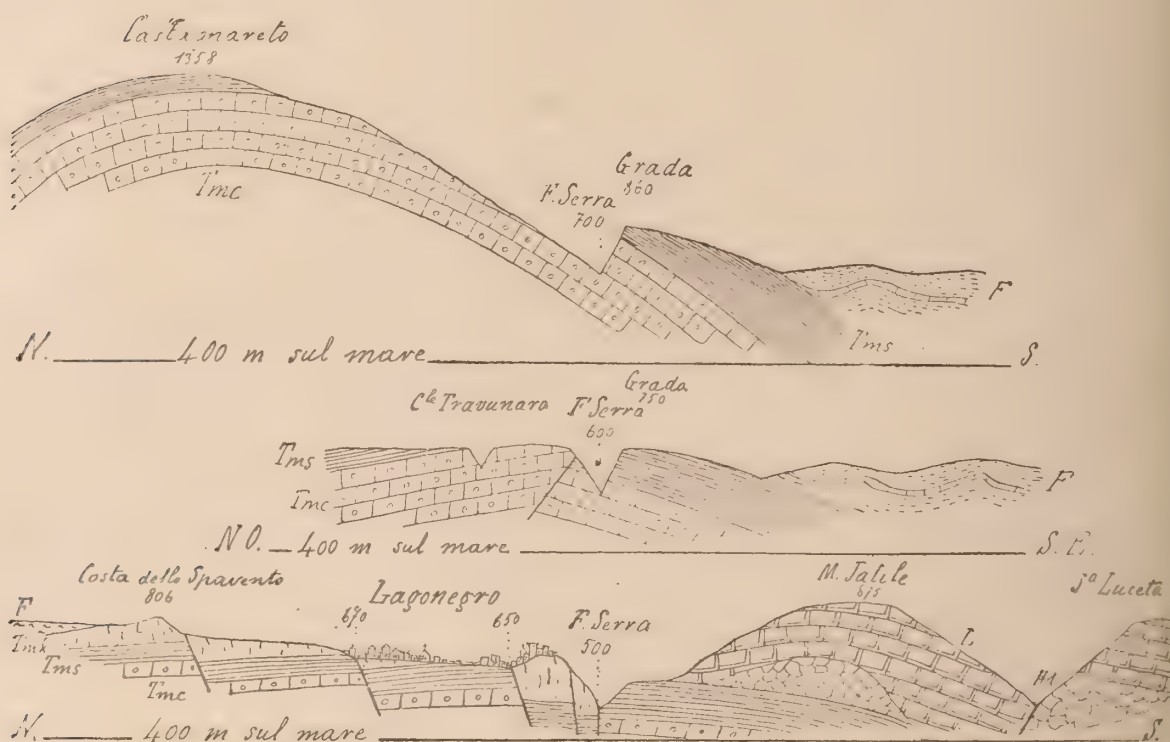
22.

Hd. Hauptdolomit. — *L.* Lias inferiore. — *Cr.* Cretaceo. — *T.* Terrazze del fiume Noce (Scala 1:25.000).

ovest della Calda, a 650 metri sul livello del mare e a 110 sul fondo attuale del fiume. A essa ne fa fronte un'altra, alla medesima altezza, sulla sponda sinistra. Altre, più piccole e ad altezze variabili, si trovano tra questo punto e il convento della Madonna degli Angeli; di preferenza sulla sponda destra, adibite a coltivazione a causa del materiale alluvionale, di cui sono coperte, e del loro lieve pendio, minore di quello dei monti circostanti.

All'incontro di questa fratturata zona di depressione longitudinale con le fratture

transversali, che si trovano tra Lagonegro e monte Jatile, si ha la confluenza del fiume Noce col fiume Serra, la cui direzione è stata, in massima, appunto segnata da queste fratture transversali, che hanno indicata la prima via alle acque fluenti, lasciandole poi libere proseguire il loro lavorio di erosione verticale. Non mancano però dei punti lungo il corso del Serra, come p. es. il solco inciso nella cupola del Bramafarina e il primo tratto della gola del Cararunceddc, i quali piuttosto che a fratture sembrano dovuti alla cosidetta erosione in Puppenzustand di Richthofen, come è stato già notato da me nel capitolo d'introduzione al mio lavoro su *Le montagne mesozoiche di Lagonegro.* Alla stazione di Lagonegro, all'altezza di 600 metri sul mare e di 100 sull'attuale corso

23.

Tmc. Calcari a noduli di selce. — *Tms.* Scisti silicei. — *Tmk.* Calcari a scogliera. — *Hd.* Hauptdolomit. — *L.* Lias inferiore. — *F.* Flysch eocenico superiore. (Scala 1:25.000).

del Serra esistono i conglomerati giallastri, potenti più di 20 metri, cui nel capitolo precedente si è accennato. Questi conglomerati rivelano in quel punto, come si è già notato, l'esistenza di un antico bacino o serbatoio lacustre, di cui l'emissario poco più a valle si versava nel Noce. Progredendo l'erosione di questo emissario, il piccolo lago gradatamente si vuotò e di poi la continuante erosione ha portato le acque a 100 metri sotto l'antico fondo di esso lago, facendole fluire attualmente nella profonda e pittoresca gola compresa tra il Timpone Rosso e monte Jatile.

Dall'esame del corso di questi due fiumi si può concludere, che, meno i pochi casi in cui una valle stretta è dovuta a erosione, e gli altri in cui è delineata da fratture verticali, in generale il corso d'un fiume è determinato da dislocazioni tettoniche (fratture scorrenti a gradinata o fratture con spinte), che indicano la prima via alle acque,

DE LORENZO PHOT.

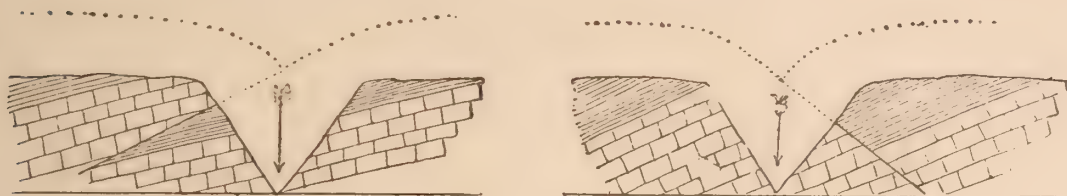
ELIOT. CALZOLARI & FERRARIO, MILANO

FIUME SERRA PRESSO LAGONEGRO

BURRONE CARARUNCEDDE

(Calcari a noduli di selce del trias medio passanti per successive intercalazioni ai soprastanti scisti silicei a radiolarie.

le quali proseguono poi verticalmente la loro erosione, lasciando sulle sponde i piani di frattura, così come è indicato nei due schemi qui disegnati.

24.

(Le linee punteggiate indicano la configurazione del terreno qual'era determinata dalle sole dislocazioni orogeniche, prima che la denudazione e l'erosione l'avessero ridotta allo stato attuale).

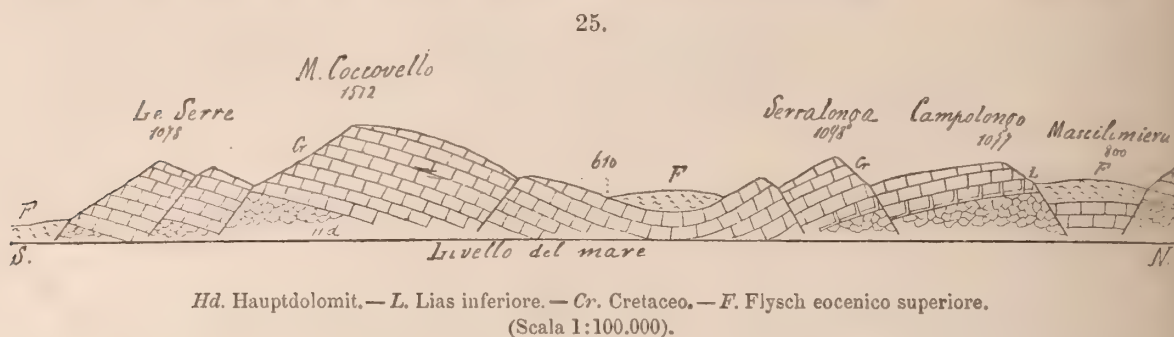
Come nel corso dei fiumi, così anche nella configurazione del bacino le linee fondamentali sono segnate dalle dislocazioni della crosta terrestre. Nella tettonica dei terreni costituenti le sponde del bacino del Noce si possono distinguere due motivi differenti, di cui uno è sviluppato nella sponda nord-est e l'altro è esteso nelle sponde ovest, sud e sud-est.

Il primo di questi due motivi è dato dalle pieghe del trias medio, che si esplicano nel gruppo del Sirino, estendendosi verso ovest fino al corso del fiume Noce, e formando così quelle parti delle sponde dell'antico lago, che sono rappresentate dalla base del monte Jatile, dal Monticello, dal Bitonto, dal Roccazzo e dalla regione del Lago. Non è possibile per ora stabilire con sicurezza, se gli scisti rossi e turchini, che si trovano nella regione S. Jorio a nord di Lauria, appartengano anch'essi al trias medio, o facciano invece parte del Flysch eocenico superiore, in mezzo al quale si trovano. Le sponde propriamente dette, quando sono formate dal trias medio, o sono direttamente date dalle facce degli strati inclinanti verso il bacino, oppure da fratture accompagnate da spinte o da scorrimenti a gradinata. Così al monte Jatile gli scisti silicei si piegano a sud; al Bitonto invece inclinano a oriente, ma sono tagliati da fratture a occidente; nella regione del Lago infine, ossia alle falde del Sirino (Costa del Capraro), gli strati non solo inclinano a sud-ovest, ma si rompono a gradinata verso sud, in guisa che danno per due vie origine alla depressione occupata anticamente dal lago. Anche il piccolo sperone di calcari a noduli di selce, che limita la parte alta del canale della Ferriera, sembra troncato a sud-ovest, da fratture scorrenti. Nella regione Neviera, a sud della Serra Orticosa, gli scisti del trias medio s'immergono direttamente sotto il Flysch del bacino. In complesso dunque tutta la parte nord-est o la parte più elevata delle sponde di questo bacino deve essenzialmente la sua configurazione orografica alle potenti pieghe da cui è composta; mentre le fratture, le spinte, l'erosione e la denudazione rappresentano in essa solo la parte secondaria, o di finimento, al grandioso abbozzo tettonico fondamentale.

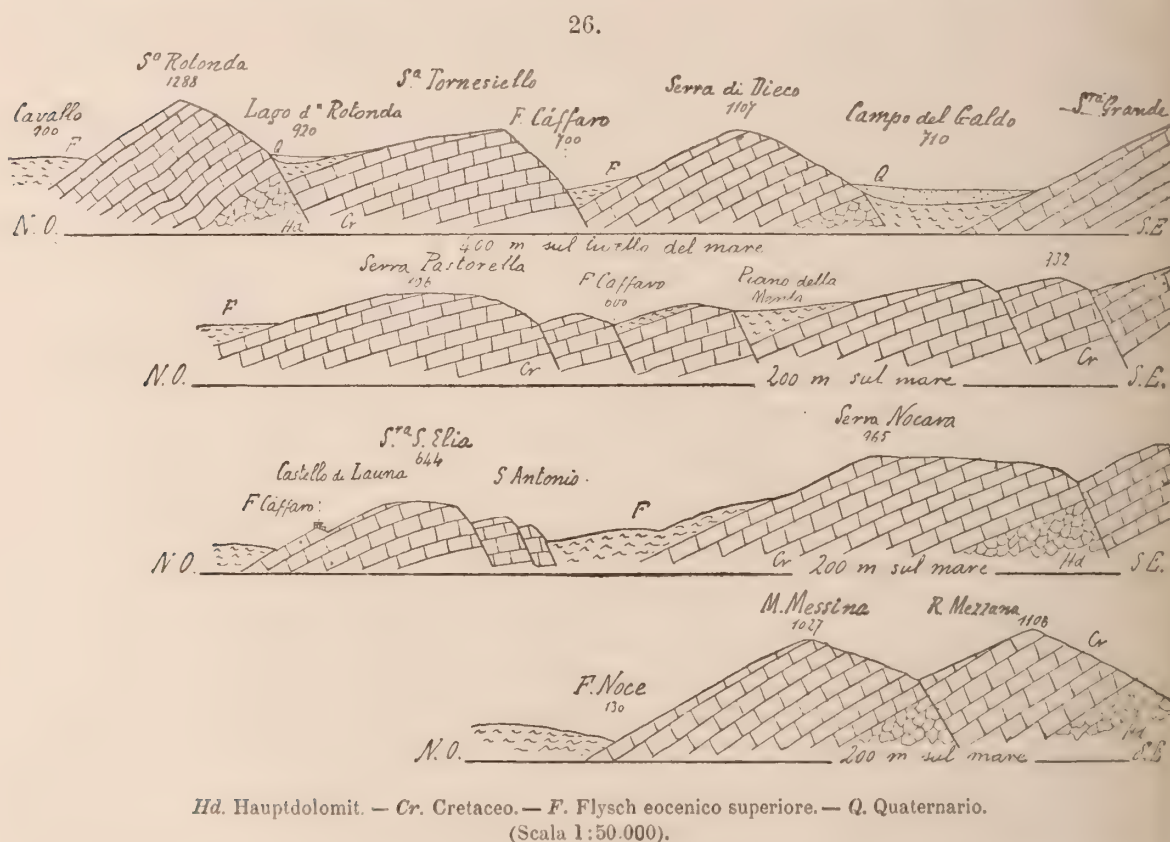
Non altrettanto può dirsi del secondo su accennato motivo tettonico, in cui la pila calcareo-dolomitica mesozoica (essenzialmente composta dal Hauptdolomit e dai potentissimi calcari a rudiste, e subordinatamente dal lias), opponendosi con la sua rigidità al piegamento, nella costrizione post-eocenica, si curvò appena in grandi cupole e gigantesche conche, le quali, non potendo ulteriormente cedere alle forze prementi tangenziali, si frantumarono in numerosi blocchi (Schollen), più o meno grandi, più o

meno regolari. Questi blocchi costituiscono le attuali montagne calcaree, che fuoriescono per frattura dai circostanti sedimenti del Flysch, i quali si vedono accumulati ora nelle depressioni, perchè qui soltanto scamparono alla denudazione, che lavava i loro equivalenti dalle cime più elevate e più esposte. Un bell'avanzo di queste grandi pieghe originarie si ha nella valle del Rotale, formata appunto dalla sinclinale intercorrente tra la

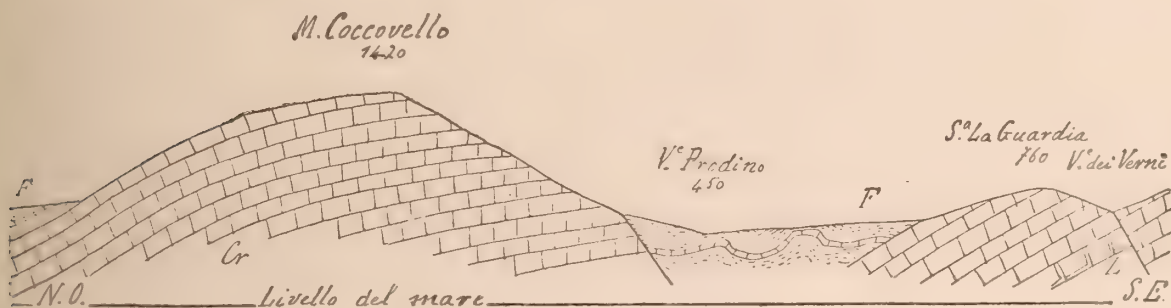
25.

Hd. Hauptdolomit. — *L.* Lias inferiore. — *Cr.* Cretaceo. — *F.* Flysch eocenico superiore.
(Scala 1:100.000).

cupola di Serralonga e il blocco massiccio di calcari a rudiste del monte Coccovello. Infatti le montagne, che dal Rotale, comprendendo Serralonga, m. Cocuzzo e m. Juncolo, vanno fino a Casalbuono, rappresentano gli avanzi di una grande cupola, di cui la parte più completa, quantunque anch'essa fratturata, si trova a sud-ovest, alle spalle di Sapri.

26.

Hd. Hauptdolomit. — *Cr.* Cretaceo. — *F.* Flysch eocenico superiore. — *Q.* Quaternario.
(Scala 1:50.000).

A oriente questa cupola si sprofonda mediante fratture a gradinata longitudinali, dirette da nord-ovest a sud-est, frequentemente interrotte da fratture trasversali, dirette in

massima parte da sud-ovest a nord-est e perpendicolari quindi alle prime. A nord e a sud, a Casalbuono cioè e al Rotale, gli strati inclinano rispettivamente verso settentrione e verso mezzogiorno, mentre a ovest delle potenti dislocazioni hanno sollevato per frattura il monte Cocuzzo sulla profonda depressione di Torraca e di Tortorella. Nei dintorni di Mascilimicro il Cretaceo è separato dal Hauptdolomit mediante calcari liasici, che altrove non esistono. Grandi pieghe sul genere di quella del Rotale non si vedono più nel restante circuito del bacino, in cui non ci sono che grandi e rigidi blocchi calcarei, separati per fratture. Così tutte le montagne, che si trovano a est, sud-est e sud di Lauria non sono che dei grandi blocchi (Schollen) di calcari a rudiste, spezzati e dislocati, sostenenti qua e là piccoli lembi e strisce allungate di Flysch eocenico, raccolto nei punti e lungo le linee meno accessibili alla denudazione. Gli strati son prevalentemente diretti da sud-ovest a nord-est, con grandi inclinazioni, a volte quasi verticali. I blocchi sono lateralmente limitati (v. fig. 26) da grandi fratture longitudinali, dirette da sud-ovest a nord-est (Lago della Rotonda; Cáffaro — S. Antonio; Campo del Galdo — Serra Franzosa — Alte Coste), intersecantisi con fratture trasversali, ad essi perpendicolari. Le depressioni chiuse, come quelle del Campo del Galdo, del Lago della Rotonda etc., albergarono grandi e piccoli laghi, quaternarî e recenti, di cui ora racchiudono i sedimenti. Le fratture longitudinali maggiori raggiungono e passano i 10 chilometri di lunghezza: i loro margini sono accompagnati da una complicata frantumazione, come può benissimo osservarsi a S. Antonio, a sud-est di Lauria. Sulla sponda occidentale del bacino giganteggia il grande massiccio del monte Coccovello, separato dai

27.

L. Lias. — *Cr.* Cretaceo. — *F.* Flysch eocenico superiore. (Scala 1:50.000).

monti di Trecchina mediante una frattura, o una serie di fratture, molto pronunziata. Il monte Messina, spostandosi quasi orizzontalmente a sud, più che un abbassamento verticale rappresenta una Verschiebung o un Blatt. A sud-est del Coccovello, in corrispondenza di queste grandi fratture, beanti forse verso l'interno, si trovano nel Flysch a breccioline nummulitiche le rocce eruttive verdi, già da me descritte. Riesce difficile interpretare la tettonica del fondo del bacino, perchè questo è tutto ripieno dal Flysch, di sotto al quale solo qua e là spuntano i terreni fondamentali. Così nella collina di Rivello, alla Serra la Città, a sud-ovest di Nemoli e nella regione Selvaggia, a nord di Trecchina, vengono a giorno delle dolomiti grige, bianche e nere, fortemente bituminose, che con molta probabilità appartengono al Hauptdolomit. Trovandosi questi affioramenti dolomitici tutt'attorno ai fianchi orientali del monte Coccovello, se essi sono realmente

triasici, si deve dedurne, che il massiccio del Coccovello, tutto composto di calcari a rudiste, rappresenta un blocco o un Horst virtualmente abbassato rispetto alla parte del bacino che immediatamente lo cinge ad oriente, quantunque ora, per complicati fenomeni di denudazione e di dislocazioni, appaia invece su essa sollevato.

§ 3.

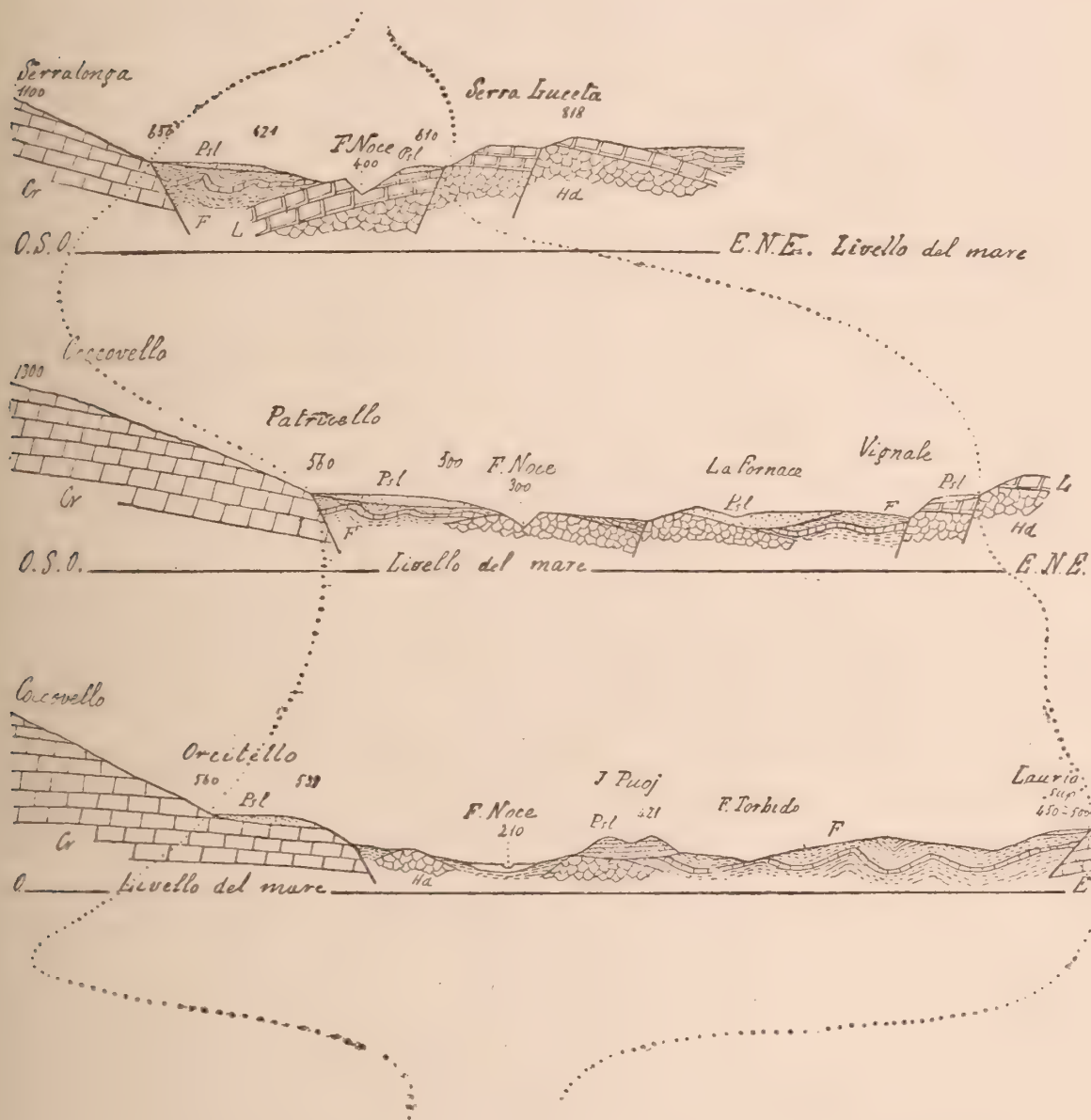
Sedimenti.

Di due sorta possonsi distinguere sedimenti nel bacino del Noce: sedimenti di spiaggia e sedimenti, dirò così, di profondità o della parte centrale dell'antico lago. Ai primi vanno riferiti i ciottoli, che, immediatamente staccati dalle sponde battute dalle acque stesse del lago, oppur trasportati di lontano dai corsi d'acqua affluenti, venivano trattenuti nella zona di battigia, e, ridotti quindi a tipiche piastrelle schiacciate o galets, restarono a testimonianza dell'antica spiaggia, insieme al fango più minuto, da cui sono abbondantemente avvolti. Ai secondi debbonsi invece riportare tutti i conglomerati più o meno grossolani, le arenarie e i banchi argillosi, che si depositarono al largo nel bacino, assumendo sempre una stratificazione più o meno distinta.

Nel detrito di spiaggia l'elemento più importante, per quantità e per significato, è costituito dai frammenti di scisti silicei del trias medio. Essi hanno resistito al logorio delle acque correnti molto meglio che i rottami dei terreni calcarei e argillosi, e formano quindi la parte essenziale del detrito accumulatosi sulle terrazze di sponda. Non solo, ma trovandosi ora essi depositati in luoghi molto lontani dal loro luogo d'origine, fanno fede indiscutibile dell'antico lago scomparso. Infatti questi ciottoli silicei molto duri, di colore prevalentemente gialletto o ceruleo chiaro, possono solamente provenire dagli scisti del Castagnareto, di Bramafarina e del Sirino, donde son portati dal fiume Serra, e da quelli tagliati dall'alto corso del fiume Noce, vale a dire da Serra dell'Alto, dal monte Gurmara e da Petinachiana. Conseguentemente a ciò essi si trovano quasi tutti accumulati sulle terrazze della sponda occidentale del bacino, la quale giace nella stessa direzione del corso d'acqua — il Noce — che li fluitò, mentre difettano, e a volte mancano quasi del tutto sulla sponda orientale, dove le acque rimanevano relativamente chete e imperturbate dalla corrente principale, costituita dalla linea congiungente il maggiore affluente, il Noce, con l'imbocco dell'emissario, tra Serra Murazza e monte Messina. Inoltre sulla stessa sponda occidentale gli elementi silicei diminuiscono gradatamente di grossezza, a misura che dall'antico sbocco del Noce nel lago, tra Serra Luceta e Serra Longa, si avvicinano al suddetto imbocco dell'emissario, vicino Trecchina: così nel primo di questi due punti si hanno dei ciottoli, che pesano fino a 10 chilogrammi e più, nell'ultimo invece dei piccoli galets di pochi grammi di peso, costituenti minute puddinghe; mentre nei punti intermedî si hanno delle grandezze gradualmente decrescenti da nord a sud.

Lungo la sponda destra il primo deposito di spiaggia (v. fig. 28) si trova sulle falde sud-est di Serralonga, tra 600 e 650 metri d'altezza sul mare. Esso si stende sul Flysch eocenico, in quel punto ricco di arenarie, ed è essenzialmente costituito da un denso fango o Lehm rosso, in cui sono inglobati ciottoli arenacei del Flysch, blocchi calcarei del trias, del lias e della creta e principalmente abbondantissimi galets silicei, che conser-

vano ancora le primitive forme poliedriche, dovute al clivaggio romboedrico, appena smussate sui vertici e sugli spigoli. L'insieme del giacimento dà tutta l'apparenza d'una terrazza incisa dalle onde (wave-cut terrace) e ricoperta poi da sedimenti di spiaggia.

28.

Hd. Hauptdolomit.— *L.* Lias inferiore.— *Cr.* Cretaceo. — *F.* Flysch eocenico superiore. — *Psl.* Pleistocene lacustre. — La linea punteggiata indica il perimetro probabile dell'antico lago. (Scala 1:50.000).

Similemente, a nord-est del monte Coccovello, urtando contro i calcari a rudiste di esso e stendendosi sul Flysch argilloso ed arenaceo, compreso tra 560 e 500 metri di altezza si trova il secondo deposito, costituito analogamente al primo, con la sola differenza, che i ciottoli silicei hanno delle dimensioni alquanto minori. Da questo punto fin quasi

alla regione Le Cuine a sud del Coccovello si individua lungo i fianchi orientali di questo e tra le isoipse 500 e 560 una lunga terrazza marginale, anch'essa apparentemente incisa dalle onde, la quale ad Orcitello (v. fig. 28) raggiunge la sua massima ampiezza. Essa è parimenti ricoperta dal solito fango rosso e attaccaticcio, in cui gli inglobati ciottoli di scisti silicei vanno progressivamente diminuendo di volume a misura che si procede verso mezzogiorno. Probabilmente sotto questa lunga terrazza ne è incisa una seconda, compresa tra 350 e 400 metri d'altezza sul mare. Finalmente a Trecchina, tra 450 e 500 metri d'altezza e su d'un'ampiezza di più che un chilometro si trova l'ultima terrazza della sponda destra, costituita da sabbie e arenarie grige e rossicce, fine puddinghe a cemento argilloso e altri conglomerati a elementi minuti, in cui i piccoli frammenti, levigati e arrotondati, di scisti silicei, rappresentano un'esigua minoranza rispetto ai componenti di provenienza locale. L'ing. G. Pepe nella sua Nota *Sul progetto di una ferrovia da Trecchina a Castrocucco* (Processi verbali Soc. tosc. di scienze naturali, 1888) così descrisse questo deposito di Trecchina: « Le sabbie sono poco sviluppate: esse costituiscono un banco della potenza di 30 a 40 m., formando l'altipiano di Trecchina, la collina del Camposanto e le sponde dei Valloni Sillato e dei Verni. Sono gialle o rosso mattone, non attaccabili da acidi, senza fossili macroscopici, spesso frammiste superficialmente a ghiaia e brecce, in basso diventano poi di colore rosso cupo ed all'aria si sgretolano acquistando l'apparenza di sabbia sciolta. Più che sabbia è un'argilla sabbiosa che fa pasta alquanto con l'acqua. Nei valloni Sillata e dei Verni le sabbie poggiano direttamente sul calcare stratificato: nell'altipiano di Trecchina e nella collina del Camposanto poggiano invece su scisti argillosi, interstratificati con scisti galestrini e con piccoli strati di argilla scistosa. In uno scavo di fondazione a Trecchina, della profondità di m. 4, ho osservato che questa argilla sabbiosa in giù è alquanto compatta, di colore rosso cupo, con macchie nere di splendore submetallico, dovute a minerali di ferro: a 3 m. di profondità s'incontra uno strato di Limonite quasi pura, dello spessore di 0,06 a 0,10. Massi erratici di limonite ho incontrato altrove frammisti agli scisti argillosi. Questa sabbia argillosa si mostra in diversi punti ed a sufficiente altezza in piccole zone non ancora denudate. Dalla collina del Camposanto e dalla spianata di Trecchina in giù, nel versante del Noce, le sabbie scompariscono del tutto, tranne piccoli lembi, come nella spianata che sovrasta la galleria di Piano dei Peri ». Naturalmente l'ing. Pepe neanche sospettava, che queste sabbie argillose e limonitiche avessero una origine lacustre.

Passando sulla sponda orientale del bacino si trovano anzitutto due depositi nelle falde meridionali di Serra Luceta. Il primo di questi due depositi, compreso tra 590 e 610 metri di altezza, e appoggiato (v. fig. 28) sui calcari probabilmente liasici della Serra, essendo accanto alla foce dell'antico affluente nel lago, è costituito nel modo stesso delle già esaminate terrazze della sponda occidentale (falde di Serralonga e Patricello), vale a dire dal solito fango argilloso rosso, in cui predominano i grossi ciottoli di scisti silicei trasportati dell'antico Noce. A prima vista par che rappresenti una vera terrazza intagliata dalle onde sui calcari, ma in realtà si tratta di sedimenti costieri, depositatisi sopra un blocco (spostatosi per frattura dalla parte più alta del monte), che offre nella sua parte superiore una superficie pianeggiante. Invece l'altro deposito di Serra Luceta, distante dal primo circa un chilometro verso est-sud-est, appoggiato a nord ai calcari, ma stendentesi sopra un fondo di Flysch eocenico, a 650 metri d'altezza, rappresenta una

vera terrazza marginale. In essa i ciottoli silicei sono piccoli e rarissimi, perchè quel punto era addirittura fuori corrente, quantunque ne distasse per brevissimo spazio; predominano quindi, anzi formano quasi tutto il deposito, gli elementi arenacei locali del Flysch eocenico. A nord-ovest della Ferriera di Nemoli, tra 530 e 540 metri d'altezza, si trova un altro deposito, steso in basso sul Flysch e in alto appoggiato ai calcari liasici e al Hauptdolomit, che sembra rappresentare più una vera terrazza incisa, che un prodotto di sedimentazione avvenuta sopra un blocco abbassato. Anche in questo deposito, come nel secondo dei due dianzi descritti per Serra Luceta, sono scarsissimi, pur non mancando del tutto, i galets di scisti silicei, mentre predominano gli elementi locali calcarei e quelli arenacei ed argillosi del Flysch. Tra questo punto ultimo e Lauria, a causa dell'enorme denudazione, cui furono sottoposti i terreni argillosi e facilmente franabili dell'eocene superiore, non si vedono più, o almeno io non ho più visto, tracce dei sedimenti di spiaggia dell'antico lago. Nella regione di S. Jorio, a 550 m. di altezza, dei ciottoli argilloso-silicei, variegati, di provenienza locale, potrebbero forse rappresentare un deposito di simil genere. A Lauria superiore il Largo Giardino e la Piazza Nuova, costruiti sopra un piano di brecce, che si stende sul Flysch e sui calcari cretacei, è evidentemente un deposito di spiaggia del lago pleistocenico. Ciò si vede molto bene nella fig. 1 della tavola di sezioni, accompagnante il lavoro dell'ing. G. B. Bruno su *Le frane di Lauria* (L'ingegneria civile e industriale, vol. XVII, Torino 1891). In questa sezione, fatta senza alcun preconcetto, perchè l'ing. Bruno non sospettava l'esistenza d'un antico lago nella valle del Noce, si vedono benissimo i calcari cretacei e gli scisti eocenici terrazzati, e sulla terrazza giacere il detrito quaternario, in strati leggermente inclinati verso il centro del bacino. Ultima, tipica terrazza incisa dalle onde sulla sponda orientale, o meglio meridionale, si trova sulle falde settentrionali del m. Messina, dove si scorge nettissima a sera, quando i raggi del sole vi incidono obliquamente, dalla via carrozzabile, che va da Rivello al Lago. Essa incomincia ampia (v. fig. 29) sulla sponda destra del vallone S. Filippo, e di qua, restringendosi, ma rimanendo sempre sulla medesima isoipsa, si allunga verso occidente fin quasi alla regione Alzo Rosso. Il detrito di spiaggia, da cui questa terrazza è coperta, è rappresentato da un fango rosso, denso e attaccaticcio, in cui sono inglobati ciottoli di calcari a rudiste, caduti dalle pendici stesse del monte Messina, ed elementi del Flysch; mentre mancano del tutto, almeno stando a ciò che ho potuto osservare, ciottoletti di scisti silicei, come del resto era da aspettarsi, data la lontananza e l'eccentricità di questa terrazza dalla foce dell'affluente, che questi scisti silicei trasportava nel lago. Al disopra di questa terrazza, tra 600 e 620 metri, e anche al disotto si trovano altri ripiani, sforniti però di detrito, che forse potrebbero rappresentare le ultime testimonianze di altre terrazze; ma, stante la loro configurazione topografica, credo invece, che si tratti piuttosto di ripiani dovuti ad accidenti tettonici. Nell'angolo compreso tra il m. Messina e le montagne di Lauria, stante la facile franabilità e denudabilità dell'eocene argilloso che in quel punto si trova, non si ha più alcuna traccia di sedimenti costieri, così come si è visto avvenire nel tratto compreso tra il Lago e Lauria.

I sedimenti di profondità del bacino del Noce testificano chiaramente la priorità di scomparsa di questo lago rispetto agli altri dell'Appennino meridionale, perchè essi furono quasi completamente portati via dalla denudazione, che ne rispettò finora solo due plaghe limitate. La prima di queste due plaghe ha forma di triangolo, di cui i

vertici si trovano a Rivello, nella Regione Vignale e al ponte S. Pietro sul fiume Noce. Essa (v. fig. 30) è segata nel mezzo del canale della Chianca o Mascalcina e si erge, a occidente di questo, in una lunga cresta, diretta da nord-ovest a sud-est, detta la Città, perchè vi si trovano degli avanzi testimonianti in quel punto l'esistenza d'un antico villaggio o pago, corrispondente forse, secondo le ricerche di M. Lacava (*Del sito di Blanda, Lao e Tebe lucana*, Napoli, 1891), alla Cesernia della Tavola Peutingeriana, che equivale alla Caesariana dell'itinerario di Antonino. I sedimenti sono rappresentati da conglomerati piuttosto grossi, alternati qua e là da rare arenarie e da puddinghe più fine. Gli elementi, tenuti insieme da un cemento argilloso rossastro, son forniti da tutti i terreni triasici, liasici, cretacei ed eocenici, che circondano a nord il bacino. Tali conglomerati raggiungono i 500 metri d'altezza sul mare alla cima della collina (fianco orientale) su cui siede Rivello, i 530 metri a S. Margherita e 471 m. alla Città; il più basso livello di deposizione si trova, presso il ponte S. Pietro e nel canale della Chianca, alla isoipsa di 300 metri, in modo che qui il fondo del lago si trovava certamente a più di 300 m. sotto la superficie dell'acqua; lo spessore massimo di questa plaga sedimentaria, misurato dalla cima della Città al fondo del canale della Chianca, passa i 150 metri; l'area complessiva è di poco più che 2 chilometri quadrati. Lo spessore è molto variabile, a causa della ineguaglianza del fondo del bacino, su cui i conglomerati si depositavano; anche la natura delle rocce di fondo o di base è diversa da un punto ad un altro: a Rivello e sui fianchi occidentali e meridionali di Serra la Città i conglomerati si appoggiano sul Hauptdolomit; a S. Margherita invece e al Vignale si stendono sugli scisti argillosi dell'eocene superiore.—L'altra plaga sedimentaria dell'antico bacino si trova a sud-ovest di Nemoli, a un centinaio di metri dall'abitato, e forma (v. fig. 29) le colline dette I Puoi, occupanti poco meno di un chm. q., ma ben visibili da lontano, per la loro forma e per il colore giallo-rossastro, che spicca sul fondo scuro delle argille eoceniche. Qui i sedimenti, nettamente stratificati a causa di variazioni verticali nelle masse che li compongono, cominciano in basso alla isoipsa 300 e salgono fino a 421 m. sul mare. Gli elementi sono alquanto più minuti di quelli di Serra la Città e danno più frequentemente origine ad arenarie e a puddinghe fine, nonchè a veri fanghi argillosi; com'è naturale del resto, data la posizione più centrale di questo deposito. I Puoi erano un tempo fusi con la Città in un solo vasto giaci-

29.

Hd. Hauptdolomit. — *L.* Lias. — *Cr.* Cretaceo. — *F.* Flysch eocenico superiore. — *Psl.* Pleistocene lacustre. (Scala 1:50.000).

a

DE LORENZO PHOT.

ELIOT. CALZOLARI & FERRARIO, MILANO

GOLA DEL FIUME SERRA SOTTO LA STAZIONE DI LAGONEGRO.

Dopo la scomparsa del lago, di cui i sedimenti sono rimasti sul piano della stazione (a) a 600 m. d'altezza, il fiume Serra ha inciso per 150 metri di profondità gli scisti silicei e i [illegible] del trias medio, dietro ai quali fuoriesce per frattura la rupe di calcare a scogliera (anch'essa del trias medio), su cui sorge il Castello di Lagonegro. - Nel fondo il monte Sirino]

mento, che poi è stato tagliato in due dalle acque, ora accoltesi lungo la fiumara del Bosco: essi a nord-ovest si appoggiano sopra un piccolo affioramento di Hauptdolomit e in tutto il resto si stendono sul Flysch dell'eocene superiore. — Altri piccoli lembi sedimentarî, risparmiati dalla denudazione, si trovano a nord di Trecchina, nella contrada Selvaggia e a sud-est del monte Coccovello. E questo è tutto ciò, che resta, degli estesi e potenti sedimenti, che un tempo riempirono il bacino del Noce.

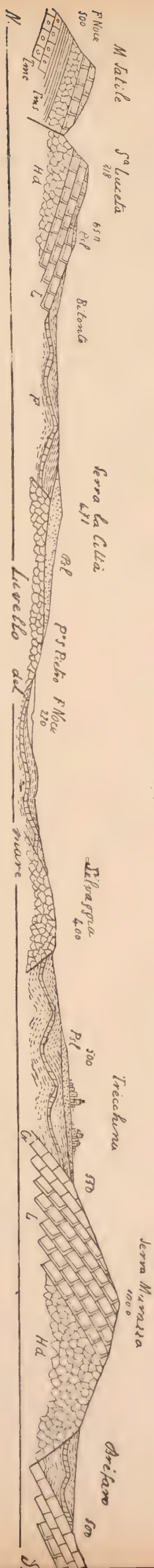
§ 4.

Storia del bacino.

Nell'interpretare la storia del bacino del Noce bisogna tener massimamente conto d'un fatto nuovo e importante, che ora per la prima volta ci si presenta innanzi nello studio di questi laghi quaternarî: voglio dire della mancanza assoluta, dentro e intorno al bacino, di sedimenti pliocenici o pleistocenici marini. Questo fatto non è una caratteristica della valle del Noce, ma costituisce una proprietà da essa divisa con quasi tutto il litorale tirreno dell'Italia meridionale, dando così luogo a un arduo problema, che occupa e occuperà per un pezzo ancora le menti dei geologi, con quanto buon esito non è dato prevedere. Oggi ancora i pareri in proposito sono discordi e *adhuc sub judice lis est.* Infatti, questa mancanza di depositi neocenici dipende da non avvenuta sedimentazione di essi in queste plaghe, oppure da una posteriore denudazione? E, se la sedimentazione non è avvenuta, ciò deve spiegarsi mediante circostanze fisiche verificatesi nel mare pliocenico e nel pleistocenico, oppure deve ritenersi, che quei mari non abbiano mai ondeggiato sulle balze tirrene dell'Appennino meridionale? Ma lasciamo per ora queste considerazioni ipotetiche e rivolgiamoci all'esame dei fatti.

Nella tettonica del bacino del Noce abbiamo visto rappresentare una parte cospicua i terreni del trias medio e sappiamo anche, per le ricerche di De Lorenzo, che questi terreni furono probabilmente abbozzati in pieghe meridiane già da un movimento orogenico pre-liasico. Questo movimento però ha un'importanza solo relativa nella configurazione orografica attuale, perchè sui terreni triasici si addensò una grande pila di calcari e di scisti mesozoici e terziari, che furono poi sconvolti dal diastrofismo post-eocenico insieme alle rocce che loro facevano e fanno da base.

30.

Hd. Hauptdolomit. — *L.* Lias. — *Cr.* Cretaceo. — *F.* Flysch eocenico superiore. — *Psl.* Pleistocene lacustre. (Scala 1:50.000).

Esistono invero altre ampie lacune tra il lias e la creta e tra questa e l'eocene, lacune, che sono rappresentate dalle transgressioni di ciascuno dei terreni liasici, cretacei ed eocenici sui terreni più antichi; ma esse, come s'è già fatto innanzi notare per gli altri laghi, sono difficili assai da spiegarsi nello stato attuale della scienza geologica; e se anche le soluzioni vengono date, restano sempre di natura ipotetica. È più prudente quindi fermarsi a guardare le probabili condizioni topografiche prima e dopo del tramonto dei tempi eocenici.

Prima della fine dell'eocene in alcuni punti della regione già non restava più alcuna traccia della pila dolomitica e calcarea, che dal trias superiore sale fino all'eocene medio, perchè nell'esteso gruppo del Sirino noi ora vediamo il Flysch dell'eocene superiore appoggiarsi e stendersi direttamente sopra i calcari a noduli di selce e gli scisti silicei del trias medio. In altre parti invece sopravvivevano ancora dei lembi di Hauptdolomit, che or si vedono al monte Arenazzo e a Rivello esser coperti dagli scisti argillosi eocenici. In altre ancora, come a Nizzullo, Foraporta, Pertusata etc., delle estese plaghe di calcari marnosi liasici vennero a contatto con i mari terziarii, che depositarono su esse i loro sedimenti. In altre finalmente ancora torreggiavano enormi pile di calcari a rudiste, che ora, frammentate e spostate, costituiscono le montagne di Lauria, Trecchina, Maratea e Sapri. L'eocene medio solo in qualche punto mostra dei piccoli lembi di calcari brecciati e di conglomerati minuti a rocce cristalline. Su questo fondo, così vario di natura litologica e forse anche topografica, si stesero le acque salate dell'eocene superiore, in cui immediatamente cominciò a sedimentarsi, depositandosi egualmente su tutte le rocce preesistenti, il fitto mantello di scisti argillosi, arenarie, conglomerati, calcari marnosi, breccioline nummulitiche e orbidoitiche, che ora costituisce l'estesissimo Flysch. Contemporaneamente cominciavano a manifestarsi i primi sintomi del grande diastrofismo post-eocenico, accompagnati da estravasazioni di magma eruttivo prevalentemente basico, che veniva a fondersi con i sedimenti sottomarini; presto però questo movimento orogenico si allargò e aumentò d'intensità, finchè alla fine del miocene la penisola italica era forse emersa ad un'altezza anche maggiore dell'attuale. Per questo diastrofismo le pieghe già formate dai terreni del trias medio furono enormemente accentuate e in alcuni punti ribaltate; essendo tale ribaltamento reso possibile dalla fitta coperta sedimentaria del Flysch, da cui esse pieghe erano avvolte. Inoltre esse furono spostate, segmentate in ellissoidi, tagliate da sopraspinte e spezzate da fratture scorrenti. La pila calcareo-dolomitica, costituita dal Hauptdolomit, dal lias e dalla creta, si curvò in gigantesche cupole e in ampli bacini, che, per la loro rigidità, sotto l'azione delle forze prementi tangenziali, furono costretti a rompersi in mille guise, dando origine a numerosi blocchi, varii di dimensioni e di forme, ma prevalentemente separati mediante fratture longitudinali, dirette da nord-ovest a sud-est, e trasversali, perpendicolari a quelle; perchè le forze del diastrofismo, che diedero origine alla catena appenninica, erano in massima dirette da sud-ovest a nord-est. Naturalmente i sedimenti dell'eocene superiore e del miocene seguirono la sorte delle rocce sottostanti e rimasero a coronare i blocchi sollevati, oppure si sprofondarono insieme ai blocchi spostati in basso.

Di pari passo però col sollevamento creatore cominciò ad agire la denudazione, che portò via il Flysch dalle parti più elevate e intaccò profondamente gli stessi blocchi mesozoici, mentre rispettava in certo modo i sedimenti eocenici delle bassure e delle

valli, anzi in qualche punto li proteggeva con una coperta di materiale alluvionale e di frana sottratto ai monti vicini. Così nei primi tempi del pliocene le condizioni orografiche e topografiche delle contrade circostanti al bacino del Noce non dovevano essere moltissimo diverse dalle attuali. Certamente la denudazione non aveva agito così profondamente ed estesamente come finora ha fatto, specie sui monti; molte alture dovevano essere ancor coperte da materiale argilloso eocenico, che or vi si cerca invano; molti canali di erosione non erano stati ancora incisi ed altri non erano così profondamente erosi come oggi sono; ma le linee fondamentali, l'ossatura tettonica del paesaggio era press'a poco simile all'attuale. Qui si risolleva l'aspra questione a cui dianzi s'è accennato. Noi sappiamo, che alla fine del pliocene ebbe luogo in tutta l'Italia meridionale una subsidenza, la quale portò il mare del pliocene superiore a 1000-1300 metri sul livello dell'attuale: ma tal mare non lasciò alcuna traccia nel bacino del Noce; ammettendo dunque che anche quelle contrade siano state bagnate dal mare pliocenico, bisogna concludere, o che non vi fu sedimentazione, o che dopo la sedimentazione avvenne abrasione e denudazione dei terreni formatisi. Sappiamo anche, che, già prima della fine del pliocene, ricominciò un nuovo sollevamento, pel quale all'aurora del pleistocene il mare era di nuovo ridisceso a circa 700 metri sull'attuale e, con brevi oscillazioni, continuò sempre a scendere, fino a raggiungere il livello d'oggi: ma di tutto ciò nessuna traccia rimane nelle montagne che separano il bacino del Noce dal mare, ove si faccia astrazione dai fori di litofagi e dalle panchine, che testimoniano il sollevamento recente della spiaggia tra La Praja e Sapri. Questa mancanza di testimonianze geologiche è tanto più importante per noi, in quanto è intimamente connessa col problema difficoltoso dell'origine del lago del Noce.

Anche qui infatti, come nei casi precedenti, non abbiamo che un unico fatto positivo: l'esistenza d'un lago pleistocenico nell'attuale vuoto bacino del Noce; e quest'unico fatto positivo lascia adito a parecchie soluzioni, tutte di natura ipotetica. Si deve supporre che questo lago pleistocenico si sia formato solo per effetto delle acque dolci accumulatesi nella valle durante e dopo l'epoca glaciale? oppure si deve imaginare un bacino di reliquato di acqua marina, che poi gradualmente si è andato addolcendo? e questo bacino di acqua salsa bisogna, a sua volta, crederlo un residuo dell'antico mare miocenico o basta pensarlo come abbandonato dal pliocenico? Ecco di nuovo, e ancor più irte di difficoltà, le questioni precedentemente discusse.

Certamente tutti i piccoli bacini lacustri quaternarî dovettero la loro esistenza alle acque correnti, che, durante e dopo l'epoca glaciale, si accumularono nelle piccole depressioni tettoniche; ma per le grandi depressioni come quella del bacino del Noce, formatesi non dopo, ma prima del sollevamento postpliocenico, riesce difficile credere o imaginare, che il mare, ritirandosi, non vi abbia lasciato delle grandi plaghe di sè, tanto più che esistevano già in questi bacini degli sfoghi ampi di natura tettonica, i quali non avrebbero permesso, che un riempimento originario per mezzo di acque dolci fosse giunto fino all'altezza di 300 metri sul fondo del bacino stesso.

E supponendo viceversa, che questo lago pleistocenico rappresenti il raddolcimento progressivo d'un antico bacino d'acqua salsa abbandonato dal mare, sia pliocenico che miocenico, si urta anche contro non piccole difficoltà, perchè resta sempre da spiegare la mancanza di sedimenti marini miocenici, pliocenici e pleistocenici sotto quelli lacustri del pleistocene e la sovrapposizione diretta e immediata di questi sul Flysch eocenico

superiore. Certo le difficoltà sono minori, se s'imagina che il mare pliocenico, ritirandosi, abbia dato origine al lago pleistocenico; perchè in questo caso la denudazione, intercorrente tra il miocene e il pliocene superiore, e l'abrasione, da cui dovette essere accompagnato l'avanzarsi del mare pliocenico superiore, spiegherebbero almeno la mancanza dei depositi marini e terrestri appartenenti al miocene e al pliocene inferiore. E questa ipotesi è provvisoriamente tanto più da accettarsi, in quanto coincide con quella risultata dalla discussione fatta sulla genesi degli altri due laghi, dell'Agri e del Mércure, nonchè con quella, che si potrebbe eventualmente tentare, sul Vallo di Diano e sul lago di Baragiano.

Accettando dunque, almeno provvisoriamente, tale ipotesi, si deve imaginare, che al principio del pleistocene il livello del mare era giunto a circa 700 metri sull'attuale e che, continuando sempre il sollevamento delle terre, una parte di esso rimase imprigionato nel bacino di Nemoli, mantenendosi tuttora le comunicazioni del mare aperto col golfo chiuso mediante la depressione tectonica compresa tra monte Messina e Serra Murazza. Ma le abbondantissime acque dolci, forse massimamente alimentate dallo scioglimento delle nevi e dei ghiacciai, che durante l'epoca glaciale erano considerevolmente estesi nel sovrastante gruppo del Sirino, dolcificarono rapidamente le acque del bacino, formandone un vero lago di grande profondità, identico agli odierni della Svizzera e delle Alpi meridionali. Le acque di questo lago incidevano tutt'attorno sulle sponde delle terrazze, che rimanevano coperte da detrito di spiaggia, mentre nel loro seno si accumulavano più di 150 metri di sedimenti. Intanto, per il continuato sollevamento delle terre, il mare si allontanava abbassandosi, e l'emissario, tendendo senza posa e senza requie a raggiungere il livello basale di erosione, approfondiva sempre più il suo corso, mentre nello stesso tempo, per il periodo di relativa aridità probabilmente succeduto all'epoca glaciale, minor quantità di acqua gli affluenti portavano nel lago. Per queste due circostanze la grande massa d'acqua dolce si scolò gradatamente verso il mare, passando tra le montagne di Tortora e di Maratea, e dell'esteso e profondo lago non rimasero ancor vive che poche pozze residuali, chiuse nelle depressioni originariamente formatesi tra i delta e i sedimenti. Mentre il livello del lago s'abbassava, la denudazione e l'erosione ne attaccavano vivamente le sponde abbandonate, e, quando il bacino si trovò del tutto vuoto di acque, esse estesero la loro opera demolitrice a tutta l'area che prima era protetta dal lago. Naturalmente, data la durata maggiore del lavorio di erosione sulle sponde soprastanti alla superficie dell'acqua, in esse i solchi scavati dalle acque correnti debbono essere più profondi che non quelli incisi sulla parte del bacino prima coperta dal lago: ciò infatti si vede benissimo sulle falde orientali del monte Coccovello e sulle settentrionali del monte Messina, nelle quali, rimanendo costante il pendío montuoso, i ripidi canali d'erosione, che scendono dalle cime, perdono immediatamente in profondità ed estensione, appena giungono a livello delle terrazze dell'antico lago. Più che mai bene si può osservare tal fenomeno, guardando i due su mentovati punti, a luce incidente, dalla via che va da Rivello al Lago. A poco a poco però la denudazione guadagnò terreno anche nel centro del bacino; i sedimenti lacustri furono rapidamente portati via dalle acque correnti, lasciando appena qualche lembo di sè nei punti più protetti; qua e là alcune terrazze di sponda, meglio conservate per la dura roccia calcarea su cui erano state incise, sono rimaste a testimoniare l'antico livello del lago scomparso. Ma l'erosione non si è arrestata ai sedimenti lacustri ed ha anche attaccato i terreni del

fondo. L'attuale fiumara del Bosco non solo rappresenta l'erosione verticale di oltre 150 metri di tali sedimenti, ma anche l'approfondimento di detta erosione nel Flysch del fondo del bacino per oltre 80 metri, fino a raggiungere la quota 220 sull'attuale livello del mare: cioè un ammontare di erosione verticale di oltre 230 metri dal tempo della scomparsa del lago fino ad oggi. Il corso del Noce attuale, dopo aver distrutto i sedimenti da esso stesso creati, dopo aver attaccato i sedimenti argillosi eocenici, ha anche eroso le rocce mesozoiche fondamentali, mascherate dai terreni sovraincombenti, per una considerevole profondità, come si vede nella profonda e cupa gola scavata nel Hauptdolomit di Rivello, che raggiunge i 150 metri di profondità.

Mentre la denudazione operava ed opera così efficacemente per distruggere il già fatto e per creare quindi nuovamente nel mare altri sedimenti, non rimanevano, nè rimangono inoperose le forze creatrici delle nostre montagne. Durante e dopo l'esistenza e la scomparsa del lago hanno perdurato le forze orogeniche, che cominciarono ad esplicarsi alla fine del pliocene, accompagnate dalla eruzione delle rocce vulcaniche tirrene. Questo diastrofismo ha avuto ed ha tuttora un carattere regionale, tendendo sempre ad innalzare fuor dell'onde del mare questa parte ultima della catena appenninica; ma naturalmente questo moto ascensionale non poteva e non può verificarsi uniformemente in una massa così frantumata come è questa parte dell'Appennino; e i varî blocchi mesozoici, separati da fratture più o meno importanti non hanno obbedito nè obbediscono in egual misura alle forze spingenti e sollevanti, come ne fa non dubia fede la diversa e saltuaria altezza a cui ora si trovano le terrazze dell'antico lago, un tempo incise in un medesimo piano orizzontale. I fremiti sismici, non rari nè leggieri, che scuotono frequentemente le montagne di Maratea, Trecchina e Lauria, accusano l'attività sempre desta delle forze orogeniche. Intanto il fiume epigono dell'antico emissario, il Noce o Talao, continua ad approfondire l'originaria depressione tettonica, compresa tra Serra Murazza e monte Messina, e porta nel glauco Tirreno gli ultimi avanzi dei sedimenti lacustri del bacino del Noce, e la carne e l'ossa stesse strappate alla costituzione scheletrica fondamentale dell'ampia valle. Tempo verrà, in cui più nessuna testimonianza geologica potrà dire, che queste bacino fu un giorno occupato da un gran lago, nelle cui acque profonde e pacate si specchiavano tutt'intorno le montagne selvose.

CONCLUSIONE

Abbiamo finora visto nell'Appennino meridionale nascere, svilupparsi, vivere e morire dei grandi laghi, che dovevano dare al paesaggio dei tempi pleistocenici un aspetto del tutto diverso da quello dell'epoca presente. Formavano questi grandi laghi una caratteristica dell'Italia meridionale, o pur si stendevano anche nelle valli settentrionali del nubifero Appennino? In questo ancor oggi abbiamo (ove si faccia astrazione dai laghi di Bolsena, Bracciano etc., di origine vulcanica ed estranei quindi al caso nostro) delle grandi plaghe interne di acqua dolce, come il Trasimeno e l'ormai disseccato Fucino, che ricordano assai prossimamente i nostri laghi quaternarî. Ma nell'epoca anteriore alla nostra molto numerosi e importanti erano questi bacini lacustri anche nell'Appennino centrale e nel settentrionale. De Stefani nel suo lavoro su *Les terrains tertiaires supérieurs du bassin de la Méditerranée* (Annales de la Soc. géol. de Belg., t. XVIII, 1891, p. 313) ne dà un cenno rapido e conciso: « Au milieu de plusieurs des

principales vallées de l'Apennin, dans les recoins plus hauts et plus éloignés de la mer, se formaient des bassins d'eau douce, des lacs de montagne, qui devaient donner au paysage un caractère semblable à celui de certains endroits des Alpes actuelles. Tels étaient les lacs, situés tous sur le versant tyrrhénien, de Sarzana et de Lunigiana dans la vallée de la Magra, de Castelnuovo-di-Garfagnana et de Barga dans la vallée du Serchio, du Val di Sieve, de la vallée supérieure du Tibre, et du Chiascio. Ils étaient habités par une faune d'eau douce très pauvre, mais en revanche leurs dépôts renfermaient en quantité des mollusques et des vertébrés terrestres. Les couches les plus anciennes sont argileuses et plus ou moins lignitifères; les supérieures sont sableuses et caillouteuses. Dans les Alpes aussi, il y avait des lacs à Leffe (Bergamo), dont les dépôts inférieurs, au moins à en juger par les vertébrés, sont pliocènes, et probablement dans le Val Sabbia, dans le bassin du Chiese, où l'on a découvert, dit-on, l'*Elephas meridionalis*. D'autres bassins lacustres ou marécageux étaient plus bas, dans de fjords au milieu des montagnes, mais au niveau de la mer, séparés par des barres et des dunes ou par des plages sablonneuses plus ou moins étendues: on peut citer les bassins lacustres de Rieti, de Terni, de Perugia, et les plus important entre tous, celui du Val-d'Arno ». Lo stesso De Stefani in altri lavori speciali ha dato notizie più diffuse su questi singoli laghi dell'Appennino settentrionale. Così nella Nota su *Le ligniti del bacino di Castelnuovo di Garfagnana* (Boll. Com. geol. ital., 1887), descrivendo questo bacino, lungo da 9 a 10 largo da 2 a 3 chilometri e giungente con i suoi depositi alla massima altezza di 680 m. sul mare attuale, dice che « La conca nella quale questi strati si formarono non era una vallata d'erosione, nè un bacino prodotto dalla formazione d'un argine glaciale o alluvionale, ma un sinclinale formato nell'atto stesso del sollevamento delle rocce circostanti, sì che diede ricetto alle acque scolanti dalle montagne d'intorno ». E in ultimo finisce: « Concludendo la storia del bacino di Castelnuovo dirò che già prima dell'età pliocenica si erano sollevate le Alpi Apuane e l'Appennino, serrando nel mezzo amplissime conche sinclinali. Durante il Pliocene queste si riempirono d'acque le quali formarono uno o più laghi, di cui fra i principali fu quello di Castelnuovo. Il lago era fondo in qualche luogo 450 metri. Traccie dell'antico litorale si palesano nelle alterazioni sofferte dalle arenarie, e forse nelle ripidi pendici rappresentanti antichi terrazzi e dovute all'erosione delle acque sopra le antiche roccie. Seguitando il sollevamento il lago fu riempito e dove prima era acqua venne terra: il Serchio, percorrendo in senso longitudinale la valle, seguitò la sua strada attraversando gli strati emersi pei quali trovarono pure la via i suoi affluenti, e i depositi pliocenici vennero per ogni parte solcati, terrazzati e spianati, e le spianate furono coperte da ghiaie quaternarie ». Circostanze geologiche simili egli riferisce per *Il lago pliocenico e le ligniti di Barga nella valle del Serchio* (Boll. Com. geol. ital., 1889): « Concludendo dunque, durante il Pliocene, la disposizione sinclinale degli strati lungo la valle del Serchio, tra le Alpi Apuane e l'Appennino, dava origine, nell'odierno territorio di Barga, ad un ampio lago avente la maggiore lunghezza secondo l'asse della valle. In certi periodi esso fu profondo probabilmente circa 600 m., e se le acque furono forse alcuni metri più alte del livello del mare, il fondo si trovò molto più basso di questo. Esso era più a valle del lago di Castelnuovo; le acque erano a livello sol di poco inferiore, ma il fondo da 154 a 200 metri più basso..... In niuna delle due conche si ha traccia di movimenti sopravvenuti dopo la deposizione degli strati pliocenici nelle roccie circo-

stanti; per cui bisogna supporre che il sollevamento, pel quale la vallata è oggi più alta sul mare, sia stato regionale e generale..... Il lago pliocenico venne poco per volta a sparire pel riempimento prodotto dalle materie, e pel sollevamento, onde si approfondò lo scolo delle acque. Rimasto il lago a secco, i fiumi e i torrenti cominciarono a farsi strada in mezzo ai suoi depositi ed a portarli via formandovi dei terrazzi e depositando a lor volta su questi parte delle loro alluvioni ». Come si vede, grande è la simiglianza tra questi antichi laghi dell'Appennino settentrionale e quelli, da me descritti, del meridionale; e questa simiglianza cresce, quando si pensi, che in quelli, come in questi, le rocce più giovani, su cui immediatamente si appoggiano i depositi lacustri, sono rappresentate dal Flysch dell'eocene superiore. L'unica differenza sta in ciò, che ai primi viene generalmente attribuita un'età pliocenica, mentre ai secondi io assegno un'età pleistocenica; e che per quelli De Stefani esclude una qualsiasi originaria comunicazione col mare, mentre a me questa comunicazione originaria pare probabile. Forse, come cercherò di dimostrare brevemente, queste differenze esistono solo nelle opinioni degli autori e non nelle circostanze di fatto presentate dai vari laghi.

Infatti, Ristori, descrivendo *Il bacino pliocenico del Mugello* (Boll. Soc. geol. it., 1889) arriva, sullo stesso argomento, a conclusioni alquanto diverse da quelle di De Stefani: « Non è difficile determinare anche oggi quali potevano essere durante il Pliocene le condizioni orografiche del Mugello. Il lago pliocenico che copriva quella regione probabilmente non era che un resto dei mari miocenici, i quali, disposti alle falde dell'Appennino medesimo, in via di sollevamento continuo, lo tenevano più qua e più là ancora in loro dominio. Col procedere del sollevamento, sul finire del periodo miocenico, venne ad essere interrotta ogni comunicazione di questo mare interno coll'aperto mare, nel medesimo tempo che in questo bacino, ormai divenuto chiuso, cresceva l'afflusso delle acque dolci. Il continuo affluire di queste acque e la loro massa superò di gran lunga il consumo dovuto alla evaporizzazione, quindi crebbe il livello del lago, fino a trovare il punto più basso, per cui si costituì un emissario, od un braccio di comunicazione con i laghi contemporanei e vicini. Stando così le cose, ben si comprende come sia andata adagio adagio scomparendo la salsedine, e come in un tempo relativamente breve questa conca potè trovarsi totalmente invasa dalle acque dolci. L'afflusso delle acque era indubbiamente abbondante; giacchè come vedemmo facevano corona a questa conca gli Appennini da una parte, la Calvana e il gruppo di Monti Giovi dall'altra, ed i torrenti che scendevano da questi monti e più specialmente dall'Appennino dovevano nell'insieme avere una portata assai considerevole relativamente al bacino che dovevano alimentare. Infatti la sua superficie non superava i 340 chilometri quadrati. Del resto la differenza notevole fra l'afflusso delle acque provenienti dai monti vicini e l'evaporazione è dimostrata con evidenza dall'altezza notevole raggiunta dalle formazioni plioceniche. Esse in vari punti toccano la quota di 400 e 456 metri, e questo limite massimo è in diretto rapporto coll'altezza a cui doverono giungere le acque prima di trovare uno scolo naturale attraverso ai monti che avevano chiuso all'intorno tutto il bacino, e ne avevano col solo sollevarsi interrotto ogni comunicazione ». Lo stesso De Stefani, descrivendo anche lui *Il bacino lignitifero della Sieve in provincia di Firenze* (Boll. Com. geol. ital., 1891) non è molto lontano dall'esprimere le stesse opinioni di Ristori: « Chiamasi Mugello tutta la parte più alta della valle della Sieve, che è il principale affluente dell'Arno e quasi l'unico fiumicello

d'importanza, che scenda alla destra di esso. La vallata del Mugello si presenta come una distesa di piccoli piani frastagliati da basse collinette, le quali occupano un bacino formato da montagne alquanto più alte. Le collinette sono costituite da terreno pliocenico lacustre, giacchè un lago, il più esteso forse dopo il Val d'Arno, fra quelli interni dell'Appennino, occupò quel bacino durante il Pliocene..... I molluschi provano che le acque del bacino ebbero carattere lacustre. È però singolare l'abbondanza delle *Dreissensiae* negli strati inferiori, ciò che quasi farebbe credere esistessero acque leggermente salmastre forse per comunicazioni più estese col mare ». Dunque anche per questi laghi non è realmente esclusa ogni originaria comunicazione col mare contemporaneo.

Ora, date le descrizioni, che noi abbiamo, di questi laghi dell'Appennino settentrionale, è possibile assegnare con sicurezza ad essi un'età pliocenica, come i su citati autori fanno? Non sarebbe più giusto ritenerli pleistocenici e contemporanei a quelli dell'Appennino meridionale? Le faune in quei laghi raccolte sono piuttosto scarse; e la difficile loro interpretazione non può con molto peso opporsi alle contrarie testimonianze geologiche. Infatti, se, come vuole Ristori, quei laghi pliocenici rappresentavano avanzi di mari miocenici, dove sono i sedimenti miocenici e pliocenici inferiori, marini e lacustri, che dovrebbero sottostare ai depositi lacustri del pliocene superiore? E se, come vuole De Stefani, quelle conche tettoniche furono fin da principio ripiene da acque dolci, dopo il sollevamento post-eocenico, dove sono andati i sedimenti marini miocenici, o almeno i loro prodotti di denudazione, che non potevano uscir fuori dai limiti di quei bacini chiusi? Inoltre noi sappiamo, che verso la fine del pliocene ebbe luogo per tutta la penisola italica una subsidenza, che portò le onde del mare pliocenico nell'Appennino meridionale a un'altezza di 1000-1300 metri sul mare attuale; nell'alta valle dell'Aniene, come è stato osservato da De Angelis, a 1050 metri; nell'Appennino settentrionale fino a 846 metri, come ha recentemente osservato B. Lotti sulla destra del fosso Astrone nella tavoletta di Montepulciano. Ora, mentre il mare pliocenico superiore ondeggiava almeno a 900 m. sull'attuale, come potevano contemporaneamente esistere in mezzo ad esso dei laghi, di cui la superficie si trovava appena a 700, 600 e perfino soli 500 metri d'altezza? Si potrebbe obbiettare, che questi laghi erano originariamente più alti e che i posteriori movimenti orogenici li hanno fatti rimanere a un livello inferiore a quello, cui furono sollevati i contemporanei sedimenti marini. Ma, a parte l'assurdità che proprio tutte le aree occupate dai laghi siano dovute rimanere depresse rispetto alle circostanti, noi abbiamo visto che i dislocamenti tettonici postpliocenici, pur essendo importanti, non hanno ancora potuto sensibilmente alterare l'assetto dato dal sollevamento generale; e lo stesso De Stefani, come dianzi s'è detto, scrive che « in niuna delle due conche si ha traccia di movimenti sopravvenuti, dopo la deposizione degli strati pliocenici, nelle roccie circostanti; per cui bisogna supporre che il sollevamento, pel quale la vallata è oggi più alta sul mare, sia stato regionale e generale ». Meglio dunque indurne, almeno fino a che non vengano altre prove in contrario, che questi grandi laghi dello Appennino settentrionale, così come quelli del meridionale, appartengano all'epoca pleistocenica.

Questa induzione s'accorda non solo con la recente storia geologica di tutta la penisola italica, ma anche con quella di buona parte delle terre finora geologicamente esplorate. La presenza e la scomparsa di laghi pleistocenici non fa altro che confermare

i constatati grandi cambiamenti geologici avvenuti dopo i tempi pliocenici, specialmente per opera dell'erosione. J. Geikie nel suo lavoro *On the glacial succession in Europe* (Trans. of R. Soc. of Edinburgh, vol. XXXVII, 1892) ricorda che in Francia sono state trovate nella regione del Puy de Dôme delle evidenze di un intervallo glaciale di tal durata, da dar luogo a un'escavazione di vallate fino alla profondità di 900 piedi. W. Kilian nelle *Feuilles de Briançon*, *Grenoble*, *Vizille*, *Die*, *Grap etc.* (Bull. d. Serv. d. l. carte géol. d. France, n. 53, tome VIII, 1896-97) parla d'un'erosione di 180 metri di profondità avvenuta nella Vallée de la Clarée dopo la deposizione delle alluvioni interglaciali. Dutton nella *Tertiary History of the Grand Cañon District*, Gilbert nel *Lake Bonneville*, Russel nella *Geological History of the lake Lahontan*, Lawson in *The Post-Pliocene Diastrophism of the Coast of Southern California* (Bull. of. Dep. of Geology, University of California, vol. I) e altri moltissimi non fanno che descrivere gli imponenti effetti prodotti dall'erosione e dai movimenti orogenici nella crosta della terra solo durante il tempo trascorso dalla fine del pliocene ad oggi. E, per finire, non posso fare a meno di citare a questo proposito le parole già scritte dal padre della moderna geologia, C. Lyell, nei suoi *Student's Elements of geology* (2ª ed., London 1874, pag. 165 e seg.): « They who have formed the most exalted conceptions of the erosive energy of moving ice do not deny that during the period termed « Glacial » there have been movements of the earth's crust sufficient to produce changes of level in Europe amounting even in England to 1.400 feet, as in Moel Tryfaen..... If inequalities of movements such as those witnessed in New Zealand in 1855, and above alluded to (p. 149), are part of the regular course of nature, and have governed the movements of the earth's crust in ancient as well as in modern time, we cannot doubt that they must have inflenced the formation of lakes, more especially if we can show that the glacial period, or at least some part of it, was sufficiently modern to reach down to the era of the living species of mollusca. That this was the case is sufficiently proved by the occurence of marine shells in the West of England at the height of 1.100 feet near Macclesfield, and of 1.400 on Moel Tryfaen, eighty miles distant; these fossil shells being species still living, though implying a more northern fauna than that of corresponding latitudes at the present period ». Del resto tutte le condizioni geologiche di questi grandi laghi estinti dell'Appennino, e le faune di quelli dell'Appennino meridionale, menano concordemente e irresistibilmente a credere, che essi si siano formati per e dopo il grande diastrofismo orogenico post-pliocenico.

Se poi realmente tutti questi laghi, o solo alcuni, o nessuno, siano laghi di reliquato, abbiano cioè un giorno direttamente comunicato col mare, da cui si sono poi progressivamente allontanati, addolcendo nel tempo stesso le loro acque: è una quistione più complessa e più difficile a risolvere. Nelle pagine precedenti abbiamo visto, che è questa l'unica soluzione, la quale, se non spiega tutti i problemi presentati da questi grandi laghi quaternarî, è quella almeno, che urta contro minor numero di difficoltà. Ma tali difficoltà esistono, nè si sono taciute. Non c'è da augurarsi quindi altro, che posteriori ricerche le tolgano via gradatamente, raccogliendo altri fatti, che meglio convalidino questa mia spiegazione, o la sostituiscano addirittura con un'altra migliore. Del resto in queste, come in tutte le ricerche scientifiche, dietro ogni difficoltà sciolta, se ne affacciano cento altre nuove e insolute; e sempre imperscrutabilmente profonda rimane la vera essenza della natura. Sembra di procedere, e non si fa che camminare

lungo una linea, di cui i due capi, con mille giri tortuosi, si perdono nell'infinito. E per noi geologi restano eternamente vere le profonde parole scritte da Goethe nelle *Einzelne Betrachtungen und Aphorismen über Naturwissenschaft*: « Steine sind stumme Lehrer, sie machen den Beobachter stumm, und das Beste was man von ihnen lernt ist nicht mitzutheilen ».

Napoli, Museo geologico dell'Università,
Maggio del 1897.

INDICE

finita di stampare il dì 5 Aprile 1898

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

ACQUE DEL GURGITELLO DELLE TERME BELLIAZZI

NELL' ISOLA D' ISCHIA (Casamicciola)

ANALISI CHIMICA

ESEGUITA

dal socio ordinario prof. AGOSTINO OGLIALORO-TODARO

assieme

AI DOTTORI ORESTE FORTE E ANTONIO CABELLA

DIRETTORE ED ASSISTENTI DELL' ISTITUTO CHIMICO

DELLA R. UNIVERSITÀ DI NAPOLI

presentata nell' adunanza del dì 9 Aprile 1898

Le rinomatissime acque dette del Gurgitello, presso Casamicciola, nella vulcanica Isola d'Ischia, l'antica Pithecusa, comprendono parecchie sorgenti situate in linea quasi retta « *alle radici* (come dice l'Aloisio nel suo: L'INFERMO ISTRUITO NELL'USO DELLE ACQUE MINERALI, Napoli 1757) *di piacevolissima collina chiamata* OMBRASCO *dai suoi abitatori; su di cui già sono trascorsi circa tremila anni, dacchè primeramente vi soggiornarono gli Eritresi ed ora di rimpetto ad essa il Santo Monte della Misericordia di Napoli mantiene ben fornito Spedale per quei languenti, che abbisognano di curarsi colli naturali rimedii che chiamano d' Ischia* ».

Infatti fino al 28 Luglio 1883 di fronte alle sorgenti poteva ammirarsi l'antico quanto grandioso edificio dell'ospedale del Pio Monte della Misericordia, che ogni anno raccoglieva numerosi infermi, col santo fine di curarne i mali e poi restituirli alle famiglie, o già guariti, o, per lo meno, sempre in condizioni di salute immensamente migliorate. Ed in vero più che le numerose statistiche, note al pubblico, la efficacia incontrastabile della cura con le acque del Gurgitello è stata in tutti i tempi dimostrata dall'incessante concorso di numerosi bagnanti, di ogni classe di persone e di tutte le nazioni, così che si comprende assai bene il motto che da secoli trovasi scolpito sulle sorgenti del Gurgitello:

Fluunt ad eum omnes gentes.

Ecco la più infallibile analisi delle acque! *Vox populi vox Dei!*

Delle sorgenti alcune appartengono al Pio Monte della Misericordia; le altre sono dello Stabilimento Belliazzi. Anzi questo Stabilimento è costruito sulle più rinomate delle sorgenti del Gurgitello, come ne fanno fede due monumenti storici importantissimi che in esso si trovano, cioè: un bassorilievo in marmo della B. V. M. col Bambino ed una lapide con lo stemma del Principe di Montesarchio.

Ecco quanto sopra questi monumenti si legge nel D'Aloisio:

« In questa vasca venne curato dal male d'Idropisia il Cardinal Conti, che poi fu « assunto al sommo Pontificato, sotto nome d'Innocenzo XIII, e perciò in memoria di « una così gran cura volle fare riporre su la porta del Bagno l'effigie della B. V. M. col « Bambino Gesù nel seno in bianco marmo scolpita coll'iscrizione seguente:

DEIP. VIRG. AD IANICULUM

MICHAEL. A. S. R. E. CARD. DE COMITIB. SANITAT. ELARGITAE

VOTUM P. AN. D. 1717 AETATIS SUAE 63.

« Contiguo a questo bagno „ (è detto bagno nel senso di vasca per bagno) " il « Principe di Montesarchio fece nella fine del secolo scorso „ (si riferisce alla fine del « milleseicento) " edificare altro bagno „ (cioè vasca) ", il quale, avendo la propria « sorgiva nella vasca medesima dei bagnanti, riesce comodo e pulito nei suoi usi. Quindi « il nobilissimo Signore si compiacque, colla innata sua generosità, di render comune « qualunque uso di esso alle qualificate persone bisognose di bagno: facendo alzare « sopra la volta della porta di esso lavacro lo stemma del suo illustre casato, con « iscrizione che dice:

D. ANDREAS D'AULOS MON. HERG. PRIN.

PROPR. IMPENSIS ET VIGILAN, SOLERTI

SUI SUFFRAG. TOTIUSQUE NOBILITATI

COMMODO

NEC NON UTILITAT PRAEBENDAE

HAEC BALNEA COSTRUIT A. S. MDCXCVIII ».

Le acque di scolo delle sorgenti Belliazzi vanno ad unirsi a quelle del Pio Monte della Misericordia mediante un apposito canale, che ricongiunge le prime a quelle del Pio Monte, il cui governo ha fatto recentemente costruire un nuovo e bello Ospedale in riva al mare, ma distante dalle sorgenti.

Appartiene allo Stabilimento Belliazzi un'altra sorgente di acqua fredda, fin da remoti tempi chiamata Capone o Cappone, e più comunemente, per i suoi effetti curativi, col nome di *Acqua dello stomaco*. Questa sorgente è l'ultima ad occidente, e, a quanto risulta dalla descrizione dei luoghi fatta dai più autorevoli e antichi scrittori, che con tanto amore e precisione ammirabile hanno parlato dei bagni dell'Isola d'Ischia, determina appunto il limite occidentale delle sorgenti dell'acqua del Gurgitello.

DESCRIZIONE DELLE SORGENTI ESAMINATE

Le sorgenti termali, dalle quali attingemmo l'acqua necessaria alle nostre ricerche, trovansi in fondo ad una specie di grotta sotterranea, molto grande, alla quale si accede dalla strada per un'entrata laterale allo Stabilimento Belliazzi. L'ambiente di tale grotta, che potrebbe divenire una buonissima stufa, quantunque attualmente sia molto ventilato, trovasi ad una temperatura relativamente elevata (in Dicembre ultimo 24°,5, mentre fuori si aveva appena 9°,8); esso è saturo di vapore di acqua, tanto che questo, condensandosi sulle pareti e sulla volta, ne gocciola continuamente. Le sorgenti fluiscono in grandi vasche comunicanti fra loro mediante cuniculi; da quella a sinistra, ch'è la più piccola, parte un canale, che conduce l'acqua esuberante, come già si è detto più sopra, allo stabilimento del Pio Monte della Misericordia. In questa vasca di sinistra avviene, dunque, la mescolanza con l'acqua delle altre, epperò su di essa furono praticate le ricerche complete; mentre che con l'acqua di una delle sorgenti isolate furono soltanto eseguite le determinazioni dei corpi più importanti.

Della sorgente Capone, Acqua dello stomaco, che si trova a destra dell'ingresso, fu anche prelevata una sufficiente quantità di acqua per determinarne i principali componenti.

CARATTERI FISICI ED OPERAZIONI PRELIMINARI

Le osservazioni sulle sorgenti furono fatte nel Dicembre del 1897. Le due acque termali, oggetto delle nostre analisi, e che denomineremo « Destra » e « Mescolanza », presentano una superficie perfettamente calma e non agitata da sensibile svolgimento gassoso; sono limpide, perfettamente scolorate ed inodore, di sapore identico salino-lisciviosо. Rendono intensamente azzurra la carta rossa di tornasole e presentano completamente negative le reazioni per l'*ammoniaca*, fatta col reattivo di Nessler, e per l'*idrogeno solforato*, fatta con una soluzione alcalina di idrato di piombo; invece vi si riscontrano tracce sensibili di *nitriti*, mediante la nota reazione del Griess con acido solfanilico e cloridrato di α-naftilamina, e delle quantità piuttosto rilevanti di *nitrati*, mediante la reazione con la difenilamina.

La temperatura, determinata alle ore 9 del 16 Dicembre, fu trovata per entrambe le vasche di 47°*C.*, mentre quella dell'ambiente era, come fu detto, di 24°,5, e quella della strada di 9°,8. Ma quando lo stabilimento è in attività la temperatura dell'acqua sale a 60°-60°,5.

Dopo aver esaurite le sopraindicate ricerche, si raccolsero diversi campioni in bottiglie e bottiglioni di vetro, nonchè una grande quantità in apposite damigiane di acqua Mescolanza per eseguire in laboratorio la ricerca dei corpi rari e di quelli contenuti in minime quantità. Inoltre, furono preparati alle sorgenti stesse e poi trasportati in laboratorio i saggi per le determinazioni dei gas disciolti e dell'anidride carbonica.

ANALISI QUALITATIVA

Oltre alle ricerche preliminari innanzi esposte, che furono praticate alle sorgenti stesse, fu eseguita in laboratorio l'analisi sistematica, la quale fu completa per l'acqua Mescolanza, mentre per quella della sorgente a destra fu limitata alle sole sostanze contenute in quantità notevoli.

A) **Ricerca delle sostanze contenute in maggiore quantità.** — Per tale ricerca fu impiegato un litro di ciascuna acqua mantenendola in ebollizione per circa un'ora in capsula di porcellana e sostituendo con acqua distillata quella che si andava evaporando, in modo da lasciar depositare solo quelle sostanze che erano mantenute in soluzione dalla presenza dell'anidride carbonica. Il deposito così formatosi fu separato per filtro dalla soluzione e lavato benissimo con acqua distillata; in esso con gli ordinarii reattivi fu constatata la presenza di grandi quantità di *calcio, magnesio e acido carbonico* e piccole tracce di *ferro*, mentre riuscì vana la ricerca degli acidi solforico e fosforico.

La soluzione, poi, dopo avervi constatata la presenza di notevoli quantità di *cloro, acido solforico, silice, potassio, sodio e tracce di magnesia* e la completa assenza della calce, fu sottoposta ai saggi seguenti. In una piccola porzione, svaporata con acido nitrico, furono trovate delle tracce di *acido fosforico* mediante il molibdato ammonico; il resto della soluzione fu concentrato fortemente; il residuo aveva reazione fortemente alcalina sulle carte di tornasole, trattato con acido cloridrico faceva viva effervescenza, e saggiato con cloruro di calcio dava abbondante precipitato bianco, che spariva con effervescenza mediante aggiunta di acido cloridrico. Crediamo così dimostrata evidentemente la presenza nell'acqua di notevoli quantità di *carbonati alcalini*, ed inoltre che la calce deve trovarsi disciolta solo allo stato di bicarbonato, non essendosi rinvenuta traccia di tale base nell'acqua filtrata dopo l'ebollizione, nè avendo riscontrato acido solforico nel deposito che si forma. Anche il magnesio, essendo l'acqua ricca di carbonati alcalini, deve trovarsi disciolto allo stato di bicarbonato.

La presenza dell'anidride carbonica libera e semicombinata ci fu anche svelata trattando l'acqua con idrato di calcio: si ottenne un abbondante precipitato, il quale spariva solo con grande eccesso di acqua, il che dinota che l'anidride carbonica libera deve trovarsi in quantità non molto abbondante.

Piccole quantità di materie organiche ci furono svelate dal leggerissimo annerimento che subiva il residuo dell'acqua quando veniva calcinato debolmente in un crogiuolo di porcellana coperto.

B) **Ricerca delle sostanze contenute in piccola quantità.** — Per questa ricerca, eseguita, come fu detto, per la sola acqua Mescolanza, ne furono impiegati 20 litri, i quali vennero concentrati fino a piccolo volume; filtrato il liquido fu lavata benissimo la parte insolubile con acqua distillata, avendo cura di condurre le operazioni con scrupolosa esattezza, acciocchè questo stesso processo potesse servirci, occorrendo, all'eventuale dosamento dei corpi trovati.

La soluzione filtrata fu svaporata fino ad ottenere una massa salina umida, sulla quale fu eseguita la ricerca ed il dosamento del *bromo* e del *jodio*, come sarà detto diffusamente trattando della determinazione di questi due corpi. Il liquido proveniente da tale dosamento, dopo aver separato con acido cloridrico l'eccesso di argento occorso per precipitare gli alogeni, fu portato ad un volume determinato e suddiviso in due porzioni. Una ci servì per la ricerca e dosamento del *litio*, come sarà detto più innanzi; nell'altra, dopo averla fortemente concentrata, constatammo la presenza di tracce di *acido borico*, sia con la nota reazione della carta di curcuma, sia con l'aiuto dello spettroscopio.

La parte insolubile fu trattata con acido cloridrico, svaporata la soluzione a secco in capsula di platino, ripreso il residuo con acqua e acido cloridrico e filtrato. La solu-

zione cloridrica ci servì per la ricerca del *ferro, allumina e manganese*, nonchè per il dosamento di quest'ultimo, come sarà detto nell'analisi quantitativa; il liquido risultante dalla separazione di questi corpi fu precipitato con carbonato ammonico; il precipitato raccolto, calcinato fortemente, fatto bollire il prodotto con acqua, filtrato, evaporato il liquido ed esaminato il residuo allo spettroscopio, si poterono scoprire nettamente delle tracce di *strontio* e di *bario* dalle loro righe caratteristiche. Il residuo rimasto sul filtro, dopo il precedente trattamento con acido cloridrico della parte depositatasi per concentrazione dell'acqua, fu calcinato con tutto il filtro e liberato dalla silice scaldandolo con acido fluoridrico e solforico in una capsula di platino. Il prodotto venne fuso con bisolfato potassico, trattata la massa fusa con acqua fredda, filtrato, il filtrato per prolungata ebollizione produsse un leggerissimo precipitato bianco sporco dovuto a piccole tracce di *acido titanico* e la parte restata indisciolta, esaminata insieme alle ceneri del filtro con lo spettroscopio, lasciò svelare ancora delle piccolissime tracce di bario.

C) **Ricerca delle sostanze contenute in quantità minime e dei corpi rari.** — Per questa ricerca furono svaporati oltre 400 litri di acqua Mescolanza, raccolta in damigiane, fino al punto in cui cominciavano a depositarsi i sali solubili, e fu filtrato.

Nella parte solubile furono decomposti i solfati con cloruro di bario, filtrato il liquido ed evaporato a secco; il residuo venne trattato diverse volte con dell'alcool a 90 per cento, filtrato di nuovo, distillato l'alcool dal filtrato portando a secco, il residuo fu ripreso ancora con alcool e ripetuto lo stesso trattamento fino ad eliminare la più gran parte dei cloruri di potassio e di sodio. L'ultimo residuo ottenuto dalla evaporazione, sciolto in acqua, fu trattato con cloruro di platino; il precipitato ottenuto, raccolto su filtro, fu trattato ripetutamente con acqua bollente, esaminando ogni volta allo spettroscopio una piccola porzione di ciò che restava sul filtro. Si constatarono così delle tracce piccolissime ma evidenti di *cesio* e di *rubidio* dalle righe brillanti e caratteristiche che si osservarono ogni volta nello spettro. I diversi residui insolubili nell'alcool furono riuniti e sciolti in acqua: nella soluzione non fu possibile mediante l'ammoniaca e l'ioduro di potassio scoprire alcuna traccia di *tallio*.

Una porzione del residuo insolubile ottenuto nella evaporazione della massa d'acqua precedente fu destinata alla ricerca del *fluoro*. Dopo averla disseccata e calcinata al rosso, fu trattata con acqua ed un leggero eccesso di acido acetico; svaporato il tutto a bagno-maria fino a sparire completamente l'odore dell'acido acetico, il residuo venne ripreso con acqua, filtrato e lavata benissimo la parte insolubile. Questa fu seccata e calcinata al rosso, quindi impastata con acido solforico concentrato in un crogiuolo di platino, scaldando molto moderatamente e coprendo il crogiuolo con un vetro da orologio la cui parte convessa, rivolta verso l'interno del crogiuolo, era spalmata di paraffina e portava dei tratti praticati con una punta di ferro. Dopo circa un'ora, ripulendo esattamente il vetro, si poterono osservare, specialmente alitandovi sopra, le leggere incisioni prodotte dall'acido fluoridrico.

Tutto il rimanente residuo insolubile fu trattato con acido cloridrico e filtrato. La parte restata sul filtro fu trascurata avendo già trovato, studiando il residuo di 20 litri, il titanio ed il bario; la soluzione cloridrica fu sottoposta ad una prolungata corrente d'idrogeno solforato con le note cautele, filtrata dopo lungo riposo ed il lievissimo precipitato ottenuto, sottomesso agli ordinarii processi di analisi, svelò delle piccolissime tracce di *arsenico* e di *rame*. Il liquido filtrato dal precipitato prodotto dall'idrogeno

solforato fu trattato con i soliti reattivi dell'analisi sistematica, ma non lasciò scoprire nessun altro corpo all'infuori di quelli già trovati precedentemente.

Finalmente dall'esame dei gas disciolti nell'acqua, questi risultarono costituiti in massima parte da azoto, oltre a piccole quantità di ossigeno e di anidride carbonica.

Cosicchè, riassumendo i risultati dell'analisi qualitativa, si ha che l'acqua contiene disciolte le seguenti sostanze:

Sostanze		Sostanze	
Acido carbonico, Ossigeno, Azoto, Cloruri, Solfati, Nitrati, Silice, Calce, Magnesia, Potassa, Soda	quantità notevoli	Bromuri, Ioduri, Fosfati, Nitriti, Acido borico, Alluminio, Ferro, Manganese, Bario, Strontio, Litio, Materie organiche	piccole quantità
		Titanio, Fluoro, Rubidio, Cesio, Arsenico, Rame	tracce

ANALISI DELLE CONCREZIONI

Queste si presentano in masse stratificate di colore bianco-grigiastro con struttura cristallina. Furono separate meccanicamente da qualche particella organica che contenevano e quindi sottoposte all'analisi qualitativa col seguente processo. S'impiegarono gr. 1300, polverati grossolanamente, i quali vennero dapprima, mediante lavaggio con acqua distillata, liberati dalla piccola quantità di sali solubili che potevano esservi ancora aderenti e quindi lasciati digerire con acqua ed acido cloridrico a caldo ed in eccesso. Si notò una fortissima effervescenza dovuta a grandissima quantità di *carbonati;* si fece raffreddare e si filtrò, lavando ripetutamente il residuo con acqua distillata.

Tale residuo era costituito in gran parte di *silice*, la quale venne eliminata con acido fluoridrico e solforico, il prodotto fuso con bisolfato potassico, ripresa la massa

con acqua fredda e filtrato; nel liquido, sottomesso a prolungata ebollizione, furono trovate delle piccole tracce di *titanio*; nel residuo, dopo averlo disgregato con carbonato sodico, fu ricercata la *barite* e la *stronliana*, seguendo le norme che abbiamo già esposte per la ricerca di tali corpi nell'acqua, e se ne constatarono anche qui delle piccole quantità.

Il liquido separato dalla parte insolubile nell'acido cloridrico non conteneva che delle piccole quantità di *acido solforico*. Fu sottoposto ad una prolungata corrente di idrogeno solforato, scaldandolo in principio verso 70° e lasciandolo raffreddare in fine continuando sempre la corrente; dopo lungo riposo fu filtrato. Il precipitato, dopo averlo ben lavato con acqua e disseccato, fu liberato dallo zolfo trattandolo con solfuro di carbonio e quindi sottomesso il tenue residuo così ottenuto ai saggi ordinarii per la ricerca sistematica dei metalli che potevano esservi contenuti. Fu constatata la presenza soltanto di tracce di *arsenico* e di *rame*.

In una porzione del liquido separato dal precipitato dell'idrogeno solforato furono trovate delle piccole quantità di *acido fosforico*, mediante la reazione col molibdato ammonico. A tutto il resto del liquido fu aggiunto cloruro ammonico, ammoniaca e solfuro ammonico, lasciato lungo tempo in riposo a mite temperatura, e, quando il liquido fu ben chiarificato, si filtrò lavando bene il precipitato con acqua e solfuro ammonico.

Questo precipitato, trattato con acido cloridrico si sciolse in massima parte lasciando un piccolo residuo nerastro. La soluzione cloridrica sottoposta all'analisi ordinaria sistematica risultò contenere delle grandi quantità di *ferro*, nonchè quantità notevoli di *silice*, *calcio*, *manganese* ed *alluminio*, e piccole quantità di *acido fosforico*. Furono trovate anche delle tracce di *titanio* precipitando con ammoniaca una porzione di tale soluzione cloridrica, raccogliendo il precipitato, eliminandone la silice con acido fluoridrico e solforico, fondendo il residuo con bisolfato potassico, sciogliendo il prodotto nell'acqua fredda, filtrando e facendo bollire prolungatamente la soluzione. Il piccolo residuo nerastro insolubile nell'acido cloridrico ci servì per la ricerca del nichelio e del cobalto. A tale scopo fu scaldato insieme al filtro con acido cloridrico e qualche goccia di acido nitricc, filtrato, svaporata la soluzione quasi a secco, ripreso il residuo con un po' d'acqua, aggiunta una discreta quantità di nitrito potassico, acidulato fortemente con acido acetico e lasciato in riposo a dolce temperatura. Si ebbe dopo poco tempo il precipitato giallo caratteristico del *cobalto*, separato il quale, dopo lungo riposo, e trattato il liquido con soluzione di soda si ottenne il precipitato verde chiaro, che si annerì scaldato con acqua di bromo, caratteristico del *nichelio*.

Nel liquido filtrato dal precipitato prodotto dal solfuro ammonico furono trovate, col metodo ordinario, delle grandi quantità di *calcio* e di *magnesio* e delle piccole tracce di *stronzio*.

Nell'acqua che ci servì per lavare le concrezioni, prima di trattarle con acido cloridrico, rinvenimmo con gli ordinarii reattivi delle piccole quantità di *potassio*, *sodio*, *acidi solforico* e *carbonico* e *cloro*.

Finalmente, in una porzione a parte di concrezioni, trovammo delle tracce di *fluoro* procedendo in maniera identica a quanto fu detto per la ricerca di questo corpo nel residuo dell'acqua.

Riassumendo i risultati analitici ottenuti dallo esame delle concrezioni, queste risultano costituite dai seguenti corpi:

Acido carbonico » silicico Calcio Magnesio	in grande quantità
Ferro Manganese Alluminio	in quantità notevoli
Acido fosforico » solforico Nichelio Cobalto Bario Strontio Sostanze organiche	piccole quantità
Titanio Arsenico Rame Potassio Sodio Cloro Fluoro	tracce

Così che dall'analisi dell'acqua e delle concrezioni che essa forma risulta che l'acqua contiene:

Acido carbonico Azoto Ossigeno Cloruri Solfati Nitrati Silice Calce Magnesia Potassa Soda	quantità notevoli
Bromuri Ioduri Fosfati Nitriti Acido borico Alluminio *) Ferro *) Manganese *) Nichelio Cobalto Bario Strontio Litio Materie organiche	piccole quantità
Titanio Fluoro Rubidio Cesio Arsenico Rame	tracce

*) Abbondante nelle concrezioni.

ANALISI QUANTITATIVA

L'acqua necessaria per eseguire le varie determinazioni fu misurata alla temperatura di 12° in recipienti graduati. Per quelle determinazioni, che richiesero la misura dell'acqua alle sorgenti stesse, fu tenuto conto della temperatura di queste, e poi, mediante il calcolo, fu ridotto il volume alla temperatura di 12°. Esporremo man mano i diversi procedimenti seguìti per i singoli dosamenti ed i risultati direttamente ottenuti.

Peso specifico

Fu adoperato il metodo del picnometro, paragonando, cioè, il peso dell'acqua, raffreddata a 12°, a quello di un egual volume di acqua distillata alla stessa temperatura. Si ottennero i seguenti risultati:

Acqua Mescolanza: peso dell'acqua minerale	gr.	80,0505
» » distillata	»	79,7189
Peso specifico a 12° = 1,00415.		
Sorgente a destra: peso dell'acqua minerale	»	119,5095
» » distillata	»	118,9625
Peso specifico a 12° = 1,00459.		

Residuo fisso

Furono svaporati a bagno-maria in crogiuoli di platino tarati 100 c.c. di ciascuna acqua, regolando convenientemente lo scaldamento onde evitare perdite dovute al rapido svolgersi dell'anidride carbonica; il residuo ottenuto fu disseccato prima in una stufa a 100°, poi a 180°, in entrambi i casi fino a costanza di peso. Tali residui furono, quindi, trasformati in solfati, onde avere un controllo della determinazione delle basi; a tal uopo furono trattati con acqua e quindi con acido cloridrico diluitissimo aggiunto a gocce ed a lunghi intervalli, fino a decomporre completamente i carbonati, avendo cura di coprire i crogiuoli con dei vetri da orologio per raccogliere gli eventuali spruzzi; si scaldò, quindi, con precauzione, si aggiunse dell'acido solforico diluito in leggero eccesso, si portò il tutto a secco, indi si scaldò il residuo debolmente al rosso in presenza di carbonato ammonico per agevolare la decomposizione dei bisolfati alcalini, ripetendo tale trattamento fino a peso costante.

Risultati ottenuti:

Acqua Mescolanza c. c. 100.						
Residuo a 100° =	gr.	0,5150	e per litro		gr.	5,1500
» 180°	»	0,5092	»	»	»	5,0920
» in solfati	»	0,6167	»	»	»	6,1670
Sorgente a destra: Acqua c. c. 100.						
Residuo a 100° =	»	0,5101	»	»	»	5,1010
» 180°	»	0,5061	»	»	»	5,0610
» in solfati	»	0,6101	»	»	»	6,1010

Anidride carbonica (CO_2)

Per determinare l'anidride carbonica totale furono preparati diversi saggi alle sorgenti trattando in appositi matracci 250 c.c. di acqua, misurati alla temperatura delle vasche, cioè di 47°, con eccesso di soluzione di cloruro di calcio ammoniacale; indi furono ben chiusi i matracci con tappi di gomma. In laboratorio si scaldarono i singoli saggi per circa due ore a bagno-maria, onde favorire la decomposizione del carbammato ammonico, avendo cura, però, di non far giungere il liquido all'ebollizione e di evitare perfettamente l'accesso dell'aria esterna. Dopo raffreddamento fu raccolto su filtri lavati la maggior parte del carbonato calcico precipitatosi, conducendo l'operazione rapidamente e mantenendo gli imbuti coperti il più che era possibile; infine, dopo averli lavati tre o quattro volte con acqua distillata bollita, furono introdotti i filtri nei matracci ed adattati questi direttamente all'apparecchio descritto dal Classen. Quivi il precipitato fu scomposto con acido cloridrico diluito, e con una corrente d'aria, purificata opportunamente, si scacciò l'anidride carbonica mantenendo il liquido per qualche tempo quasi in ebollizione, facendola assorbire in appositi tubi tarati contenenti calce sodata.

Si ebbero i risultati seguenti:

Acqua Mescolanza c.c. 250 a 47°, che corrispondono a c.c. 247,15 a 12°.
1ª determinazione CO_2 trovata gr. 0,3156
2ª » » » » 0,3160
media » 0,3158
CO_2 totale per litro = gr. 1,27776.
Acqua della sorgente a destra c.c. 250 a 47° equivalenti a c.c. 247,15 a 12°.
CO_2 trovata gr. 0,3138 e per litro gr. 1,26967.

Non conoscendo dei metodi esatti per la determinazione dell'anidride carbonica libera e semicombinata nelle acque minerali, abbiamo dedotta questa quantità dal calcolo della composizione del residuo; tuttavia, come controllo, abbiamo creduto di determinare quella combinata facendo bollire dell'acqua per circa $^1/_2$ ora con leggero eccesso di soluzione normale-decima di acido cloridrico e saturando l'eccesso di questo con soluzione normale-decima di ammoniaca in presenza di alizarina come indicatore. Infatti si ebbero i seguenti risultati:

Acqua Mescolanza c.c. 250.
1ª determ. $HCl \frac{N}{10}$ consumato c.c. 70,8
2ª » » » » » 70,8
CO_2 corrispondente gr. 0,15576
CO_2 combinata per litro = gr. 0,62304.

Dal calcolo della composizione del residuo dell'acqua si ricava:

CO_2	del carbonato	di calcio	gr. 0,04070
»	»	magnesio	» 0,02901
»	»	ferro	» 0,00057
»	»	sodio	» 0,56623
»	»	litio	» 0,00016
Totale: CO_2 combinata calcolata			» 0,63667

Sorgente a destra. Acqua c.c. 250.

1ª determinaz. $HCl \frac{N}{10}$ consumato	c.c.	69,7
2ª » » » »	»	69,4
media	»	69,55

CO_2 corrispondente gr. 0,15301

CO_2 combinata per litro = gr. 0,61204.

Dal calcolo della composizione del residuo si ha:

CO_2 del carbonato di calcio	gr.	0,04023
» » magnesio	»	0,02829
» » sodio	»	0,54753
Totale: CO_2 combinata calcolata	»	0,61605

Volendo ora dai risultati qui esposti calcolare la quantità di anidride carbonica libera, si avrà:

Acqua Mescolanza:

Anidride carbonica totale per litro	gr.	1,27776
» » combinata	»	0,63667
Diff. » » lib. e semicomb.	»	0,64109
da cui detratta CO_2 combinata	»	0,63667
resta CO_2 libera per litro	»	0,00442

corrispondente a c. c. 2,2 a 0° e 760^{mm}.

Sorgente a destra:

Anidride carbonica totale per litro	gr.	1,26967
» » combinata	»	0,61605
Diff. » » lib. e semicomb.	»	0,65362
da cui detratta CO_2 combinata	»	0,61605
resta CO_2 libera per litro	»	0,03757

corrispondente a c.c. 11,9 a 0° e 760^{mm}.

Cloro (Cl)

Per la determinazione del cloro applicammo il metodo volumetrico di Volhard, che dà risultati esattissimi, usando soluzioni decimo-normali, esattamente verificate, di nitrato di argento e tiocianato ammonico e, come indicatore, una soluzione satura di allume ferrico-ammonico. L'acqua veniva diluita col doppio del suo volume di acqua distillata, poi trattata con la soluzione ferrica ed acido nitrico purissimo e quindi con leggero eccesso di soluzione di argento. L'aggiunta del tiocianato, per titolare tale eccesso, si sospendeva quando appariva una tinta appena bionda del liquido. Per l'acqua Mescolanza dal valore ottenuto direttamente in tale determinazione furono sottratte le quantità di cloro corrispondenti rispettivamente a quelle di bromo e iodo, dosate a parte.

Ecco i risultati ottenuti:

Acqua Mescolanza adoperata c.c. 50.

1ª determ. soluz. $\frac{N}{10}$ di $AgNO_3$ consumata c.c. 22,6

2ª » » » » » » 22,6

Cloro corrispondente . . . . gr. 0,0799362

» per litro. . . . . » 1,599720

Cloro corrispondente a gr. 0,00622 di bromo = 0,002760

» » » 0,00002 iodo 0,000006

In uno gr. 0,002766

Cloro residuale per litro . . . . » 1,596954

Sorgente a destra. Acqua adoperata c.c. 50.

Soluzione $\frac{N}{10}$ di $AgNO_3$ consumata c.c. 22,55

Cloro corrispondente gr. 0,079759

Cloro per litro gr. 1,59518.

Bromo e Iodo (Br, I).

Questi dosamenti furono soltanto eseguiti per l'acqua Mescolanza concentrandone 20 litri, fino a piccolissimo volume, filtrando e lavando benissimo la parte insolubile, la quale, poi, fu impiegata per la ricerca di altri corpi contenuti in piccole quantità. Il liquido acquoso e le acque di lavaggio furono svaporati quasi a secco e la massa umida così ottenuta fu lasciata digerire ripetutamente con alcool, e filtrato riunendo i diversi estratti alcoolici e distillandoli, dopo averli trattati con qualche goccia di potassa. Il residuo ottenuto dalla distillazione dell'alcool fu sciolto in acqua, svaporato di nuovo a secco e sulla massa ottenuta ripetuto lo stesso trattamento. Si distillò di nuovo l'alcool e si ripetè ancora una volta un simile trattamento fino ad ottenere un ultimo piccolissimo residuo che, dopo averlo calcinato leggermente, fu sciolto in poca acqua, introdotta questa soluzione in un piccolo imbuto a robinetto, aggiunto del solfuro di carbonio, dell'acido solforico diluito ed infine, a goccia a goccia, della soluzione di ipoazotide nell'acido solforico concentrato. Si rivelò così la presenza di piccole quantità di iodo, che furono valutate paragonando il colore del solfuro di carbonio con quello che si aveva trattando in identiche condizioni varii saggi di soluzioni di ioduro di potassio di diverse concentrazioni. La colorazione ottenuta con l'acqua era identica a quella che forniva una soluzione contenente gr. 0,0004 di iodo, cosicchè l'iodo contenuto nell'acqua corrispondeva a gr. 0,00002 per litro.

Il liquido acquoso separato dal solfuro di carbonio insieme alle acque di lavaggio di questo fu filtrato per filtro umido e precipitato con acido nitrico ed eccesso di nitrato di argento. Tale precipitato di cloruro e bromuro di argento fu pesato, dopo averlo accuratamente raccolto, lavato, indi disseccato e fuso; una porzione di esso fu introdotta in una bollicina di vetro e sottoposta ivi ad una corrente lentissima di cloro secco, scaldando leggermente, fino a costanza di peso.

Il peso del cloruro e bromuro di argento totale era gr. 0,9000
la porzione introdotta nella bolla pesava » 0,0689
che, scaldati in corrente di cloro, perdettero » 0,0053
la perdita totale di tutto il miscuglio di sali di argento si calcolò, quindi, a gr. 0,06923, a cui corrispondono gr. 0,29236 di $AgBr$, che contengono gr. 0,1244 di bromo.

Bromo per litro = gr. 0,00622.

Anidride solforica (SO_3)

Questo corpo fu dosato allo stato di solfato baritico con le note regole. I risultati furono i seguenti:

Acqua Mescolanza c.c. 300
$BaSO_4$ ottenuto gr. 0,3196
SO_3 corrispondente » 0,109734
SO_3 per litro = gr. 0,36578
Sorgente a destra. Acqua c.c. 300
$BaSO_4$ ottenuto gr. 0,3209
SO_3 corrispondente » 0,110151
SO_3 per litro = gr. 0,36717.

Anidride nitrica (N_2O_5)

Avendo con i saggi qualitativi riconosciuta la presenza di quantità piuttosto rilevanti di questo corpo credemmo necessario praticarne anche una determinazione quantitativa. Fu applicato all'uopo il metodo di Schulze e Tiemann, concentrando fortemente 250 c.c. di acqua, decomponendo i nitrati, in apposito apparecchio, con acido cloridrico e cloruro ferroso, e raccogliendo il biossido di azoto svolto in una campanella piena di soluzione di potassa. Fatte le debite correzioni al volume gassoso osservato, fu ricavato col calcolo il peso di anidride nitrica corrispondente.

Risultati ottenuti:

Acqua Mescolanza 250 c.c.
1ª determinaz. Biossido di azoto misurato a 13° e 772^{mm},1 = c.c. 2,6
» » ridotto a 0° e 760^{mm} » 2,5
N_2O_5 corrispondente = gr. 0,0060325
N_2O_5 per litro = gr. 0,02413
2ª determ. Biossido d'azoto a 13° e 772,^{mm}1 = c.c. 2,8
» 0° e 760^{mm} » 2,68
N_2O_5 corrispondente gr. 0,00646684
N_2O_5 per litro = gr. 0,02587
Media: N_2O_5 per litro = » 0,02500
Sorgente a destra. Acqua c.c. 250
Biossido di azoto a 13° e 772^{mm},1 = c.c. 2,8
» 0° e 760^{mm} » 2,68
N_2O_5 corrispondente gr. 0,00646684
N_2O_5 per litro = gr. 0,02587.

Anidride silicica (SiO_2)

La determinazione di questo corpo fu collegata con quella della calce e della magnesia. L'acqua, acidulata con acido cloridrico, fu svaporata a bagno-maria a secco in capsula di platino, in maniera da scacciare completamente fino le ultime tracce di acido; il residuo, dopo raffreddamento, venne ripreso con acido cloridrico, lasciato in riposo per una mezz'ora, indi trattato con acqua calda e filtrato. Tale trattamento fu

ripetuto varie volte; infine fu raccolta tutta la silice sul filtro, lavata con acqua, seccata completamente a 100° indi calcinata fortemente e pesata; dopo di che ci assicurammo della sua purezza mediante l'acido fluoridrico.

Acqua Mescolanza 500 c.c.
SiO_2 ottenuta gr. 0,0843
SiO_2 per litro = gr. 0,16860
Sorgente a destra. Acqua 500 c.c.
SiO_2 ottenuta gr. 0,0833
SiO_2 per litro = gr. 0,16660

Ossidi di ferro (Fe_2O_3), di manganese (Mn_3O_4) e di alluminio (Al_2O_3)

La determinazione di questi corpi fu fatta soltanto sopra l'acqua Mescolanza impiegandone 4 litri e, per il dosamento del manganese, 20 litri. Questa venne acidulata, svaporata a secco in capsula di platino ed eliminata la silice col procedimento esposto innanzi. Il liquido separato da questa fu precipitato con ammoniaca, scaldato e filtrato; il precipitato ridisciolto in acido cloridrico e questa soluzione, dopo essere stata trattata con soluzione diluita di carbonato ammonico fino a quasi neutralità, si fece bollire e si separò per filtrazione il precipitato di sale basico di ferro. Questo, dopo essere stato ben lavato, fu disciolto in acido cloridrico, addizionata la soluzione di un po' di bitartrato potassico purissimo, aggiunta dell'ammoniaca e precipitato il ferro con solfidrato ammonico, usando le note regole. Dopo lungo riposo fu raccolto su filtro il solfuro di ferro, ridisciolto in acido cloridrico, ossidata la soluzione con acido nitrico, precipitato con ammoniaca e pesato il perossido di ferro dopo calcinazione. Esso pesava gr. 0,0042, corrispondente a

Fe_2O_3 per litro = gr. 0,00105.

Il liquido separato dal solfuro di ferro fu svaporato a secco in capsula di platino dopo averlo trattato con soluzione di carbonato sodico purissimo, liberato da ogni traccia di allumina mediante una prolungata corrente di anidride carbonica; il residuo fu scaldato con un po' di nitro puro; trattata la massa con acqua e poi con acido cloridrico, dopo averla fatta passare in un bicchiere di vetro, filtrato e precipitato il liquido con ammoniaca. Si ottennero dei fiocchi di allumina in quantità così tenue che non fu possibile praticarne il dosamento.

I liquidi primitivi filtrati, cioè quello separato dal primo precipitato dell'ammoniaca e quello separato dal precipitato di sale basico di ferro, furono riuniti e, dopo esserci assicurati che non precipitavano più per nuova aggiunta di ammoniaca, furono acidulati con acido cloridrico e concentrati; quindi si precipitò il manganese in questa soluzione, mediante il solfuro ammonico; infine il solfuro di manganese ottenuto fu raccolto e pesato, dopo averlo calcinato con le note regole in corrente d'idrogeno ed in presenza di zolfo.

Da 20 litri di acqua si ottennero gr. 0,0022 di MnS;
Mn_3O_4 corrispondente = gr. 0,0020 e per litro 0,00010.

Ossidi di calcio (CaO) e di magnesio (MgO)

Si ebbe cura di eseguire questa determinazione fra le prime temendo il depositarsi di qualche porzione di carbonati alcalino-terrosi, a causa dello sperdersi della pochissima quantità di anidride carbonica contenuta nelle acque. Furono impiegati 500 c.c. di ciascun' acqua operando nella maniera seguente. Dopo averne separata la silice, nel modo descritto innanzi, i liquidi furono concentrati e precipitati con ammoniaca ed una quantità di ossalato ammonico circa doppia di quella necessaria per precipitare tutta la calce. Dopo lungo riposo furono decantati i liquidi su filtro, ridisciolti i precipitati di ossalato di calcio in acido cloridrico e riprecipitate le soluzioni con ammoniaca e ossalato ammonico. Raccolti, infine, i precipitati vennero lavati con acqua calda, seccati, calcinati fortemente e pesata la calce caustica residuale.

I liquidi separati dall'ossalato di calcio furono riuniti alle acque di lavaggio di questo, e portati a secco in capsula di platino. Il residuo, dopo averne scacciati con precauzione i sali ammoniacali, fu sciolto in acqua e acido cloridrico, filtrato; nel liquido precipitata la magnesia con ammoniaca e fosfato ammonico, raccolto, dopo lungo riposo a freddo il fosfato ammonico-magnesiaco, lavato, seccato, calcinato fortemente e ripetutamente in presenza di acido nitrico e pesato il pirofosfato di magnesio ottenuto.

Si ebbero i seguenti risultati:

Acqua Mescolanza:
CaO ottenuta gr. 0,0259 e per litro = gr. 0,0518;
$Mg_2P_2O_7$ ottenuto gr. 0,0366; MgO corrisp. = gr. 0,01319;
MgO per litro = gr. 0,02638.

Sorgente a destra:
CaO ottenuta gr. 0,0256, e per litro = gr. 0,0512;
$Mg_2P_2O_7$ ottenuto gr. 0,0357; MgO corrisp. = gr. 0,01286;
MgO per litro = gr. 0,02572.

Ossidi di potassio (K_2O) e di sodio (Na_2O)

Furono impiegati 300 c.c. di ciascun' acqua, che venne liberata dalla silice e poi, mediante il cloruro di bario, dai solfati. Il liquido separato fu svaporato a secco in capsula di platino, il residuo fatto bollire con leggero eccesso di latte di calce purissimo; filtrato, nel liquido filtrato precipitato il bario ed il calcio con carbonato e ossalato ammonico, filtrato di nuovo, svaporato il liquido a secco, calcinato il residuo fino a completa eliminazione dei sali ammoniacali e sul residuo ripetuto il trattamento con latte di calce e quelli successivi, in maniera da isolare completamente i cloruri alcalini che vennero calcinati leggermente e pesati. Questi vennero, in seguito, disciolti in acqua; nella soluzione fu dosato il potassio con cloruro di platino e si dedusse, poi, col calcolo la quantità di sodio contenuta.

In questa determinazione si ebbe cura di impiegare delle quantità misurate di reattivi, e si eseguì contemporaneamente un saggio di confronto solo con questi, adoperandoli in eguali condizioni e proporzioni; si determinò, così, il piccolo errore dovuto ai reattivi, il quale venne sottratto dai pesi corrispondenti avuti nel descritto dosamento.

I risultati ottenuti furono i seguenti:

Acqua Mescolanza:

Peso dei cloruri alcalini	gr. 1,4337
K_2PtCl_6 ottenuto = gr. 0,3453	
KCl corrispondente	» 0,1060
Differenza $NaCl$	» 1,3277

K_2O corrispondente gr. 0,06699 e per litro gr. 0,22330
Na_2O » » 0,70513 » » 2,35043

Sorgente a destra:

Peso dei cloruri alcalini	gr. 1,4178
K_2PtCl_6 ottenuto = gr. 0,3503	
KCl corrispondente	» 0,1075
Differenza $NaCl$	» 1.3103

K_2O corrispondente gr. 0,06793 e per litro gr. 0,22643
Na_2O » » 0,69590 » » 2,31966

Litio (Li_2O)

Anche la ricerca di questo corpo fu praticata per la sola acqua Mescolanza, operando sopra un'aliquota del residuo di 20 litri di acqua, corrispondente a 5 litri. La determinazione fu fatta spettroscopicamente esaminando la parte solubile del residuo dell'acqua, evaporandola con acido cloridrico, ripigliando il residuo con alcool e ripetendo varie volte tale trattamento. L'ultimo residuo ottenuto fu disciolto in acqua e diluita la soluzione fino a che una goccia, equivalente a $^1/_{70}$ di centimetro cubico, esposta sopra un filo di platino nella fiamma di un becco Bunsen non manifestava più allo spettroscopio la riga caratteristica del litio. Con l'istrumento da noi impiegato fu trovato come estremo limite di sensibilità pel litio, operando in analoghe condizioni, una quantità eguale a gr. 0,000000006 di Li, e ci fu necessario diluire a 600 c.c. la soluzione del residuo in esame per raggiungere il limite di sensibilità; perciò la quantità di questo elemento contenuta in 5 litri di acqua è data da

$$0,000000006 \times 70 \times 600 = 0,000252$$

corrispondente a gr. 0,000543 di Li_2O
Li_2O per litro = gr. 0,00011.

Ossigeno ed azoto disciolti

Per la determinazione di questi gas fu applicato il metodo gassometrico, estraendoli dall'acqua con l'apparecchio di Reichardt modificato da Tiemann e Preusse. L'acqua occorrente fu raccolta alle sorgenti in appositi palloni, che venivano riempiti completamente e poi chiusi con tappi di gomma attraversati da speciali tubi di vetro, chiusi inferiormente e muniti di un foro laterale verso l'estremità chiusa, in modo che, facendo scorrere tali tubi attraverso i tappi adattati ai palloni, questi potevano venir chiusi ovvero messi in comunicazione con l'esterno. Dopo aver chiusi in tal modo i detti palloni furono trasportati con le dovute precauzioni in laboratorio, ove si proce-

dette all'estrazione dei gas col sopra cennato apparecchio, raccogliendoli attraverso soda caustica scaldata quasi all'ebollizione. Fu quindi trattato il miscuglio gassoso con soluzione di pirogallato potassico per determinare l'ossigeno; la parte non assorbita risultò dall'analisi qualitativa costituita di solo azoto. Dopo tali esperienze fu determinata la capacità dei singoli palloni ove era contenuta l'acqua esaminata. Si ottennero i risultati seguenti:

Acqua Mescolanza c.c. 725.

Volume del gas non assorbibile dalla soda c.c. 9,3 a 13° e 780mm
» dopo il trattamento con pirogallato » 8,9 = *N*

Differenza » 0,4 = *O*

riducendo tali volumi a 0° e 760mm si ha:

Azoto = c.c.	8,7	e per litro c.c.	12	= gr.	0,01507
Ossigeno »	0,39	» »	0,53	»	0,00076

Acqua della sorgente a destra: c.c. 750.

Volume del gas non assorbibile dalla soda c.c. 10,2 a 13° e 780mm
» dopo il trattamento con pirogallato » 9,7 = *N*

Differenza » 0,5 = *O*

e riducendo tali volumi a 0° e 760mm si ha:

Azoto = c.c.	9,48	e per litro c.c.	12,64	= gr.	0,01587
Ossigeno »	0,48	» »	0,64	= »	0,00091

Riassumiamo nel quadro seguente i diversi risultati ottenuti e riportiamo anche quelli avuti dai Prof.ri Palmeri e Coppola dall'analisi dell'acqua del Monte della Misericordia da loro fatta nel 1875 e pubblicata nel 1879 [1]).

[1]) *Acque minerali del Pio Monte della Misericordia.* Analisi fatta da P. Palmeri e M. Coppola. Napoli 1879.

Risultati dell'analisi quantitativa per un litro di acqua.

Per 1000 c. c. di acqua	Mescolanza	Sorgente a destra	Monte della Misericordia
Temperatura dell'acqua nelle vasche	47°	47°	—
Temperatura dell' acqua pompata (Stabilimento in funzione)	60°-60°,5	60°-60°,5	60°,4
Peso specifico	1,00415	1,00459	1,00472
CO_2 totale	1,27776	1,26967	1,41475
» combinata trovata	0,62304	0,61204	—
» » calcolata	0,63667	0,61605	0,63196
» libera e semicombinata	0,64109	0,65362	0,78279
» libera	0,00442	0,03757	0,15083
Cloro (Cl)	1,59695	1,59518	1,69575
Bromo (Br)	0,00622	—	0,00190
Iodo (I)	0,00002	—	picc. quantità
Anidride solforica (SO_3)	0,36578	0,36717	0,29045
» silicica (SiO_2)	0,16860	0,16660	0,15865
» nitrica (N_2O_5)	0,02500	0,02587	picc. quantità
Ossido di ferro (Fe_2O_3)	0,00105	—	0,00157
» manganese (Mn_3O_4)	0,00010	—	0,00183
» calcio (CaO)	0,05180	0,05120	0,07574
» magnesio (MgO)	0,02638	0,02572	0,03695
» potassio (K_2O)	0,22330	0,22643	0,20598
» sodio (Na_2O)	2,35043	2,31966	2,31243
» litio (Li_2O)	0,00011	—	—
Ossigeno disciolto	0,00076	0,00091	—
Azoto »	0,01507	0,01587	0,01758
Residuo fisso a 100°	5,15000	5,10100	—
» » » 180°	5,09200	5,06100	5,04125
» in solfati	6,16700	6,10100	6,13750
Acidi fosforico, borico, nitroso, alluminio e materie organiche	picc. quantità	—	picc. quantità
Bario, Titanio	tracce	—	tracce
Strontio, Cesio, Rubidio, Rame, Arsenico e Fluoro	tracce	—	—

AGGRUPPAMENTO DEI RISULTATI ANALITICI

Le conoscenze che finora si hanno intorno alla natura delle soluzioni non sono sufficienti a fornirci dei criterii precisi circa l'aggruppamento degli acidi con le basi nell'analisi di un'acqua; cosicchè sono svariati e talora unicamente arbitrarii quelli che guidano i diversi analisti in tale lavoro. Ciò produce gravi inconvenienti; infatti, se i risultati ottenuti da diversi sperimentatori con acque diverse non vengono interpretati con analoghi criterii, essi non sono facilmente confrontabili fra loro, hanno scarsa importanza, mentre, al contrario, possono generare confusione in chi da tali confronti volesse trarre un giudizio esatto sopra la natura di una data acqua. Ma, pure essendo vero che pochi sono i dati sicuri che possono aiutare i chimici nella soluzione del cennato problema, non sappiamo spiegarci perchè alcuni neanche di questi pochi dati tengano conto; talchè spesso capita di veder riportati in talune acque, fra i componenti salini del residuo, aggruppamenti di corpi incompatibili fra loro, come, per es., la presenza di carbonati alcalini assieme ad altri corpi che con essi dovrebbero reagire. Potremmo, infatti, citare diverse relazioni di analisi di acque, in cui si presentano queste ricchissime di carbonato sodico o potassico, cioè eminentemente alcaline, e, nello stesso tempo, contenenti delle quantità rilevanti di cloruro o altro sale solubile di calcio.

Questo arbitrio assoluto nello aggruppamento dei risultati fa sì che talune acque compariscano molto più buone di quello che realmente siano; anzi, se si volesse malignare, molto probabilmente si troverebbe in questa apparente migliore qualità dell'acqua minerale la spiegazione, se non la giustifica, della ragione di un simile sistema.

A parte la frode commerciale, è evidente l'imbarazzo in cui può trovarsi il medico o l'igienista, il quale volesse mettere in relazione le qualità terapeutiche dell'acqua con la sua composizione chimica.

Ci sembra che sarebbe utile di smettere da tale licenza.

Lo studio chimico delle acque può interessare il naturalista, l'industriale o il medico. Al primo basta, in mancanza di altro, conoscere la composizione pura e semplice delle acque, cioè i singoli dati numerici dei diversi corpi che vi si trovano disciolti, senza attribuire molta importanza al probabile aggruppamento dei risultati stessi: sia perchè tale aggruppamento, non essendo accertato, non può avere un grande valore scientifico; sia perchè le teorie moderne sulle soluzioni diluite, lungi dal fornire dati intorno all'aggruppamento stesso, fanno ritenere, invece, che i corpi si trovino sciolti nell'acqua in uno stato di disgregazione profonda, cioè dissociati nei così detti joni, ossia residui di molecole rispettivamente carichi di elettricità eguali e contrarie. Pensiamo che per uno studio geologico comparativo fra le diverse acque possa essere di grandissimo aiuto al naturalista conoscere i rispettivi rapporti tra i singoli componenti ed il residuo totale dell'acqua, nel modo da noi stessi, insieme ad altri, esposto in un'antecedente pubblicazione [1]). Per mezzo di tali rapporti A. Hamberg [2]), avendo

[1]) *Analisi chimica delle acque di Castellammare di Stabia,* eseguita dai Prof.ri Mauro F., Óglialoro-Todaro A., Vetere F., Rebuffat O., e dai Dott.ri Forte O., Cabella A. e Vetere V.

[2]) *Journal f. prakt. Chem.* [2], 33, 140-150.

fatto parte della spedizione in Groenlandia (1883) ed avendo, perciò, avuta l'opportunità di analizzare l'acqua del mare raccolta a diverse latitudini, è potuto giungere a dei risultati molto interessanti; da questi, infatti, egli conchiude che le quantità di sali disciolti sono variabili per le acque dei diversi mari; però se si moltiplica per cento la quantità di anidride solforica e si divide per quella del cloro, si ottiene un rapporto che è presso a poco costante per le diverse acque e che egli trova compreso fra 11,45 e 11,52. Egli conforta tali risultati con quelli ottenuti da altri; così Forchammer, su 150 analisi, ha trovato un rapporto medio uguale ad 11,89; Schmelck ha trovato 11,46 su 31 analisi e Dittmar, sopra 77 acque raccolte in altri varii punti dell'oceano, ha trovato in media la cifra 11,57. Noi stessi, avendo avuto, tempo addietro, l'occasione di dover analizzare l'acqua del Mar Piccolo di Taranto[1]), abbiamo trovato in conferma dei risultati sopra esposti, il rapporto 11,64. Non sfuggirà, certo, ad alcuno l'importanza di tali ricerche in riguardo alla origine dell'acqua del mare, e noi crediamo che solo in tal modo ed estendendo lo studio di tali rapporti a tutti gli altri componenti delle acque, si possano stabilire dei serii confronti, dai quali potrebbe talora dedursi che delle acque diverse, pur presentando la più grande differenza nel valore dei dati analitici, considerati separatamente, potrebbero eventualmente ricondursi ad una origine analoga.

Non può dirsi, però, altrettanto per il caso dell'industriale o dell'igienista. Costoro, giustamente, non possono contentarsi di sapere soltanto quanto un'acqua contenga di Cl, SO_3, CO_2, Na, Ca, Mg, ecc., giacchè dal vario accoppiamento di tali corpi possono risultare per l'acqua dei caratteri essenzialmente diversi. Così: se dall'accoppiamento il residuo risultasse contenere, per es., cloruro di magnesio, l'acqua, a causa della dissociazione di questo e della successiva azione corrosiva dell'acido cloridrico, non potrebbe essere impiegata per alimentare macchine a vapore, se, inoltre, contenesse del solfato di calcio in grande quantità, dovrebbe essere egualmente scartata perchè produrrebbe incrostazioni; invece, se tanto il calcio che il magnesio si trovassero solo sotto forma di carbonati, l'acqua non presenterebbe i cennati inconvenienti o per lo meno non allo stesso grado.

Similmente il medico prescriverà una data acqua a preferenza per un dato uso terapeutico a secondo che in essa predominino i carbonati alcalini, ovvero i sali solubili di magnesia, ecc. ecc. Da ciò, dunque, scaturisce la necessità pel chimico che analizzi un'acqua, destinata ad usi industriali o igienici, di dare una costituzione probabile dei generi salini in essa contenuti, che però sia la più verosimile, cioè derivante da convenzioni non del tutto arbitrarie, ma giustificate il più che possibile dai fatti.

È appunto a questo proposito che vogliamo fare alcune considerazioni, anche per giustificare, nello stesso tempo, i criterii che abbiamo tenuti presenti nello esporre i risultati delle acque da noi esaminate. Anzitutto si dovrebbe tenere gran conto dei dati dell'analisi qualitativa nel dare la costituzione del residuo. Se un'acqua precipita per l'aggiunzione di carbonato sodico non crediamo si possa sostenere che essa contenga *probabilmente* disciolto questo corpo, epperò non potrà, a rigore, classificarsi fra le acque alcaline. Se, analizzando ciò che si deposita facendo bollire l'acqua, si trovano solfati, non può non ammettersi la probabile esistenza del solfato di calcio nel residuo.

---

[1]) Pubblichiamo i risultati di detta analisi alla fine di questa memoria.

Invece di ammettere la presenza simultanea di un carbonato alcalino e di un sale solubile di calcio o di magnesio sembra, dunque, molto più verosimile calcolare i risultati come se fosse avvenuto il doppio scambio fra questi corpi e ritenere il calcio ed il magnesio, anzicchè gli alcali, allo stato di carbonati, salvo a vedere, per mezzo del calcolo, se resta in eccedenza del carbonato alcalino o dei sali terrosi e quindi dedurre se l'acqua sia veramente alcalina o semplicemente salina. Nè si dica che, in grazia alla presenza dell'anidride carbonica, è possibile anche la contemporanea presenza in soluzione del solfato o cloruro di calcio o di magnesio e del carbonato alcalino; appunto perchè di fatto appena scacciata l'anidride carbonica si depositano i carbonati terrosi, sembra più logico ammettere come probabile che questi ultimi erano già preesistenti e si trovavano disciolti allo stato di bicarbonati.

Noi crediamo, dunque, che siano perfettamente da seguirsi i consigli che dà il Fresenius nel suo classico trattato di analisi, allorchè voglia decidersi se un'acqua sia o non alcalina e le altre norme che dà per l'esposizione dei risultati; anzi non sappiamo spiegarci perchè da alcuni chimici tali consigli, senza addurre alcuna ragione per scartarli, non siano seguiti. Delle due l'una: o consideriamo scientificamente l'acqua come una soluzione diluita ed ammettiamo che i corpi siano allo stato di joni, ed allora basta esporre senz'altro i singoli valori di questi joni; ovvero, malgrado queste considerazioni, vogliamo assegnare una composizione convenzionale all'acqua ricavandola dalla costituzione del residuo, ed allora stiamo alle regole più verosimili, quali son quelle che la grande competenza del suddetto autore prescrive, o almeno si discuta perchè non si crede di seguirle. Il Fresenius, infatti, dà il processo per stabilire se un'acqua contenga o non carbonati alcalini, il quale consiste nel far bollire l'acqua ed esaminare il liquido filtrato: se esso precipita con cloruro di calcio e fa effervescenza con un acido, l'acqua è certamente alcalina, ossia contiene un eccesso di carbonati alcalini; se, invece, il liquido filtrato non solo non presenta i cennati caratteri, ma precipita con carbonato sodico, vuol dire che contiene in eccedenza dei sali solubili di calcio o di magnesio e perciò non è alcalina, ma salina. Inoltre lo stesso autore, nella parte quantitativa dell'analisi delle acque, prescrive che, per sapere la proporzione di alcali combinata all'anidride carbonica, quando non si è contenti di desumerla dal calcolo, occorre far bollire l'acqua, filtrare, dosare nel filtrato il carbonato e sottrarne la quantità corrispondente alle tracce di calcio e di magnesio che si trovano ancora in soluzione e che bisogna dosare a parte. Dal che risulta chiaramente che non dovrebbero considerarsi i carbonati alcalini in presenza di sali di calcio o di magnesio che non siano carbonati.

Sarà dunque indiff rente accoppiare a preferenza il cloro al potassio o al sodio, ovvero far predominare il carbonato potassico su quello sodico o viceversa; ma ciò che deve far giudicare della natura essenziale di un'acqua è necessario sia subordinato alle sopra indicate considerazioni. Uniformandoci a queste noi dunque nell'accoppiare i risultati analitici per dare la probabile costituzione del residuo a 180° abbiamo proceduto col seguente criterio.

Dall'analisi qualitativa essendo risultata la presenza di carbonati alcalini abbiamo calcolato tutto il calcio ed il magnesio allo stato di carbonati; il bromo e l'iodo l'abbiamo combinati al potassio, il rimanente potassio al cloro ed il rimanente cloro, come anche l'acido solforico e nitrico, al sodio; tutto ciò che restava di sodio ed il litio furono con-

siderati come carbonati: la silice allo stato libero, il ferro allo stato di sesquiossido e il manganese come ossido salino. Tale aggruppamento è anche confermato dal confronto dell'anidride carbonica combinata calcolata dalla composizione del residuo con quella trovata direttamente come fu detto innanzi a proposito del dosamento di questo corpo.

A scopo di confronto abbiamo calcolato anche il residuo dell'acqua del Pio Monte della Misericordia, servendoci dei dati analitici di Palmeri e Coppola, e nel quadro seguente si trovano esposti i risultati di questi calcoli.

Costituzione probabile del residuo a 180°

Per 1000 c. c. di acqua	Mescolanza	Sorgente a destra	Monte della Misericordia
Ioduro di potassio (KI)	0,00002	—	—
Bromuro di potassio (KBr)	0,00925	—	0,00283
Cloruro di potassio (KCl)	0,34755	0,35827	0,32508
» sodio ($NaCl$)	2,36262	2,35128	2,54403
Solfato di sodio (Na_2SO_4)	0,64921	0,65172	0,51555
Nitrato di sodio ($NaNO_3$)	0,03935	0,04072	—
Carbonato di sodio (Na_2CO_3)	1,36411	1,31905	1,25870
» calcio ($CaCO_3$)	0,09250	0,09143	0,13275
» magnesio ($MgCO_3$)	0,05539	0,05401	0,07759
» litio (Li_2CO_3)	0,00027	—	—
Sesquiossido di ferro (Fe_2O_3)	0,00105	—	0,00165
Ossido di manganese (Mn_3O_4)	0,00010	—	0,00196
Silice (SiO_2)	0,16860	0,16660	0,15865
Totale	5,09002	5,03308	5,01879
Res. a 180° dosato direttamente	5,09200	5,06100	5,04125
Errore	—0,00198	—0,02792	—0,02246

Calcolando, invece, i risultati da noi ottenuti secondo i criterii seguiti da Palmeri e Coppola per l'acqua del Monte della Misericordia, ossia combinando Cl, Br, I, SO_3, N_2O_5 al Na, e calcolando il resto di Na, il K, il Li, il Ca, il Mg, il Fe e il Mn come carbonati, si hanno le cifre seguenti:

	Mescolanza	Sorgente a destra	Monte della Misericordia
Cloruro di sodio ($NaCl$)	2,63626	2,63246	2,79436
Bromuro di sodio ($NaBr$)	0,00803	—	0,00236
Ioduro di sodio (NaI)	0,00002	—	—
Solfato di sodio (Na_2SO_4)	0,64921	0,65172	0,51546
Nitrato di sodio ($NaNO_3$)	0,03935	0,04072	—
Carbonato di sodio (Na_2CO_3)	1,11142	1,06372	1,00138
» potassico (K_2CO_3)	0,32782	0,33242	0,30235
» di calcio ($CaCO_3$)	0,09250	0,09143	0,13270
» di magnesio ($MgCO_3$)	0,05539	0,05401	0,07753
» di litio (Li_2CO_3)	0,00027	—	—
» ferroso ($FeCO_3$)	0,00152	—	0,00237
» manganese ($MnCO_3$)	0,00015	—	0,00297
Silice (SiO_2)	0,16860	0,16660	0,15865

Come controllo della determinazione delle basi diamo, inoltre, i risultati che si hanno calcolando queste in solfati, eccetto il ferro e il manganese, e confrontando la loro somma col peso trovato trattando direttamente il residuo dell'acqua con acido solforico.

Per 1000 c. c. di acqua:

	Mescolanza	Sorgente a destra
Solfato di potassio	0,41334	0,41913
» sodio	5,38324	5,31277
» litio	0,00026	—
» calcio	0,12580	0,12434
» magnesio	0,07914	0,07722
Ossido di ferro	0,00105	—
» manganese	0,00010	—
Silice	0,16860	0,16660
Totale	6,17153	6,10006
Res. in solfati ottenuto direttamente	6,16700	6,10100
Errore	+0,00453	—0,00094

Esponiamo, finalmente, nel quadro seguente la composizione dell'acqua Mescolanza — quella, cioè, di cui fu eseguita l'analisi completa ed alla quale l'altra può dirsi quasi identica — considerando i carbonati come bicarbonati e calcolando come tali anche il ferro ed il manganese.

Sostanze disciolte nell'acqua Mescolanza

(Temperatura 60°,5; peso specifico 1,00415)

	Per 1 litro	Per 10 litri
Ossigeno (O) c. c. 0,53 pari a	gr. 0,00076	0,0076
Azoto (N) c. c. 12	» 0,01507	0,1507
Anidride carbonica libera (CO_2) c.c. 2,2	» 0,00442	0,0442
Ioduro di potassio (KI)	» 0,00002	0,0002
Bromuro » (KBr)	» 0,00925	0,0925
Cloruro » (KCl)	» 0,34755	3,4755
Cloruro di sodio ($NaCl$)	» 2.36262	23,6262
Solfato » (Na_2SO_4)	» 0,64921	6,4921
Nitrato » ($NaNO_3$)	» 0,03935	0,3935
Bicarbonato » ($NaHCO_3$)	» 2,16198	21,6198
» litio ($LiHCO_3$)	» 0,00049	0,0049
» calcio [$Ca(HCO_3)_2$]	» 0,14985	1,4985
» magnesio [$Mg(HCO_3)_2$]	» 0,09627	0,9627
» ferro [$Fe(HCO_3)_2$]	» 0,00233	0,0233
» manganese [$Mn(HCO_3)]_2$	» 0,00023	0,0023
Silice (SiO_2)	» 0,16860	1,6860
Acidi fosforico, borico e nitroso	picc. quantità	
Alluminio	»	
Materie organiche	»	
Bario, Strontio, Cesio, Rubidio	tracce	
Titanio	»	
Rame, Arsenico	»	
Fluoro	»	
Totale	gr. 6,00800	60,0800

CONSIDERAZIONI

Questi risultati analitici danno una idea così chiara delle qualità dell'acqua esaminata, che non avrebbero bisogno di altri commenti. Tuttavia non crediamo inutili alcune brevi considerazioni.

La Gurgitello delle Terme Belliazzi è un'acqua **carbonata, eminentemente alcalina e clorurata.** Infatti i suoi principali costituenti, le sostanze che formano quasi la totalità di quelle che vi si trovano disciolte, sono il bicarbonato ed il cloruro di sodio; ma vi si trovano pure abbondanti il cloruro di potassio, il solfato di sodio, il bicarbonato di calcio e l'anidride silicica, ed in quantità rilevanti il bromo e il jodio. Inoltre l'acqua contiene in minore proporzione molte altre sostanze (fluoro, arsenico, titanio, manganese, litio, ecc.), alcune delle quali raramente si rinvengono nelle acque minerali, anche le più rinomate. Questa stupenda composizione dell'acqua termale del Gurgitello dà la più evidente spiegazione dei mirabili effetti che si ottengono con l'uso di essa.

Tra le acque alcaline più in fama, quella di *Ems* (Nassau) *Source-Nouvelle*, analizzata dal Fresenius, ha una temperatura che si avvicina a quella della nostra acqua, e contiene per litro grammi 2,0528 di bicarbonato di sodio, cioè quasi quanto la nostra; ma il cloruro di sodio vi si trova in quantità molto minore, soli grammi 0,9271 per litro, ed anche più piccola è la quantità di molti altri corpi. Fra le acque indicate come bicarbonate e clorurate quella di Bourboule (*Source-Perrière*), analizzata da Ed. Villm, ha la temperatura di 53°,4 e lascia un residuo fisso di gr. 5,0005, quasi quanto quello della Gurgitello; ma il cloruro di sodio (gr. 3,1501) vi è in quantità molto maggiore del bicarbonato (gr. 1,8642). La *St. Nectaire* (*Source de Mont Cornadore*), pure analizzata dal Villm, e come tipo di tali acque riportata nel suo trattato, ha la temperatura di 37°,5, e con un residuo fisso di gr. 4,9595 contiene gr. 2,3131 di bicarbonato e gr. 2,1235 di cloruro di sodio. Potremmo riportare altre analisi, ma quelle riferite sono più che sufficienti per mostrare che l'acqua delle Terme Belliazzi è superiore alle più note acque dello stesso suo tipo, perchè più si avvicina alle acque designate come esclusivamente alcaline, ed è incomparabilmente più ricca di elementi rari.

Le sorgenti che alimentano lo Stabilimento Belliazzi hanno la stessa composizione, le stesse proprietà delle vicinissime sorgenti dello Stabilimento del Pio Monte della Misericordia. Tutte queste acque evidentemente hanno la stessa origine; ma ciò che sopratutto è sorprendente è la composizione assolutamente costante che queste acque conservano.

Delle acque del Gurgitello abbiamo analisi molto antiche, come quelle dell'Aloisio, 1757; dell'Andria, 1783; del Lancellotti, 1818. Più recentemente le sorgenti del Pio Monte della Misericordia sono state ripetutamente analizzate con molta accuratezza dal Prof. P. Palmeri nel 1875, nel 1881 e nel 1889. Or bene tutte queste analisi, fatte con l'intervallo di molti anni ed alcune dopo movimenti sismici importantissimi, danno risultati concordanti veramente sorprendenti e si accordano con quelli dell'analisi nostra in maniera tale, che quasi migliori non si potrebbero sperare da un'analisi ripetuta sulla istessa acqua e nello stesso tempo. L'importanza grandissima della oramai indiscutibile costanza nella composizione chimica delle acque del Gurgitello non potrà sfuggire a nessuno.

Se a tutto ciò si aggiunge che le Terme del Belliazzi sono proprio uno stabilimento modello, fornito degli apparecchi più recenti e diretto con metodo scientifico inappuntabile; che esse si trovano nella più bella delle isole, tutte bellissime, dell'incantevole golfo di Napoli, e che si ha libera scelta di andare in riva al mare, per vasti campi di vaga sabbia corallina, o sull'alta vetta dell'Epomeo (metri 792); tra boschi di castagni, ovvero tra ameni e fragranti giardini di aranci; per belle e larghe vie o per aspri e montuosi sentieri.

Se si pensa che il clima è assai mite e che con la stessa facilità può aversi l'alloggio a buon mercato, ovvero l'albergo di lusso e fornito d'ogni comodo, allora si comprenderà facilmente perchè Casamicciola sia una delle più rinomate stazioni balnearie.

Abbiamo preso in esame la composizione relativa delle varie sorgenti che alimentano i più importanti Stabilimenti termali dell'isola d'Ischia (Terme di Porto d'Ischia, del Monte della Misericordia, di Belliazzi e di Manzi) e da tale esame risulta che le acque appartengono a tre gruppi diversi; cioè che le acque dette *Fornello e Fontana di Porto d'Ischia* **hanno composizione diversa** di quelle del *Gurgitello* appartenenti agli stabilimenti del Pio Monte della Misericordia e *Belliazzi* nella valle di Ombrasco; e che le acque dello stabilimento *Manzi, nella Valle del Tamburo,* **differiscono per composizione da quelle del Gurgitello,** come appare dalle analisi che per ora si conoscono e che in seguito riportiamo.

Le acque del Gurgitello **sono le sole** delle quali si sappia la **vera composizione chimica**, e sono le più alcaline, perchè fra tutte contengono sciolta la maggiore quantità di bicarbonati alcalini.

Quadro comparativo della composizione delle acque sopra indicate

Sito delle sorgenti	Comune d'Ischia Presso il porto		Comune di Casamicciola Valle Ombrasco		Valle Tamburo
Nome delle sorgenti	Fornello	Fontana	M. Misericordia	Belliazzi	Manzi
Analizzate da	Zinno	Zinno	Palmeri	Oglialoro	Zinno
» nell'anno	1881	1881	1875	1898	1880
Temperatura	52°—55°	52°—55°	60°,4	60°,5	64°,3
Peso specifico	1,0044	1,0031	1,00472	1,00415	?
Anidride carbonica totale (CO_2)	3,0103	2,1890	1,41475	1,27776	1,8520
» » combinata	1,7940	1,1135	0,63196	0,63667	?
» » libera e semicombinata	1,2163	1,0755	0,78279	0,64109	?
» » libera	0,0763	0,0615	0,15083	0,00442	0,14580
Cloro (Cl)	0,7365	0,8115	1,69575	1,59695	0,65650
Bromo (Br)	0,0038	0,0032	0,00190	0,00622	0,00390
Iodo (I)	0,0052	0,0050	picc. quantità	0,00002	0,00410
Anidride solforica (SO_3)	0,8198	0,5500	0,29045	0,36578	0,28910
» silicica (SiO_2)	0,1492	0,1584	0,15865	0,16860	0,13850
» nitrica (N_2O_5)	0,0384	0,0096	picc. quantità	0,02500	0,00430
Ossido di ferro (Fe_2O_3)	0,0891	0,0848	0,00157	0,00105	0,02310
» manganese (Mn_3O_4)	0,0059	tracce	0,00183	0,00010	0,00220
» calcio (CaO)	1,1626	1,3224	0,07574	0,05180	0,35770
» magnesio (MgO)	0,3125	0,2807	0,03695	0,02638	0,03830
» potassio (K_2O)	0,1041	0,1036	0,20598	0,22330	0,20720
» sodio (Na_2O)	1,3807	1,9746	2,31243	2,35043	2,22190
» litio (Li_2O)	0,0085	tracce	—	0,00011	0,03450
» alluminio (Al_2O_3)	0,1473	0,1499	picc. quantità	picc. quantità	0,00850
Ossigeno disciolto (O)	0,0051	0,0049	—	0,00076	0,00170 ?
Azoto » (N)	0,0168	0,0151	0,01758	0,01507	0,00803 ?
Residuo a 100°	6,0027	5,6940	?	5,15000	?
» 180°	id.	?	5,04125	5,09200	5,0423
» in solfati	?	?	6,13750	6,16700	?
Materie organiche	picc. quantità	?	picc. quantità	picc. quantità	tracce
Ac. fosforico, borico, nitroso	—	—	id.	id.	Ac. nitroso 0,0039
Cobalto	—	—	id.	id.	—
Nichelio	—	—	—	id.	—
Bario, titanio	—	—	tracce	tracce	—
Stronzio, cesio, rubidio, rame, arsenico, fluoro	—	—	—	id.	Ac. arsenico 0,0023

Se, come sarebbe desiderabile, niente si dovesse criticare, un semplice esame dei risultati analitici riportati nel quadro precedente basterebbe a dimostrare, con la massima chiarezza, quanto già abbiamo affermato circa la diversa composizione delle acque termali sopra indicate, ed il loro aggruppamento in tre tipi distinti; ma, quantunque a malincuore, dobbiamo dichiarare che ad alcune delle analisi sopra riportate bisogna attribuire un valore relativo e limitato. Infatti dallo studio delle rispettive relazioni risulta evidente che, a parte i metodi analitici seguiti, e per i quali lasciamo che giudichino i competenti, troppo spesso i documenti delle analisi sono in completo disaccordo con i dati finali. Tuttavia, siccome per il nostro scopo sono sufficienti le determinazioni quantitative di alcune sostanze, per le quali la facilità dei metodi dà maggiore garenzia di una più esatta esecuzione, limitiamo il confronto alle sostanze seguenti:

Sorgenti	Fornello	Belliazzi	Manzi
Anidride solforica (SO_3)	0,8198	0,3657	0,2891
» silicica (SiO_2)	0,1492	0,1686	0,1385
Cloro (Cl)	0,7365	1,5969	0,6565
Potassio (K)	0,0864	0,1853	0,1719
Sodio (Na)	1,0244	1,7438	1,6485
Calcio (Ca)	0,8304	0,0370	0,2555
Magnesio (Mg)	0,1875	0,0158	0,0230

Trasformando col calcolo i metalli in ossidi, si ha:

Ossido di potassio (K_2O)	0,1041	0,2233	0,2071
» » sodio (Na_2O)	1,3807	2,3504	2,2219
» » calcio (CaO)	1,1625	0,0518	0,3577
» » magnesio (MgO)	0,3125	0,0263	0,0383

Poichè per l'acqua di Fornello manca la determinazione del residuo fisso a 180°, non possiamo fare un quadro di rapporti; ma basta osservare le grandi differenze che presentano le tre acque nel contenuto per litro di SO_3, Cl, K_2O, Na_2O, CaO e MgO, per venire alla conclusione, già da noi enunciata, che, cioè, *le tre acque, e perciò i gruppi di cui esse fanno parte, hanno composizione chimica diversa e che per* **acque del Gurgitello debbono solo intendersi le sorgenti appartenenti al Pio Monte della Misericordia ed alle Terme Belliazzi.**

Acqua della Sorgente fredda (*Cappone*)

Come già fu detto in principio di questa memoria dell'acqua Cappone trattano autorevoli e antichi scrittori; ma le analisi sono poche e nessuna recente. Tuttavia, anche dal confronto delle analisi pubblicate dall'Aloisio appare chiaro che quest'acqua, per la sua composizione, si distacca dalle vicine sorgenti a temperatura molto più alta.

Nella « *Storia dell'isola d'Ischia* » di Giuseppe d'Ascia, Napoli, 1867, a p. 53 si legge:

« La vena dell'acqua di Cappone scaturisce alle vicinanze di quella di Gurgitello, « ed è raccolta nello Stabilimento stesso.

« Facevano anticamente derivare il nome di quest'acqua dal suo sapore, che si sti- « mò rassomigliante al brodo di *cappone*; ma dagli etimologisti moderni fu meglio con- « getturato, che deriva dall'efficacia dell'acqua contro la malattia del ventre, così che « dovrebbe dirsi *Cataponi* derivante da due vocaboli greci.

« Secondo l'analisi fattane dal Prof. Guarini..... ».

Sembra, infatti, che l'ultima analisi sia appunto quella fatta dal Guarini nel 1832, e che riportiamo, copiandola dal libro del D.r Giovanni Garelli: *Delle acque minerali d'Italia e delle loro applicazioni terapeutiche*. Torino, 1864.

Secondo il Guarini si troverebbero in un litro di acqua:

Densità = 1,00424

Acido carbonico libero	cent. cubi	90
Cloruro di sodio	grammi	3,985
Carbonato di calce	»	0,095
» magnesia	»	0,070
» soda	»	0,635
Solfato di soda	»	0,357
Ioduro e bromuro di potassio e silicato di soda	»	tracce
Allumina ed ossido di ferro	»	0,014
Silice e solfato di calce	»	0,113
	grammi	6,269

La necessità di dovere presentare presto la nostra relazione non ci ha permesso di fare un'analisi completa, come avremmo desiderato, anche di questa sorgente, e perciò l'acqua fu sottoposta ad un'analisi sommaria, determinandovi, cioè, i principali corpi mineralizzanti, con gli stessi processi descritti per l'analisi delle acque precedenti.

La temperatura fu trovata nel Dicembre 1897 eguale a 23°.

Dall'analisi quantitativa si ottennero i seguenti risultati:

Per 1000 c. c. di acqua:

Cloro	gr.	2,31319
Anidride solforica	»	0,29320
» silicica	»	0,15020
Ossido di potassio	»	0,25252
» sodio	»	2,56520
» calcio	»	0,12020
» magnesio	»	0,04482
Residuo a 180°	»	5,68500

I quali risultati, accoppiati secondo le norme esposte innanzi, danno la seguente

Composizione probabile del residuo a 180°

Cloruro di potassio (KCl)	gr.	0,39955
» sodio ($NaCl$)	»	3,53681
Solfato » (Na_2SO_4)	»	0,52043
Carbonato » (Na_2CO_3)	»	0,78556
» calcio ($CaCO_3$)	»	0,21464
» magnesio ($MgCO_3$)	»	0,09412
Silice (SiO_2)	»	0,15020
Totale	»	5,70131
Res. a 180° dosato dirett.	»	5,68500
Errore	+	0,01631

E calcolando i carbonati come bicarbonati, si ottiene il seguente quadro:

Principali sostanze disciolte in 1 litro di acqua

(Temperatura 23°)

Cloruro di potassio (KCl)	gr.	0,39955
» sodio ($NaCl$)	»	3,53681
Solfato di sodio (Na_2SO_4)	»	0,52063
Bicarbonato di sodio ($NaHCO_3$)	»	1,24504
» calcio [$Ca(HCO_3)_2$]	»	0,34772
» magnesio [$Mg(HCO_3)_2$]	»	0,16359
Silice (SiO_2)	»	0,15020
Totale	gr.	6,36354

Le differenze tra le quantità dei sali che si trovano nell'acqua Cappone e nelle vicine termali risultano ancora più manifeste dal seguente quadro:

Tavola di rapporti

Acqua	Mescolanza	Sorg. a destra	Cappone
Residuo fisso a 180°	5,09200	5,06100	5,68500
Rapporto $\frac{Cl}{\text{res. a } 180^0}$	0,31	0.31	0,40
» $\frac{SO_3}{\text{res. a } 180^0}$	0,072	0,072	0,051
» $\frac{Na_2O}{\text{res. a } 180^0}$	0,46	0,46	0,45
» $\frac{K_2O}{\text{res. a } 180^0}$	0,044	0,044	0,044
» $\frac{CaO}{\text{res. a } 180^0}$	0,10	0,10	0,21
» $\frac{MgO}{\text{res. a } 180^0}$	0,005	0,005	0,008
» $\frac{Na_2O+Cl}{\text{res. a } 180^0}$	0,77	0,77	0,86
» $\frac{MgO}{CaO}$	0,50	0,50	0,37

L'acqua Cappone è più ricca di sali, specialmente di cloruro di sodio, ed anche essa è un'acqua **carbonata, alcalina, clorurata.**

Acqua del Mar Piccolo di Taranto.

Prendiamo occasione dal presente lavoro per pubblicare i risultati dell'analisi dell'acqua del mare (Mar piccolo) di Taranto, da noi fatta sin dal 1889. Tale analisi fu eseguita allo scopo di confrontarne i risultati con quelli da noi stessi ottenuti dallo studio di un'altra sorgente minerale, sita a pochi metri dalla costa sulla spiaggia occidentale del suddetto mare, e propriamente all'estremo della città vecchia presso il primo ponte, che conduce alla ferrovia.

L'acqua del mare, che impiegammo per la nostra analisi, fu raccolta ad una distanza di circa 200 metri dalla costa ed i processi seguiti per le singole ricerche furono presso a poco identici a quelli descritti in questo lavoro. Dobbiamo, però, dichiarare che, a causa della piccola capacità della imbarcazione sulla quale eravamo e di un'improvvisa perturbazione atmosferica sopravvenuta, la quale c'impedì di trattenerci molto sul posto, non ci fu possibile di raccogliere grandi quantità di acqua, che avrebbero dovuto servirci per la ricerca dei corpi rari o contenuti in minime proporzioni, nè di praticare alcune speciali determinazioni, come, per es. quella dell'anidride carbonica, per le quali occorreva preparare opportunamente i saggi necessarii sul posto stesso.

Dall'analisi qualitativa fatta sia sul residuo di 1 litro, che su quello di 10 litri, e dai singoli dosamenti eseguiti risultò che l'acqua contiene disciolti i seguenti corpi:

Per 1000 c. c. di acqua:

(Peso specifico = 1,0277)

Anidride carbonica totale (CO_2)	gr.	?
» combinata (calcolata)	»	0,0612
Cloro (Cl)	»	20,6440
Anidride solforica (SO_3)	»	2,4032
» silicica (SiO_2)	»	0,0134
Ossido di calcio (CaO)	»	0,5876
» magnesio (MgO)	»	2,2978
» potassio (K_2O)	»	0,5070
» sodio (Na_2O)	»	11,3966
Ammoniaca, sostanze organiche		tracce
Ossido di ferro, allumina, manganese		»
Bario, strontio		»
Bromo, acido borico		»
Ossigeno c. c. 8,18 a 0° e 760^{mm} pari a	»	0,0115
Azoto » 23,5 » » » »	»	0,0295
Residuo fisso a 180°	»	37,2585

Aggruppando questi risultati con i criterii che abbiamo esposti innanzi si ottiene la seguente composizione del residuo:

Per 1000 c. c. di acqua:

Cloruro di sodio ($NaCl$)	gr.	28,9870
» potassio (KCl)	»	0,9685
» magnesio ($MgCl_2$)	»	3,4683
Solfato » ($MgSO_4$)	»	2,5125
» calcio ($CaSO_4$)	»	1,2379
Carbonato » ($CaCO_3$)	»	0,1391
Silice (SiO_2)	»	0,0134
Totale	»	37,3267
Residuo a 180° trovato direttamente	»	37,2585
Errore	»	0,0782

E trasformando col calcolo il carbonato calcico in bicarbonato si ha per ogni litro di acqua la seguente composizione:

Ossigeno (O)	gr.	0,0115
Azoto (N)	»	0,0295
Cloruro di sodio ($NaCl$)	»	28,9870
» potassio (KCl)	»	0,9685
» magnesio ($MgCl_2$)	»	3,4683
Solfato » ($MgSO_4$)	»	2,5125
» calcio ($CaSO_4$)	»	1,2379
Bicarbonato » [$Ca(HCO_3)_2$]	»	0,2253
Silice (SiO_2)	»	0,0134
Ammoniaca, sostanze organiche	tracce	
Ossido di ferro, allumina, manganese	»	
Bario strontio	»	
Bromo, acido borico	»	
Totale	gr.	37,4539

A tali risultati crediamo utile aggiungere le seguenti osservazioni.

Alla determinazione dell'ossigeno e dell'azoto disciolti non può attribuirsi che un valore relativo, poichè è noto che la quantità di aria che si trova disciolta nell'acqua del mare cresce col crescere della profondità, accrescimento che, secondo Tornoe *), si riferisce all'azoto e sembra dovuto piuttosto ad abbassamento di temperatura anzichè ad aumento di pressione.

La composizione dell'acqua del mare varia leggermente anche con la distanza dalla

*) *Journ. prath. Chem.*; t. XIX, 401-433 e t. XX, 44-76.

costa; infatti alcune determinazioni da noi praticate sopra campioni di acqua raccolti molto prossimamente alla spiaggia, ci fornirono i seguenti valori che differiscono sensibilmente da quelli precedenti:

	alla spiaggia	a 200 metri
Cl per litro	19,8340	20,6440
SO_3 »	2,3004	2,4032
K_2O »	0,4136	0,5070
Na_2O »	10,9599	11,3966

Infine calcolando per l'acqua del mare da noi esaminata il valore di $\frac{SO_3 \times 100}{Cl}$ si ha la cifra 11,64, la quale è poco dissimile dalle medie riportate dall'Hamberg nel suo studio sopra menzionato.

Istituto chimico della R. Università.
Napoli, Giugno 1898.

finita di stampare il dì 18 Luglio 1898

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULL'USO DELL'ALGORITMO ISOBARICO

NELLA RISOLUZIONE DELLE SERIE RICORRENTI

MEMORIA

del D.r C. PIETROCOLA

presentata nell'adunanza del dì 5 Marzo 1898

Le serie ricorrenti furono incontrate la prima volta dal Cassini*); ma il Moivre**) a cui si deve il loro nome, le studiò pel primo e ne dette i due teoremi fondamentali generalmente conosciuti cioè:

1° I termini di una successione $y_1, y_2, \ldots$ soddisfacenti alle relazioni (in forma simbolica)

$$y^p(y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_n y^0) = 0 \qquad p = 0, 1, 2 \ldots . \tag{1}$$

possono ottenersi nei coefficienti dello sviluppo in serie di potenze ascendenti della x, di una frazione razionale (detta poi generatrice dal Lagrangia) a denominatore

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n .$$

2° Se l'equazione

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \tag{2}$$

ha tutte radici semplici e sono $a, b, \ldots l$, risulta

$$y_r = \mathrm{A}a^r + \mathrm{B}b^r + \ldots + \mathrm{L}l^r \text{ ***)} \quad \text{dove le A , B ... L non dipendono da } r. \tag{3}$$

Eulero ****), sviluppando in serie di potenze le frazioni semplici in cui si decompone la frazione generatrice, trattò anche il caso delle radici multiple; ma fu il La-

*) Cassini, ***Histoire de l'Académie Royale des sciences***, p. 309 (1680).

**) Moivre, *Miscellanea Analytica*, p. 27.

***) Il Lucas attribuisce a torto questo teorema al Lagrangia nella sua *Théorie des nombre* (1880), pag. 304.

****) ***Introductio in Analysin***, T. I.

grangia il primo *) (1756) a dare alla teoria delle serie ricorrenti un ampio sviluppo facendola scaturire da quella delle equazioni lineari a differenze finite; concetto questo che fu indi coltivato dal Laplace **), poi sviluppato ancóra dal Lagrangia medesimo ***) e dal Paoli ****).

Il Lagrangia nella nota citata del 1756 considera il caso più generale della equazione (1) con il secondo membro funzione di p, generalizzando a questo caso la formola di Moivre. Una seconda generalizzazione della medesima formola la ottiene nella memoria del 1775 cercando come si modifica la parte di essa che dipende dalle radici $a, b, \ldots k$, allorchè $b, c, \ldots k$ tendono successivamente ad a; però, per inavvertenza, giunge ad un'espressione che è poi dimostrata inesatta dal Malfatti *****), che la modifica per via di induzione. In questa stessa memoria il Lagrangia, oltre a dare le espressioni di A, B,... della soluzione di Moivre in funzione dei termini iniziali della serie, si occupa, sempre dal punto di vista delle equazioni a differenze finite e parziali, delle serie doppie e triple; trattazione questa che fu indi considerata dal Malfatti, ed estesa dal Paoli, nella memoria citata, al caso in cui il numero dei termini che entrano nella scala di relazione ******) non è costante. Notevole è anche la memoria del Paoli per le applicazioni alla teoria della partizione dei numeri.

L'osservazione menzionata del Malfatti porse al Lagrangia l'occasione di una terza memoria sulle serie ricorrenti *******) ove la teoria ne è ripresa dal suo inizio e trattata indipendentemente dalle equazioni a differenze finite, ed ove trovansi, pei coefficienti A, B,... della soluzione di Moivre, le espressioni eleganti (in forma simbolica relativamente alle y)

$$A = \frac{(y-b)(y-c)\ldots(y-l)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}, \quad B = \frac{(y-a)(y-c)\ldots(y-l)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)}, \ldots$$

In questa memoria sono notevoli le diverse forme dell'espressione di y_r relative al caso dell'equazione generatrice con radici multiple e che possono riassumersi come segue (notando che si adopera la forma simbolica per le y e che $V_{r.a}$ rappresenta la parte di y_r dipendente dalla radice multipla a del grado α di multiplicità):

$$\text{I.} \quad V_{r.a} = f_a(y)\left[\varphi^{(\alpha-2)}(a) + \frac{y-a}{1}\frac{d}{da}\varphi^{(\alpha-2)}(a) + \frac{(y-a)^2}{|\underline{2}}\frac{d^2}{da^2}\varphi^{(\alpha-2)}(a) + \ldots + \frac{(y-a)^{\alpha-1}}{|\underline{\alpha-1}}\frac{d^{\alpha-1}}{da^{\alpha-1}}\varphi^{(\alpha-2)}(a)\right]:$$

*) Lagrangia, *Oeuvres Complets*, T. I. Questa memoria fu la seconda delle pubblicazioni del Lagrangia.

**) Laplace, *Sulle serie ricorrenti e sulla integrazione delle equazioni differenziali finite loro uso nella teoria delle probabilità* (VI e VII delle memorie presentate all'Accademia delle scienze di Parigi).

***) Lagrangia, *o. c.*, T. IV, p. 151 (Anno 1775).

****) Pietro Paoli (Vol. II delle *Memorie di matem. e fisica della Società Italiana*, Anno 1784).

*****) Malfatti (Vol. III delle *Memorie di matem. e fisica della Società Italiana*, Anno 1786).

******) Il Moivre chiamò scala di relazione la successione $1, a_1, a_2, \ldots a_n$; denominazione che fu mantenuta da Eulero e adoperata dal Catalan per indicare invece la (1). La denominazione del Catalan qui è estesa anche alle serie ricorrenti doppie, triple... Il Lagrangia chiamò la (2) equazione generatrice.

*******) Lagrangia, *o. c.*, T. V, p. 628 (Anno 1892).

ove

$$f_a(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} \quad ; \quad \varphi(x) = \frac{x^r}{f_a(x)} \; .$$

II. $$V_{r,a} = \frac{1}{\underline{|\alpha-1}} \frac{d^{\alpha-1}}{da^{\alpha-1}} [F(a)\varphi^{(\alpha-2)}(a)] \; ,$$

Notando che si è messo,

$$F(a) = (y-a)^{\alpha-1} f_a(y) \; ,$$

ben inteso che il secondo membro deve essere espresso quale funzione della sola radice a (e dei coefficienti dell'equazione generatrice non che dei valori iniziali y).

III. $$V_{r,a} = \frac{1}{\underline{|\alpha-1}} \frac{d^{\alpha-1}}{da^{\alpha-1}} \left[\frac{\psi(a)}{\frac{1}{\underline{|\alpha}} \cdot f^{(\alpha)}(a)} a^r \right] \; ,$$

ove

$$\psi(x) = y_0(x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + y_1(x^{n-2} + a_1 x^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + y_{n-1} \; .$$

Oltre a queste formole, di cui la III sintetizza quelle date da Malfatti, e di cui sopra abbiamo fatto cenno, il Lagrangia propose a dimostrare una novella espressione di y_r, che, leggermente modificata (come l'ha fatto il Trudi), e adoperando il simbolo dei residui di Cauchy, può rappresentarsi con

IV. $$V_{r,a} = \mathcal{E}_{z=0} (a+z)^r \frac{\psi(a+z)}{f(a+z)} \; ;$$

$\psi(x)$ avendo il significato che si è ad esso precedentemente attribuito.

Il primo a dimostrare la IV fu il Jacobi *) (1825); indi il Trudi **) (1866), ne dette una novella dimostrazione premettendo a fondamento l'osservazione (che completa il 1° teorema di Moivre), consistente nel notare che

$$x^{n-1}\psi\left(\frac{1}{x}\right)$$

è il numeratore della frazione generatrice della serie ricorrente di cui $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ sono i coefficienti dei termini iniziali ***).

---

*) Jacobi, *Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus.*

**) N. Trudi, Volume II degli *Atti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche in Napoli.*

***) In altri termini (per valori della z compresi tra limiti convenienti, per la convergenza delle serie)

$$\frac{\psi(z)}{f(z)} = \frac{1}{z}(1 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \ldots + y_r z^{-r} + \ldots) \; . \qquad (\alpha)$$

Conseguenza immediata della (α), non potendone il 2° membro convergere che verso un unico valore, è il seguente teorema enunciato da M. d'Ocagne (*Journal de l'École Normale Polytecnique,*

Le formole su indicate, più o meno direttamente, conducono ad espressioni della forma

V. $$V_{a,r} = a^r \Phi_a(r)$$

(in cui $\Phi_a(r)$ è *una* funzione intera in r di grado $\alpha - 1$); ed a tale formola si arriva in modo semplice, specialmente seguendo il metodo adoperato da Eulero, cioè dello sviluppo in serie di potenza delle frazioni semplici in cui si decompone la frazione generatrice; ed anzi il Catalan *), notando potersi tale metodo seguire a ritroso, ha enunciato il teorema inverso « Se il termine generale y_r di una successione $y_1, y_2, y_3 \ldots$ può ricevere la forma

$$y_r = a^r\Phi_a(r) + b^r\Phi_b(r) + \ldots + l^r\Phi_l(r) ,$$

in cui $\Phi_a(r), \Phi_b(r), \ldots \Phi_l(r)$, sono funzioni intere in r dei gradi rispettivi $\alpha - 1, \beta - 1, \ldots \lambda - 1$; la serie $\sum_{r=0}^{r=\infty} y_r x^r$ è ricorrente, e l'equazione generatrice è appunto

$$(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda = 0 \text{ **)} »;$$

Così, il problema della ricerca del termine generale di una serie ricorrente poteva dirsi compiutamente risoluto; però la distinzione non necessaria delle parti di y_r dipendenti dalle diverse radici ***), importava la conoscenza sia dei valori delle medesime, che

---

1894) che « la condizione necessaria e sufficiente perchè la serie sodisfi ad una scala di relazione di ordine più basso, è che $\psi(z)$ ed $f(z)$ abbiano un comune divisore ».

Torna a proposito di rilevare anche la forma data dal Trudi, nella memoria citata, alla parte intera Q_i del quoziente di $f(x)$ per $(x-a)^i$, (a essendo o no radice di $f(x)=0$). Posto in fatti

$$f_i(z) = z^i + a_1 z^{i-1} + a_2 z^{i-2} + \ldots + a_i \quad , \quad \text{per } i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 ;$$

il Trudi nota dapprima essere

$$Q_1 = f_0(a)z^{n-1} + f_1(a)z^{n-2} + \ldots + f_{n-1}(a) ; \qquad (\beta)$$

e poi

$$Q_i = \frac{1}{\underline{|i-1}} \frac{dQ_1}{da^{i-1}} . \qquad (\gamma)$$

Evidentemente se $(x-a)^i$ è il mass. com. div. di $f(x)$ e $\psi(x)$, si ha in Q_i la nuova scala di relazione, ridotta.

Nel d'Ocagne (*Memoria citata*), si ritrova la sola (β).

*) E. Catalan, *Traité élémentaire des séries.* (1860).

**) Conseguenza immediata di questo fecondo teorema è che « se si moltiplicano, termine a termine, più serie ricorrenti, si ottiene una serie anch'essa ricorrente la cui equazione generatrice ha per radice i prodotti delle radici delle equazioni generatrici delle serie ». Tale teorema, rilevato dal Lucas (1891) nella *Théorie des Nombres* (p. 306) per le serie del 2° ordine, è stato indi enunciato nella sua generalità dal d'Ocagne (*Mem. citata*).

***) Confronta a questo proposito una nota di Jamet *Sur la decomposition des fractions rationnelles en fractions simples* (*Nouv. Ann.*, pag. 228-232, Anno 1889), ove è dimostrata la seguente formola, che ricorda quelle del Lagrangia

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{1}{\underline{|\alpha-1}} \frac{d^{\alpha-1}}{da^{\alpha-1}}\left[\frac{\psi(a)}{(x-a)f_a(a)}\right] + \frac{1}{\underline{|\beta-1}} \frac{d^{\beta-1}}{db^{\beta-1}}\left[\frac{\psi(b)}{(x-b)f_b(b)}\right] + \ldots + \frac{1}{\underline{|\lambda-1}} \frac{d^{\lambda-1}}{dl^{\lambda-1}}\left[\frac{\psi(l)}{(x-l)f_l(l)}\right] .$$

del loro relativo grado di multiplicità, ciò che induceva una difficoltà pel calcolo, ed una complicazione per la trattazione. Tali inconvenienti non sfuggirono al Lagrangia, il quale in fatti cercò di evitarli in parte mercè la sua formola IV: Il Trudi, seguendo lo stesso obbiettivo, presentò una formola analoga *); però formole di tal genere, che ora è facile produrre a piacimento **), non risolvevano ma dissimulavano la difficoltà ed esse sono le ultime di questo periodo. D'ora innanzi la ricerca prende un altro indirizzo.

Nei *Nouvelles Annales de Mathématique* ***) comparve nel 1856 una questione del Wronski riflettente la espressione delle funzioni simmetriche complete (o funzioni Aleph) delle radici di una equazione mercè i coefficienti della medesima equazione; ed il Brioschi ****) ne diè una soluzione consistente essenzialmente nel notare che i coefficienti u dello sviluppo in serie

$$\frac{1}{1+a_1x+a_2x^2+\dots}=1+u_1x+u_2x^2+\dots \tag{A}$$

sono uguali precisamente alle funzioni Aleph, ossia, con notazione oramai accettata di queste funzioni,

$$u_r=[ab\dots l]^r. \tag{B}$$

Ed inoltre il Brioschi nella stessa nota, ottiene la espressione di u_r sotto forma di determinante, dimostrando e risolvendo il sistema di equazioni

$$a_m+a_1u_{m-1}+a_2u_{m-2}+\dots+a_1u_{m-1}+u_m=0 \quad \text{per } m=1,2,\dots$$

che, come osserva il Sig. E. Catalan *****) era già stato dato dal Wronski e che d'altronde si deduce direttamente da (A) per identificazione.

Nel 1864 il Trudi ******) studia le proprietà delle funzioni Aleph, che introdotte dal Wronski, formavano in quel tempo frequente oggetto di note, e ritrova, oltre a quelli già rilevati, altri interessanti e fondamentali risultati fra i quali notiamo, la interessante formola

$$u_r=\sum(-1)^g\frac{|\underline{g}}{|\underline{\sigma}\,|\underline{\zeta}\dots|\underline{\tau}}\,a_s^{\sigma}a_z^{\zeta}\dots a_t^{\tau}; \tag{C}$$

*) N. Trudi, *Intorno ad un teorema per lo sviluppo in serie delle funzioni fratte razionali* (*Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli*, Fasc. 12°, Dic. 1866).

**) È ovvio, in fatti, che possono dedursi con cambiamento di variabile dalla

$$V_{a,r}=\mathcal{E}_{z=a}z^r\frac{\psi(z)}{f(z)}$$

che può stabilirsi direttamente in modo immediato appoggiandosi al teorema di Eulero sulla somma totale dei residui delle funzioni fratte razionali.

***) Vol. XV, pag. 407.

****) *Nouv. Annales de Mathématique*, Vol. XVI, pag. 248.

*****) *Id. id.*, Vol. XVI, pag. 416.

******) N. Trudi, *Sulle funzioni simmetriche complete* (*Giornale di Battaglini*, Anno II, pag. 152 e 180).

ove il sommatorio è esteso a tutte le soluzioni, per numeri interi e positivi, di

$$\sigma+\zeta+\ldots+\tau=g$$
$$s\sigma+z\zeta+\ldots+t\tau=r\ .$$

Con le formole precedenti risultava immediato lo sviluppo

$$\frac{b_0+b_1x+\ldots+b_{n-1}x^{n-1}}{1+a_1x+\ldots+a_nx^n}=1+y_1x+y_2x^2+\ldots$$

mercè la relazione evidente

VI. $$y_r=b_0u_r+b_1u_{r-1}+\ldots+b_{n-1}u_{r-(n-1)}\ ;$$

ed anzi la espressione di y_r in funzione dei termini iniziali della serie, se ne deduceva mercè il sistema immediato

$$b_i=y_i+a_1y_{i-1}+a_2y_{i-2}+\ldots+a_i\quad,\quad i=0\,,1\,,2\,,\ldots n-1\ .$$

Così il problema della ricerca del termine generale di una serie ricorrente, entrato col Brioschi e col Trudi in una nuova fase, riceveva una doppia soluzione, ciascuna delle quali non lasciava nulla a desiderare per generalità, semplicità ed eleganza.

Alla nota del Trudi del 1864 seguirono parecchie altre dello stesso tipo di varii autori napoletani *), pubblicate nel *Giornale di Battaglini* fino al 1880 epoca in cui comparve una interessante memoria del Trudi che le riassume, le completa e sviluppa nei risultati più importanti **). Nel frattempo, il 1870, viene pubblicata una interessante tesi del Sig. D. André ***), nella quale, questo autore, dà l'espressione del termine generale U_r del sistema di equazioni

$$U_m=A_1^{(m)}U_{m-1}+A_2^{(m)}U_{m-2}+\ldots+A_{m-1}^{(m)}U_1+A_m^{(m)}\quad;\quad m=1\,,2\,,\ldots$$

in una forma che si può rappresentare con

$$U_r=\sum A_x^{(x)}A_y^{(x+y)}A_z^{(x+y+z)}\ldots A_t^{(x+y+z+\ldots+t)}\ ,$$

il sommatorio essendo esteso a tutti i sistemi distinti di soluzioni in numeri interi positivi dell'equazione

$$x+y+z+\ldots+t=r\ ;$$

---

*) Vedi le note di Gabriele Torelli, Filippo Gambardella, Alfonso Bonalis, Leopoldo Crocchi ecc. *Sulle funzioni simmetriche complete, sulle funzioni isobariche e sui coefficienti delle facoltà analitiche.* Confronta pure quelle di P. A. Mac-Mahon (*American Journal*, XII, 61-102), ed inoltre, sul teorema del Crocchi, le note di F. Franklin e J. J. Sylvester, pubblicate in *Johns Hophins University Circulars*, II, ecc.

**) N. Trudi, *Ricerca intorno alla partizione dei numeri ed alle funzioni isobariche.* (Napoli, Tipografia dell'Accademia Reale delle Scienze, 1880). Questa memoria è interessante anche per le notizie storiche.

***) *Annales de l'École Normale Supérieure*, 2e Serie, T. VII, pag. 375.

ed è ovvio, che l'applicazione della soluzione di André alle ricorrenze lineari, conduce precisamente alla formola (C) del Trudi. Notiamo poi che l'André dà anche la formola seguente:

$$u_r = \frac{(-1)^r}{|\underline{r}} \left(D_x^{(r)} \frac{X^r - (-1)^r X}{X+1} \right)_{x=0}$$

ove

$$X = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \text{ *)}.$$

Intanto mentre gli autori napoletani si erano occupati incidentalmente (salvo rare eccezioni) dello sviluppo in serie delle funzioni fratte, sia con le funzioni simmetriche complete, che con quelle isobariche, il Sig. M. d'Ocagne, in una serie di note **) pubblicate dal 1883 in poi, prende, invece, per obbiettivo principale delle sue ricerche, la risoluzione delle serie ricorrenti; però giunge a risultati che non differiscono sostanzialmente ***) da quelli segnalati da circa un ventennio, prima dal Trudi; come già ha fatto rilevare fin dal 1885 il Prof. E. Cesàro ****).

Con la introduzione delle funzioni Aleph veniva dato il termine generale di una serie ricorrente mercè le radici dell'equazione generatrice, in una forma indipendente dal loro grado di multiplicità; il problema inverso della determinazione delle radici (o di qualcuna di esse) mercè i termini della serie, si presentava spontaneo, e, com'è noto, fu messo e risoluto in casi speciali fin dai tempi del Cassini. A questo obbiettivo

---

*) Lo stesso autore si è occupato a più riprese delle serie ricorrenti specialmente riguardo alle condizioni di convergenza, somma di un numero finito o infinito (nel caso della convergenza) di termini, e dipendenza delle equazioni generatrici di due serie. Consulta:

Annales de l'École Normale Superieure, 2e Serie, T. VII, pag. 375; e T. XII, pag. 191-199;
Comptes Rendus de la Societé mathématique de France, Volumi LXXXVI, pag. 1017; LXXXVII, 973; LXXXVIII, 740; XLII, 697;
Bull. S. M. Fr., Vol. VI (1878), pag. 166-170;
F. d. M., Vol. X, ecc.

**) Tutte queste note del d'Ocagne trovansi citate e sviluppate nel suo *Mémoire* (già menzionato) *sur les suites récurrentes* (*Journal de l'École Polytecnique*, 1894).

***) Il d'Ocagne esprime y_r mercè i termini di una serie $v_0, v_1, v_2 \ldots$ soddisfacenti alla stessa scala di relazione, e tali che

$$v_i = \begin{cases} 0 & \text{per } i < n-1 \\ 1 & \text{per } i = n-1 \end{cases}$$

e dimostra essere $v_r = [a, b, \ldots l]^{r-(n-1)}$.

La successione $v_0 v_1 v_2$ assunta dal d'Ocagne mentre è men semplice di quella delle $u_0 u_1 u_2 \ldots$ assunta dal Brioschi e dal Trudi, risulta immediatamente dalle VI (col farvi $b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$, $b_{n-2} = 1$) e conduce per y_r a risultati identici che la successione delle u.

Il d'Ocagne inoltre, nel caso che $a, b, \ldots l$ sieno tutte radici semplici di $f(x) = 0$ ha dato a v_r anche la forma

$$v_r = \frac{a^r}{f'(a)} + \frac{b^r}{f'(b)} + \cdots + \frac{l^r}{f'(l)}$$

che, evidentemente, è la formola III del Lagrangia applicata a questo caso particolare. La memoria del d'Ocagne, malgrado quanto è stato rilevato anche prima, non cessa purtuttavia di essere interessante essendovi trattati gli argomenti più notevoli sulle serie ricorrenti.

****) E. Cesàro, *Nouv. Annales*, 3e Série, T. IV, 1885, pag. 66.

sono ora indirizzate varie ricerche, e chiudiamo queste brevi notizie segnalando al riguardo la memoria del Sig. Perrin *) e quella del Sig. Capelli **), e chiedendo che ci si indulga per le inevitabili omissioni.

***

Per dare ora un cenno giustificativo della presente nota, diremo esserci parso che la trattazione delle serie ricorrenti acquistasse maggiore pieghevolezza ed uniformità con una generalizzazione dell'algoritmo isobarico e mercè la introduzione della funzione

$$\eta_{rq} = \begin{cases} 1 & \text{per } r \leqq q \\ 0 & \text{per } r > q \end{cases}.$$

È così che riusciamo ad ottenere in generale la espressione di un termine qualunque in forme irriduttibili ed ugualmente semplici che quelle relative alla serie fondamentale considerata dal Trudi.

Abbiamo creduto inoltre soffermarci in principio sulle proprietà fondamentali dell'algoritmo generalizzato, per presentarne una trattazione come oggetto a se stesso ***).

I. Col simbolo

$$(a^\alpha b^\beta \dots m^\mu)_p \tag{1}$$

rappresenteremo la somma

$$U = \sum a_{x_1} a_{x_2} \dots a_{x_\alpha} b_{y_1} b_{y_2} \dots b_{y_\beta} \dots m_{z_1} m_{z_2} \dots m_{z_\mu}$$

estesa a tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione

$$x_1 + x_2 + \dots + x_\alpha + y_1 + y_2 + \dots + y_\beta + \dots + z_1 + z_2 + \dots + z_\mu = p \tag{2}$$

---

*) R. Perrin, *Sur la Résolution des equations numériques au moyen des suites récurrentes*, C. R., CXIX, pag. 990-993, 1190-1192, 1257-1259.

**) A. Capelli, *Sull'uso delle progressioni ricorrenti nella risoluzione delle equazioni algebriche* (*Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli*, Fasc. 7°, Luglio 1895).

***) È notevole la forza di sintesi di questo algoritmo: rileviamo, a proposito, che la formola di Emm. Fergola (*Annali delle matematiche pure ed applicate*, Volume 1°, 1858), e quella di Fr. Massa (*Giornale di Battaglini*, Anno XIII, 1875), *Sulla derivazione delle funzioni composte*, non sono che sviluppi diversi dell'unica formola

$$\frac{d^n}{dx^n} f(u_1 u_2 \dots u_m) = \sum_{g=1}^{g=n} \left[\frac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\dots\underline{|\mu}} (u_1^\alpha u_2^\beta \dots u_m^\mu) \frac{d^g f(u_1 u_2 \dots u_m)}{du_1^\alpha du_2^\beta \dots du_m^\mu} \right].$$

ove

$$g = \alpha + \beta + \dots + \mu \quad ; \quad u_{rs} = \frac{d^s u_r}{dx^s} \; ;$$

eppure tali formole sono comparse con 17 anni di differenza.

(Intorno a questo argomento confronta pure una nota di Ant. Fais « *Giornale di Battaglini*, Anno XIII, pag. 47 » ove sono richiamate varie notizie storiche al riguardo).

p essendo un numero intero e positivo; onde, se la parte letterale di un termine di (1) è

$$a_{u_1}^{\nu_1} a_{u_2}^{\nu_2} \dots a_{u_r}^{\nu_r} b_{w_1}^{t_1} b_{w_2}^{t_2} \dots b_{w_s}^{t_s} \dots$$

esso entrerà nello sviluppo di (1) col coefficiente

$$\frac{\underline{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r}}{\underline{\nu_1}\ \underline{\nu_2} \dots \underline{\nu_r}} \cdot \frac{\underline{t_1 + t_2 + \dots + t_s}}{\underline{t_1}\ \underline{t_2} \dots \underline{t_s}} \dots\dots$$

La U è nulla se il grado $\alpha + \beta + \dots + \mu$ è maggiore di p.

La (1) è dunque una funzione omogenea ed isobarica relativamente a tutte le variabili $a, b \dots m$.

Porremo poi, per convenzione,

$$(a^0)_p = 0 \quad \text{per} \quad p > 0 \quad , \quad (a^\alpha)_0 = \begin{cases} 1 & \text{per } \alpha = 0 \\ 0 & \text{per } \alpha > 0 \end{cases}$$

2. Nella (1) a due o più fattori si può sostituire il prodotto effettuato e viceversa; si può inoltre invertire l'ordine dei fattori onde il simbolo (1) ha la proprietà associativa e la commutativa.

Per esempio

$$(a^\alpha b^\beta)_p = (a^i \,.\, a^{\alpha - i} \,.\, b^j b^{\beta - j})_p \tag{3}$$

ed anche se $b_i = a_i$ qualunque sia i si ha

$$(a^\alpha b^\beta)_p = (a^\alpha \,.\, a^\beta)_p = (a^{\alpha+\beta})_p \ .$$

Si può trarre di qua una identità sui coefficienti degli sviluppi di (1).

3. Si noti, come caso particolare dell'osservazione precedente, l'identità

$$(a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots)_p = \sum (a^\alpha)_{p_\alpha} (b^\beta)_{p_\beta} (c^\gamma)_{p_\gamma} \dots ; \tag{4}$$

ove il sommatorio è esteso a tutte le soluzioni distinte, per numeri interi e positivi, dell'equazione

$$p_\alpha + p_\beta + p_\gamma + \dots = p$$

In particolare

$$(a^\alpha b)_p = b_1 (a^\alpha)_{p-1} + b_2 (a^\alpha)_{p-2} + \dots + b_{p-\alpha} (a^\alpha)_\alpha \tag{5}$$

$$(a^\alpha)_p = (a \,.\, a^{\alpha-1})_p = a_1 (a^{\alpha-1})_{p-1} + a_2 (a^{\alpha-1})_{p-2} + a_3 (a^{\alpha-1})_{p-3} + \dots + a_{p-\alpha+1} (a^{\alpha-1})_{\alpha-1} ; \tag{5'}$$

4. Mettendo, come si usa, l'identità simbolica

$$\Delta_{x \cdot y}^h = \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots \right)^h$$

si ha

$$\Delta_{a,r}^h (a^\alpha b^\beta \dots)_p = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - h + 1) (a^{\alpha-h} r^h b^\beta \dots)_p \ . \tag{6}$$

In particolare il differenziale totale di (a^α) è dato dalla formola

$$d(a^\alpha)_p = \alpha(a^{\alpha-1} . da)_p \tag{7}$$

ove *da* deve essere considerato come un sol fattore, com'è chiaro.

La formola (6), per $h=1$, si dimostra osservando che l'operazione $\Delta_{a,r}$ consiste nel cambiare in ciascun termine di U, in tutti i modi possibili, un sol fattore a nel corrispondente r. Dimostrata la (6) per $h=1$, applicandola successivamente, la si dimostra in generale.

5. Dalla (7) mercè la (5) si deduce

$$d(a^\alpha)_p = \alpha[da_1(a^{\alpha-1})_{p-1} + da_2(a^{\alpha-1})_{p-2} + \cdots + da_{p-\alpha+1} . (a^{\alpha-1})_{\alpha-1}]$$

donde

$$\frac{\partial(a^\alpha)_p}{\partial a_i} = \alpha(a^{\alpha-1})_{p-i} \, .$$

Analogamente si dimostrerebbe la formola più generale

$$\frac{\partial}{\partial a_i}(a^\alpha b^\beta \ldots)_p = \alpha(a^{\alpha-1} b^\beta \ldots)_{p-i} \, . \tag{8}$$

6. Si noti, per incidente, l'eguaglianza

$$(a^\alpha b^\beta)_p = \frac{|\underline{\alpha}}{|\underline{\alpha+\beta}} \Delta^\beta_{a,b}(a^{\alpha+\beta})_p = \frac{|\underline{\beta}}{|\underline{\alpha+\beta}} \Delta^\alpha_{b,a}(b^{\beta+\alpha})_p \, .$$

7. Facendo nella (6) $h=1$, $r_i = \mathrm{A}_i a_i$ per qualunque valore di i, verrà

$$\Delta_{a,r}(a^\alpha b^\beta \ldots)_p = \alpha(a^{\alpha-1} . \overline{\mathrm{A}a} . b^\beta \ldots)_p \;;$$

onde, messo identicamente

$$\frac{1}{\alpha}\Delta_{a,\mathrm{A}a}(a^\alpha b^\beta \ldots) = (\mathrm{A}a^\alpha b^\beta \ldots) \, , \tag{9}$$

poichè il primo membro rappresenta ciò che diventa $(a^\alpha b^\beta \ldots)$ allorchè un suo termine qualunque $a_{x_1} a_{x_2} \ldots a_{x_\alpha} b_{y_1} b_{y_2} \ldots$ si moltiplica per $\frac{1}{\alpha}(\mathrm{A}_{x_1} + \mathrm{A}_{x_2} + \ldots + \mathrm{A}_{x_\alpha})$, un tale significato si darà al 2.° membro della (9), e risulterà quindi l'identità

$$(\mathrm{A}a^\alpha b^\beta \ldots)_p = (a^{\alpha-1} . \overline{\mathrm{A}a} . b^\beta \ldots)_p \tag{10}$$

la quale comprende molte altre identità per la proprietà associativa del simbolo. In particolare si ha

$$(\mathrm{A}a^\alpha b^\beta \ldots)_p = (a^{\alpha-1} . \mathrm{A}a . b^\beta)_p = (a^{\alpha-i} . \mathrm{A}a^i . b^\beta \ldots)_p \text{ ecc.}$$

Notiamo che se

$$\mathrm{C} a_{u_1}^{\nu_1} a_{u_2}^{\nu_2} \ldots a_{u_r}^{\nu_r} b_{w_1}^{t_1} b_{w_2}^{t_2} \ldots b_{w_s}^{t_s} \ldots$$

è un termine qualunque dello sviluppo di $(a^\alpha b^\beta \ldots)_p$, (ove C è il coefficiente numerico), il termine corrispondente nello sviluppo di $(\mathrm{A}a^\alpha b^\beta \ldots)$ è

$$\frac{1}{\alpha}(\nu_1 \mathrm{A}_{u_1} + \nu_2 \mathrm{A}_{u_2} + \cdots + \nu_r \mathrm{A}_{u_r}) \, \mathrm{C} a_{u_1}^{\nu_1} a_{u_2}^{\nu_2} \ldots a_{u_r}^{\nu_r} b_{w_1}^{t_1} b_{w_2}^{t_2} \ldots b_{w_s}^{t_s} \ldots$$

8. Similmente, mettiamo identicamente

$$(\mathrm{A}\mathrm{A}' a^\alpha b^\beta \ldots)_p = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha - 1} \Delta_{a\, r} \cdot \Delta_{a\, s} (a^\alpha b^\beta \ldots)_p$$

dove a sviluppo completo, si metterà $r_i = \mathrm{A}_i a_i$, $s_i = \mathrm{A}'_i a_i$ per $i = 1, 2 \ldots$.

È evidente che, supposto essere

$$(a^\alpha b^\beta \ldots) = \sum \mathrm{C} a_{x_1} a_{x_2} \ldots a_{x_\alpha} b_{y_1} b_{y_2} \ldots,$$

risulta

$$(\mathrm{A}\mathrm{A}' a^\alpha b^\beta \ldots) = \frac{1}{\alpha(\alpha - 1)} \sum \mathrm{Q}\mathrm{C} a_{x_1} a_{x_2} \ldots a_{x_\alpha} b_{y_1} b_{y_2} \ldots$$

con

$$\mathrm{Q} = \sum \mathrm{A}_{x_i} \mathrm{A}'_{x_j}$$

per

$$i = 1, 2, \ldots \alpha \; ; \; j = 1, 2, \ldots \alpha \; ; \; i \neq j .$$

Cioè lo sviluppo di $(\mathrm{A}\mathrm{A}' a^\alpha b^\beta \ldots)$ si ottiene dallo sviluppo di $(a^\alpha b^\beta \ldots)$ moltiplicando ciascun termine $\mathrm{C} a_{x_1} a_{x_2} \ldots a_{x_\alpha} b_{y_1} b_{y_2} \ldots$ per la somma dei prodotti $\mathrm{A}_{x_i} \mathrm{A}'_{x_j}$ estesa a tutti gli indici che entrano nel termine considerato e con $i \neq j$, e dividendo il tutto per $\alpha(\alpha - 1)$.

La (10) dà poi

$$(\mathrm{A}\mathrm{A}' a^\alpha b^\beta \ldots) = (\overline{\mathrm{A}a} \cdot \overline{\mathrm{A}'a} \, a^{\alpha-2} b^\beta \ldots) \tag{11}$$

formola che si può generalizzare per la proprietà associativa del simbolo.

9. Merita speciale menzione il caso in cui

$$\mathrm{A}_{x_1} + \mathrm{A}_{x_2} + \cdots + \mathrm{A}_{x_\alpha} = \mathrm{cost} = k .$$

qualunque sia il termine

$$a_{x_1} a_{x_2} \ldots a_{x_\alpha} b_{y_1} b_{y_2} \ldots$$

imperocchè risulta

$$(\mathrm{A} a^\alpha b^\beta \ldots) = \frac{k}{\alpha} (a^\alpha b^\beta \ldots) . \tag{12}$$

Questo caso si presenta, in fatti, se si pone

$$\mathrm{A}_{x_i} = m x_i + n$$

imperocchè viene

$$\mathrm{A}_{x_1} + \mathrm{A}_{x_2} + \cdots \mathrm{A}_{x_\alpha} = m(x_1 + x_2 + \cdots) + n\alpha = mp + n\alpha$$

e quindi

$$(\mathrm{A}a^{\alpha})_p = \left(m\frac{p}{\alpha}+n\right)(a^{\alpha}) .$$

10. Notiamo, così di passaggio, due notissime identità:

Dalla (8) si deduce

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial a_1}+a_2\frac{\partial}{\partial a_2}+\cdots\right)(a^{\alpha}b^{\beta}\ldots)_p=\alpha(a^{\alpha}b^{\beta}\ldots)$$

che è la nota formola di **Eulero** sulle funzioni omogenee.

Dalla stessa (8) si deduce pure

$$\left(\mathrm{A}_1a_1\frac{\partial}{\partial a_1}+\mathrm{A}_2a_2\frac{\partial}{\partial a_2}+\cdots\right)(a^{\alpha}b^{\beta}\ldots)_p=(\mathrm{A}a^{\alpha}b^{\beta}\ldots)_p$$

e se in questa si pone $\mathrm{A}_x=x$ risulterà in particolare

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial a_1}+2a_2\frac{\partial}{\partial a_2}+3a_3\frac{\partial}{\partial a_3}+\cdots\right)(a^{\alpha}b^{\beta}\ldots)=\frac{p}{\alpha}(a^{\alpha}b^{\beta}\ldots)$$

che è l'altra identità di cui parlavamo.

11. Si metta

$$a_{hk}=\begin{cases} a_k & \text{per } h\leqq k\\ 0 & \text{per } h>k\end{cases}$$

e si sviluppi $(a_h^{\alpha})_p$ con la formola di **Maclaurin**, utilizzando la (8), viene

$$(a_h^{\alpha})_p=\sum_{i=0}^{i=\alpha}\binom{\alpha}{i}a_h^i(a_{h+1}^{\alpha-i})_{p-hi} \tag{13}$$

equazione che dà il valore di $(a^{\alpha})_p$ espresso mercè un polinomio ordinato secondo le potenze ascendenti del primo elemento a diverso da zero.

12. La (13) si può generalizzare nel seguente modo. Si distribuiscano gli elementi $a_1a_2\ldots$ in i gruppi che contraddistingueremo con diverse lettere $l,m,n\ldots s$ in modo che ciascun elemento a_k sarà rappresentato dalla lettera del gruppo cui esso appartiene affetta dall'indice k.

Allora un termine qualunque di $(a^{\alpha})_p$ potrà scriversi

$$l_{x_1}l_{x_2}\ldots l_{x_\lambda}m_{y_1}m_{y_2}\ldots m_{y_\mu}\ldots s_{z_1}s_{z_2}\ldots s_{z_\sigma}.$$

Ora il termine scritto entra nello sviluppo di (a^{α}) con un coefficiente che indichiamo con C; ed indichiamo con $\mathrm{C}_\lambda\mathrm{C}_\mu,\ldots\mathrm{C}_\sigma$ i coefficienti rispettivi coi quali

$$l_{x_1}l_{x_2}\ldots l_{x_\lambda},\ m_{y_1}m_{y_2}\ldots m_{y_\mu},\ \ldots,\ s_{z_1}s_{z_2}\ldots s_{z_\sigma}$$

figurano rispettivamente negli sviluppi di

$$(l^\lambda)_{p_l}\ ,\ (m^\mu)_{p_m}\ ,\ \dots\ ,\ (s^\sigma)_{p_s}$$

ove si è messo

$$x_1+x_2+\dots+x_\lambda=p_l\ ,\ y_1+y_2+\dots+y_\mu=p_m\ ,\ \dots\ ,\ z_1+z_2+\dots+z_\sigma=p_s\ ;$$

e dove

$$p_l+p_m+\dots+p_s=p\ ,\ \dots \qquad (a)$$

$$\lambda+\mu+\dots+\sigma=\alpha\ \dots\dots \qquad (b)$$

Si prova facilmente che

$$\mathrm{C}=\frac{|\underline{\alpha}}{|\underline{\lambda}\ |\underline{\mu}\dots|\underline{\sigma}}\,\mathrm{C}_\lambda\mathrm{C}_\mu\dots\mathrm{C}_\sigma\ .$$

Dunque

$$(a^\alpha)_p=\sum\frac{|\underline{\alpha}}{|\underline{\lambda}\ |\underline{\mu}\dots|\underline{\sigma}}\,(l^\lambda)_{p_l}(m^\mu)_{p_m}\dots(s^\sigma)_{p_s}$$

ove il sommatorio è esteso a tutte le soluzioni per numeri interi non negativi delle (a), (b) od anche

$$(a^\alpha)_p=\sum\frac{|\underline{\alpha}}{|\underline{\lambda}\ |\underline{\mu}\dots|\underline{\sigma}}\,(l^\lambda m^\mu\dots s^\sigma)_p\ ,\ \dots\dots \qquad (13')$$

ove il sommatorio è esteso a tutte le soluzioni per numeri interi non negativi della (b).

Nella (13') consiste la generalizzazione che avevamo in vista.

13. Infine, chiudiamo queste nozioni fondamentali sull'algoritmo isobarico col seguente teorema.

Il numero di termini distinti (cioè diversi per la parte letterale) di $(a^\alpha)_p$ (nei quali gli indici sono 1, 2, 3...), è quanto il numero di soluzioni per numeri interi positivi o nulli dell'equazione

$$(j+1)\alpha-p=ji_1+(j-1)i_2+\dots+2i_{j-1}+i_j$$

ove le i e la j sono inoltre assoggettate alle condizioni

$$0<j\leqq p-\alpha+1\ \ ;\ \ \alpha-(i_1+i_2+\dots+i_j)>0\ .$$

* * *

14. Passiamo ora all'argomento della risoluzione di una serie ricorrente.

Il termine generale σ_{p+n} della serie soddisfacente al sistema

$$\sigma_m+a_1\sigma_{m-1}+a_2\sigma_{m-2}+\dots+a_{m-1}\sigma_1+b_m=0 \quad \text{per } m=1,2,3\dots\ ; \qquad (14)$$

può essere espresso nella forma

$$\sigma_{p+n}=u_{p+1}(1)\sigma_{n-1}+u_{p+2}(2)\sigma_{n-2}+\dots+u_{p+n-1}(n-1)\sigma_1+w_{p+n}(n)\ ; \qquad (\mathrm{I})$$

ove si è messo, per qualunque valore di q e di i

$$u_q = (a^0)_q - (a)_q + (a^2)_q - (a^3)_q + \cdots + (-1)^q (a^q)_q \; ; \tag{15}$$

$$u_q(i) = -[a_i u_{q-i} + a_{i-1} u_{q-i+1} + \cdots + a_q u_0] \; ; \tag{16}$$

$$w_q(i) = -[b_i u_{q-i} + b_{i-1} u_{q-i+1} + \cdots + b_q u_0] \; . \tag{17}$$

La formola I non presenta novità e, d'altronde, essa può dimostrarsi nel seguente modo.

Dalla (15), guardando la (5), risulta

$$u_q + a_1 u_{q-1} + a_2 u_{q-2} + \cdots + a_{q-1} u_1 + a_q u_0 = 0 \; ; \tag{18}$$

facendo quindi nella (14) successivamente $m = n, n+1, \ldots, n+p$ e sommate in colonna le equazioni che si ottengono, dopo averle moltiplicate rispettivamente per $u_p, u_{p-1}, \ldots u_1, u_0$, ed utilizzando la (18) viene la I.

Si noti che $u_q(1) = u_q$ è uguale a σ_q per $b_m = a_m$ qualunque sia m; ed in tal caso le σ costituiscono la serie fondamentale assunta dal **Trudi**.

Si noti pure essere

$$u_q(i+1) = u_q(i) - a_i u_{q-i}(1) \quad ; \quad u_i(i) = -a_i \quad ; \quad u_0 = 1 \; .$$

15. Le espressioni di $u_{p+i}(i)$, $w_{p+i}(i)$ fornite dalle (16) e (17) mentre risolvono mercè la I, nella maniera più completa, il problema della ricerca del termine generale σ_q, sono però alquanto complicate, e noi, utilizzando le nozioni precedenti, le metteremo sotto altre forme che crediamo più vantaggiose.

A tale oggetto, messo per qualunque valore di r e di q

$$\eta_{r,q} = \begin{cases} 1 & \text{per } r \leq q \\ 0 & \text{per } r > q \end{cases} \quad ; \quad b_{r,q} = \begin{cases} b_r & \text{per } r \leq q \\ 0 & \text{per } r > q \end{cases} \tag{19}$$

viene

$$u_q(i) = -(a\eta_i)_q + (a^2\eta_i)_q - (a^3\eta_i)_q + \cdots + (-1)^q (a^q \eta_i)_q \; ; \tag{II}$$

$$w_q(i) = -(b_i)_q + (ab_i)_q - (a^2 b_i)_q + \cdots + (-1)^q (a^{q-1} b_i)_q \; ; \tag{III}$$

dove η_i funziona nella (II) allo stesso modo che A nella (10).

Di fatti dalle (16) e (17) guardando le (19) risulta

$$u_q(i) = -\sum_{h=1}^{h=q} \eta_{i,h} a_h u_{q-h} \quad ; \quad w_q(i) = -\sum_{h=1}^{h=q} b_{ih} u_{q-h}$$

e quindi, sostituendovi alle u i loro sviluppi dati dalla (15) ed utilizzando per le $u_q(i)$ la (10), e per la $w_q(i)$ la (5) risultano la (II) e la (III).

16. La espressione di $w_q(i)$ data dalla III può anche ridursi e divenire più conforme alla II quando sia possibile ottenere dei valori finiti per

$$\mu_m = \frac{b_m}{a_m} \; . \tag{20}$$

In fatti, messo per qualunque valore di r e di q

$$\mu_{r,q} = \begin{cases} \mu_r & \text{per } r \leq q \\ 0 & \text{per } r > q \end{cases} \tag{21}$$

la III mercè la (10) potrà scriversi

$$w_q(i) = -(a\mu_i)_q + (a^2\mu_i)_q - \cdots + (-1)^q(a^q\mu_i)_q \; ; \tag{III'}$$

ove si ricorda che la η_i funziona come la A nella (10).

È quasi superfluo il notare che la $u_q(i)$ può ottenersi dalla u_q operando su un termine qualunque di questa col moltiplicarlo pel rapporto del numero dei fattori (uguali o disuguali) che figurano in esso termine con un indice non inferione ad i, al numero totale di essi fattori. Come pure, con un'operazione analoga, si può ottenere la $w_q(i)$.

Vogliamo ora notare due forme particolari interessanti della I. Fatto in essa $n=1$, $p=q-1$ e guardando le (19) e la II risulta $\sigma_q = w_q(1)$ e quindi per la III e III' viene

$$\sigma_q = -(b)_q + (ab)_q - (a^2b)_q + \cdots + (-1)^q(a^{q-1}b)_q \; ; \tag{I'}$$

$$\sigma_q = -(a\mu)_q + (a^2\mu)_q - (a^3\mu)_q + \cdots + (-1)^q(a^q\mu)_q \; ; \tag{I''}$$

17. Prima di proseguire vogliamo, facendo qualche applicazione, esporre taluni teoremi che non ci sembrano privi d'interesse.

a) Si metta, per qualunque valore di $q \geq p-2$,

$$\sigma_q = C^q_{p-2} + C^q_{\overline{2p-2}} + C^q_{\overline{3p-2}} + \cdots \quad ; \quad \text{ove} \quad C^q_s = \binom{q}{s} .$$

Da un teorema generale *) si deduce che le σ soddisfano al sistema di congruenze

$$\sigma_m + a_1\sigma_{m-1} + a_2\sigma_{m-2} + \cdots + a_{m-1}\sigma + \mu_m a_m \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, p)$$

ove $p =$ numero primo > 3

$$a_q = \begin{cases} 1 & \text{per } q = p-2 \\ 2 & \text{per } q = p-1 \\ -2 & \text{per } q = p \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases} \quad ; \quad \mu_q = \begin{cases} 1 & \text{per } q = p-2 \\ \frac{1}{2} & \text{per } q = p-1 \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases}$$

quindi applicando la (II'') si deduce una espressione del resto di σ_q (mod. p) donde « *qualunque sia il numero primo* $p > 3$ *si ha*

$$C^q_{p-2} + C^q_{\overline{2p-2}} + C^q_{\overline{3p-2}} + \cdots \equiv \sum (-1)^y \frac{\lfloor 2x+y}{x+y+z} \cdot \frac{\lfloor x+y+z}{\lfloor x \lfloor y \lfloor z} 2^{y+z-1} \, , \qquad (\text{mod}\, p)$$

---

*) Vedi *Giornale di Battaglini*, Vol. XXXIV. *Sui numeri e polinomii di Bernoulli.* [Formola (15)].

il sommatorio essendo esteso a qualunque soluzione per numeri interi non negativi, della equazione

$$(p-2)x+(p-1)y+pz=q \text{ ».}$$

A proposito di questo teorema notiamo che nel caso particolare di $p=5$ partendo dalla formola ora stabilita si può dimostrare, dopo diverse trasformazioni, che

I resti di

$$H_3^q = C_3^q + C_6^q + C_9^q + \ldots\ldots$$

rispetto al modulo 5, *al variare di* q *si succedono periodicamente ed il periodo è* 12 *).

Direttamente si trova che i resti ai H_3^q corrispondenti a $q=0,1,2,\ldots 11$ sono rispettivamente

$$0,0,0,1,-1,0,1.2,-1,-1,0,2$$

quindi si avrà

$$H_3^q \equiv -1+(-1)^{q+1}.2^{4-R\frac{q+1}{4}} - \varepsilon\frac{q}{3}\cdot(-1)^{\frac{q}{3}} + 2\varepsilon\frac{q-1}{3}(-1)^{\frac{q-1}{3}} - 2\varepsilon\frac{q-2}{3}\cdot(-1)^{\frac{q-2}{3}} \quad (\text{mod. } 5)$$

ove, per x ed y interi,

$$\varepsilon\frac{x}{y} = \begin{cases} 1 & \text{per } x \text{ nullo o divisibile per } y \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases};$$

ed $R\frac{x}{y}$ è il minimo resto positivo di x rispetto al modulo y.

b) Se nella (14) si suppone

$$a_q = 1 \quad , \quad \mu_q = -q^2$$

per qualunque valore di q, è visibile che risulta

$$\sigma_q = 2q-1 \; .$$

D'altra parte, applicando la 1'' si ha un'espressione diversa di σ_q e quindi eguagliando i due valori moltiplicati per $-q$ risulta la proposizione « *Se il coefficiente numerico di un termine di* s_q (somma delle potenze q.^{me} delle radici di un'equazione algebrica completa di grado qualunque) *sviluppata secondo la formola di* W a r i n g, *si moltiplichi per la somma dei quadrati degli indici che compariscono nella parte letterale*

---

*) Questo teorema, con la consecutiva espressione del resto, lo abbiamo rilevato anche perchè potrebbe servire di aiuto nell'indirizzare a completare il seguente teorema generale che ci sembra nuovo « Se i numeri razionali $\ldots\sigma_{-2},\sigma_{-1},\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\ldots$ sono i termini successivi di una serie ricorrente propriamente detta estesa nei due sensi, esiste un numero m tale che si ha, relativamente ad uno stesso modulo qualunque p,

$$\sigma_{m+q} \equiv \sigma_q \qquad (\text{mod } p)$$

qualunque sia q ».

(Ben inteso che se una σ è una frazione $\frac{a}{b}$, con a,b interi, si metterà $\frac{a}{b} \equiv ab'$ mod$p$ ove b' è un intero soddisfacente alla congruenza $bb' \equiv 1$ (mod$p$).

di esso termine, e si fa la somma dei prodotti estesa a tutti i termini di s_q, *tale somma è eguale a* $-q(2q-1)$ », od ancora,

$$1-2q=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q}\frac{(-1)^\alpha}{\alpha}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_\alpha^2)$$

il sommatorio essendo esteso a tutte le soluzioni, per valori interi e positivi, dell'equazione

$$x_1+x_2+\cdots+x_q=p\ .$$

c) Se nella (14) si suppone

$$a_q=\begin{cases}2 & \text{per } q=1\\ 1 & \text{per } q=2\\ 0 & \text{per } q>2\end{cases}\qquad \mu_q=\begin{cases}1 & \text{per } q=1,2\\ 0 & \text{per } q>2\end{cases}$$

è visibile che risulta

$$\sigma_q=q+1\ ,$$

d'altra parte, osservando che risulta $(\mu a^\alpha)_q=(a^\alpha)_q$, dalla I" si deduce

$$\sigma_q=\sum(-1)^{x+y}\frac{|\underline{x+y}}{|\underline{x}\,|\underline{y}}a_1^x a_2^y=\sum(-1)^y\frac{|\underline{x+y}}{|\underline{x}\,|\underline{y}}2^x\ ;$$

il sommatorio essendo esteso a qualunque soluzione, per numeri interi non negativi dell'equazione

$$x+2y=q\ ;$$

quindi, eguagliando le due espressioni di σ_q si deduce

$$q+1=C_0^q2^q-C_1^{q-1}2^{q-2}+C_2^{q-2}2^{q-4}-C_3^{q-3}2^{q-6}+\cdots\cdots\ ;$$

Se ora si mette in questa formola

$$q=p-i\quad\text{con}\quad 0\leqq i<p\ ,\ p=\text{n.° primo}\ ,$$

notando essere

$$C_m^{p-i}\equiv(-1)^m C_{i-1}^{m+i}\qquad(\text{mod.}\,p)\ ^*)$$

risulta

« *Qualunque sia il numero primo* p, *si ha*

$$2^{p-i}+C_1^{i+1}2^{p-i-2}+C_2^{i+3}2^{p-i-4}+C_3^{i+5}2^{p-i-6}+\ldots\equiv 1-i\quad(\text{mod.}\,p)$$

ove $p>i\geqq 0$, *ed il primo membro è esteso alle sole potenze positive di* 2 ».

*) E. Lucas, *Théorie des nombres*, pag. 20.

Per $i=0$, osservando essere $2^p \equiv 2$ (mod. p), l'ultima formola dà:

$$C_0^1 2^{p-2} + C_1^3 2^{p-4} + C_2^5 2^{p-6} + \dots \equiv -1 \pmod p$$

se $p =$ n.° primo.

Il primo membro di questa congruenza è dunque una funzione trascendente di p il cui minimo resto (che indicheremo con ρ_p) è uguale a -1 sempre che p è numero primo. Ha luogo la reciproca, cioè ogni volta che ρ_p è uguale a -1, p è primo? *) Noi abbiamo verificato, calcolando direttamente i valori ρ_p per tutti i valori dispari di p da 1 a 25, che per tali valori di p la reciproca ha luogo ».

Ecco pertanto i valori di ρ_p nei limiti su indicati, notando che sono segnati in una stessa colonna i valori corrispondenti di p e ρ_p.

$p=$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
$\rho_p=$	-1	-1	-1	5	-1	-1	1	-1	-1	-4	-1	9

18. Le formole I' ed II'' possono servire utilmente, anche nel caso di una serie ricorrente propriamente detta di cui sieno assegnati i valori iniziali, calcolandosi in precedenza i valori delle b o delle μ corrispondenti. Ma in tal caso speciale conviene di ricorrere alla I la cui espressione di $w_{p+n}(n)$ si semplifica notevolmente.

Facendo in fatti nella espressione di $w_{p+n}(n)$ data dalla III', $\mu_n = \sigma_0$, $\mu_m = a_m = 0$ per $m > n$ (n essendo l'ordine della serie), risulta

$$w_{p+n}(n) = \sigma_0 u_{p+n}(n) \;;$$

dunque

« *Se le σ soddisfano all'equazione ricorrente* (simbolica)

$$\sigma^p(\sigma^n + a_1\sigma^{n-1} + a_2\sigma^{n-2} + \dots + a_n\sigma^0) = 0$$

si ha

$$\sigma_{n+p} = u_{p+1}(1)\sigma_{n-1} + u_{p+2}(2)\sigma_{n-2} + \dots + u_{p+n}(n)\sigma_0 \;; \qquad \text{(IV)} »$$

19. Presentiamo un'applicazione della IV.

a) Indicando con q_i e ρ_i il quoziente ed il resto della divisione di x^i pel polinomio

$$f = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \,,$$

risulta

$$x^i = f q_i + \rho_i$$

e quindi, facendo in questa formola successivamente $i = p, p+1, \dots, p+n$, ed addizionando (membro a membro) i risultati, dopo averli moltiplicati rispettivamente per $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_1$, viene

$$x^p f = f(q_{n+p} + a_1 q_{n+p-1} + \dots + a_n q_p) + (\rho_{n+p} + a_1\rho_{n+p-1} + \dots + a_n\rho_p) = 0$$

---

*) Tale questione noi la ponemmo nell'*Intermédiaire des mathématiciens* (1896, pag. 37) e finora non si è avuta, nè è stata annunziata, alcuna risposta.

donde si deduce l'identità

$$\rho_{n+p}+a_1\rho_{n+p-1}+a_2\rho_{n+p-2}+\ldots+a_n\rho_p=0$$

dunque i resti ρ costituiscono una serie ricorrente d'ordine n e, poichè, d'altra parte, per $i<n$ si ha $\rho_i=x^i$, così per la IV risulta.

« *Il resto della divisione di* x^q *per*

$$f=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

è

$$\rho_q=u_q(n)+xu_{q-1}(n-1)+x^2u_{q-2}(n-2)+\ldots+x^{n-1}u_{q-n-1}(1)\ ; \qquad (\alpha) \text{ »}$$

b) Dalla (α) trarremo due conseguenze. Indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ le radici di $f=0$ supposte tutte disuguali, e notiamo che risulta $\rho_q(\alpha_i)=\alpha_i^q$, dunque, facendo nella (α), $x=\alpha_i$ viene

$$\alpha_i^q=u_q(n)+\alpha_i u_{q-1}(n-1)+\alpha_i^2 u_{q-2}(n-2)+\ldots+\alpha_i^{n-1}u_{q-n-1}(1)\ ; \qquad (\beta)$$

e facendo $i=1,2,3,\ldots n$ nella (β), e risolvendo il sistema che ne risulta rispetto ad $u_{p+i}(i)$ (ove $p=q-n$), si deduce la verità del teorema seguente:

« Se nel determinante di Vandermonde

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

formato dalle n radici dell'equazione

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$$

si sostituisce alla linea di esponente $n-i$, *una linea di esponente* $n+p$ ($p\geq 0$), *esso determinante viene ad essere moltiplicato per*

$$u_{p+i}(i)=-(a\eta_i)_{p+i}+(a^2\eta_i)_{p+i}-(a^3\eta_i)_{p+i}+\ldots \text{ »}$$

In particolare, supponendo $p=0$ viene $u_i(i)=-a_i$ e si cade su un teorema noto *).

c) Ecco un'altra conseguenza della (β).

---

*) Vedi Brioschi, *Teoria dei determinanti*, ove è riportato il caso particolare di $p=0$.

Notato essere

$$u_q(i+1) = u_q(i) - a_i u_{q-i}(1) \quad , \quad u_q(1) = u_q$$

con la successiva applicazione di quest'ultima formola risulta

$$\begin{vmatrix} u_p(n) & u_{p-1}(n-1) \dots u_{p-n+1} \\ u_q(n) & u_{q-1}(n-1) \dots u_{q-n+1} \\ \dots & \dots \\ u_t(n) & u_{t-1}(n-1) \dots u_{t-n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_p & u_{p-1} \dots u_{p-n+1} \\ u_q & u_{q-1} \dots u_{q-n+1} \\ \dots & \dots \\ u_t & u_{t-1} \dots u_{t-n+1} \end{vmatrix} .$$

Moltiplicando ambo i membri di questa equazione per Δ eseguendo il prodotto a primo membro opportunamente con la regola della moltiplicazione dei determinanti in maniera da applicare quindi la (β), risulta la nota formola

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^p & \alpha_2^p \dots \alpha_n^p \\ \alpha_1^q & \alpha_2^q \dots \alpha_n^q \\ \dots & \dots \\ \alpha_1^t & \alpha_2^t \dots \alpha_n^t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^0 & \alpha_2^0 \dots \alpha_n^0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} \dots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} u_p & u_{p-1} \dots u_{p-n+1} \\ u_q & u_{q-1} \dots u_{q-n+1} \\ \dots & \dots \\ u_t & u_{t-1} \dots u_{t-n+1} \end{vmatrix} . \quad *)$$

Si noti che questa formola sussiste anche quando si dà, in generale, ad

$$\alpha_r^0 \quad , \quad \alpha_r^1 \quad , \quad \alpha_r^2 \dots$$

il significato di termini di una stessa serie ricorrente soddisfacente alla scala

$$\sigma^p(\sigma^n + a_1\sigma^{n-1} + \dots + a_n\sigma^0) = 0 \ ;$$

e corrispondente ad un sistema di valori iniziali contraddistinti dall'indice r: la dimostrazione si condurrà allo stesso modo giovandosi però della IV in vece che della (β).

* * *

20. Il sistema (14) per $b_m = a_m$ è, evidentemente, un caso particolare del seguente

$$m\sigma_m = (mh+k)a_1\sigma_{m-1} + (mh+2k)a_2\sigma_{m-2} + (mh+3k)a_3\sigma_{m-3} + \dots +$$
$$+ (mh+mk)a_m = 0 \ , \quad \text{per} \quad m = 1,2,3 \dots \ ; \qquad (14')$$

che ci proponiamo ora di risolvere sia rispetto alle σ che rispetto alle a.

---

*) Vedi N. Trudi, *Giornale di Battaglini*, Vol. VIII. *Sulle funzioni Aleph.*
» Leopoldo Crocchi, *id.* *id.* Vol. XVII (Vi è un'estensione del teor. citato).
» G. Salmon, *Leçons d'Algèbre Supérieure*, pag. 414 a 485.

Indichiamo con φ_g una funzione di g che poi determineremo convenientemente. Dalla (10) abbiamo

$$\sum_{g=0}^{g=p-1} \varphi_g(\mathrm{A}a \, . \, a^g)_p = \sum_{g=0}^{g=p-1} \varphi_g(\mathrm{A}a^{g+1})_p \, .$$

Ora il 1.° membro sviluppato diventa

$$\mathrm{A}_1 a_1 \sum \varphi_g(a^g)_{p-1} + \mathrm{A}_2 a_2 \sum \varphi_g(a^g)_{p-2} + \ldots + \mathrm{A}_p a_p \sum \varphi_g(a^g)_0$$

(ove i sommatorii sono estesi da $g=0$ a $g=p-1\,, p-2\,, \ldots$) mentre il 2.° membro si può scrivere nella forma

$$\sum_{g=1}^{g=p} \varphi_{g-1}(\mathrm{A}a^g)_p \, .$$

Intanto, se si pone

$$\mathrm{A}_i = hp + ki \qquad (\text{per } i = 1, 2, \ldots)$$

risulta prima

$$(\mathrm{A}a^g)_p = \frac{hg+k}{g} \, p(a^g)_p$$

e quindi (ponendo anche $\varphi_{-1}=0\,, \varphi_0 = 1$)

$$\sum_{g=1}^{g=p} \varphi_{g-1}(\mathrm{A}a^g) = \sum_{g=0}^{g=p} \varphi_{g-1}(\mathrm{A}a^g) = p \sum_{g=0}^{g=p} \frac{1}{g} \varphi_{g-1}(hg+k)(a^g)_p \, ;$$

e l'ultimo membro assume la forma

$$p \sum_{g=0}^{g=p} \varphi_g(a^g)_p$$

determinando φ_g in modo che sia

$$\varphi_g = \frac{1}{g} \varphi_{g-1} \, . \, (hg+k)$$

donde

$$\varphi_g = \frac{1}{|\underline{g}} \prod_{x=1}^{x=g} (hx+k) \, .$$

Sostituendo ed eguagliando i due membri e guardando le (14) risulta che la *soluzione del sistema* (14') è data da

$$\sigma_q = \sum_{g=1}^{g=q} \left[\frac{(a^g)_q}{|\underline{g}} \prod_{x=1}^{x=g} (hx+k) \right] ; \ldots \qquad \text{(V)}$$

21. Cerchiamo ora la inversione della formola V. A tale uopo trasformiamo il si-

stema (14') in modo da renderlo simmetrico rispetto alle a ed alle σ: a ciò si perviene mettendo nella (14') e (V)

$$h=s\ ,\ k=r-s\ ;\ ha_i=-b_i\quad\text{per}\quad i=1,2,\ldots.$$

poichè esse si trasformano in

$$ms\sigma_m+(\overline{m-1}s+r)\sigma_{m-1}b_1+(\overline{m-2s+2r})\sigma_{m-2}b_2+\cdots+mrb_m=0\ ;\ m=1,2,\ldots;$$

$$\sigma_q=\sum_{g=1}^{g=q}\left[\left(\frac{-1}{s}\right)^g\frac{(b^g)_q}{|g}\prod_{x=0}^{x=g-1}(sx+r)\right].\qquad\text{(V')}$$

Se ora si ricava dalla V' il valore di b_q con lo scambio di σ con b ed r con s, e si ritorna alle primitive variabili, risulta la formola d'inversione, cioè

$$-ha_q=\sum_{g=1}^{g=p}\left[\left(\frac{-1}{h+k}\right)^g\frac{(\sigma^g)_q}{|g}\prod_{x=0}^{x=g-1}(\overline{h+kx}+h)\right].\qquad\text{(VI)}$$

È evidente che facendo

$$h=0\ ,\ k=1\ ,\ \sigma_i=c_i\ ,\ ia_i=-s_i$$

nelle V e VI queste diventano rispettivamente

$$s_m+c_1s_{m-1}+c_2s_{m-2}+\cdots+mc_m=0$$

$$c_q=\sum\frac{(-1)^g}{|g}(S^g)_q\quad\text{ove}\quad S_i=\frac{s_i}{i}\ ;$$

$$-\frac{1}{q}s_q=-S_q=\sum(-1)^g(c^g)_q\ ;$$

che sono le note formole di **Hidenburg** e di **Waring** di cui, quindi, le V e VI possono considerarsi quali generalizzazione.

22. Paragonando la soluzione V della 14' con la soluzione di D. André, otterremo una identità.

In fatti, essendo dato il sistema

$$\sigma_m=A_{1m}\sigma_{m-1}+A_{2m}\sigma_{m-2}+\cdots+A_{mm}a_m=0\qquad m=1,2,\ldots$$

la soluzione di **André** può essere espressa nella forma

$$\sigma_q=\sum A_{nn}A_{p.n+p}\ldots A_{t\ n+p+\ldots+t}\cdot a_na_p\ldots a_t\ .$$

dove il sommatorio è esteso a tutte le soluzioni per numeri interi non negativi, della equazione

$$n+p+\cdots+t=0$$

che danno luogo però, a permutazioni distinte di $n,p\ldots t$.

Premesso ciò, dal paragone delle due espressioni di σ_q viene l'identità di cui parlavamo cioè

« *Se si indichi con* g *il numero degli elementi, del resto arbitrarii,*

$$n \,.\, p \,.\, q \ldots t$$

e con P *il numero di permutazioni distinte formate da essi elementi, si ha*

$$\frac{P}{g!}\prod_{x=1}^{x=g}(hx+k)=\sum\left(h+k\frac{n}{n}\right)\left(h+k\frac{p}{n+p}\right)\left(h+k\frac{q}{n+p+q}\right)\cdots\left(h+k\frac{t}{n+p+q+\cdots+t}\right);$$

ove h, k *sono arbitrarii, ed il sommatorio a secondo membro è esteso a tutte le permutazioni distinte dei* g *elementi* n, p, q..... t ».

finita di stampare il dì 12 Agosto 1893

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

CONTRIBUTO ALLA BIOLOGIA DELLE FELCI

MEMORIA

del dottor AURELIO DE GASPARIS

presentata nell' adunanza del dì 14 Maggio 1898

Assegnare un fine biologico alle modalità della forma, mettere questa in rapporto col mezzo nel quale ha vissuto o vive la pianta, tali sono i problemi davanti ai quali si trova il botanico moderno. Se per le fanerogame, lo studio biologico offre un campo sì largo di ricerche, non meno ricco è per le crittogame, fra le quali abbondano forme estremamente varie per i caratteri morfologici e per le abitudini.

Per queste ultime, però, i rapporti biologici maggiormente complicati e di più difficili indagini, ne rendono lo studio più arduo ed i risultati meno evidenti.

La biologia delle felci, specialmente in questi ultimi tempi, ha richiamata l'attenzione d'illustri botanici, i quali ànno illustrato in un modo più o meno completo diversi argomenti inerenti a tale studio.

Molte quistioni, però, spettanti alla biologia delle felci, restano tuttora oscure e degne di osservazioni più accurate.

La bibliografia dei lavori pubblicati intorno ad argomenti di tal fatta non è molto estesa, onde brevemente riassumerò ciò che si è fatto.

La parte più completamente svolta riguarda la disseminazione, studiata sotto diversi punti di vista; i lavori del Atkinson [1]), Schrenk [2]), Schrodt [3]), Steinbrinck [4]) ed Higgins [5]) non lasciano molto da fare intorno a questa parte.

Non meno interessanti sono i lavori, i quali trattano degli adattamenti alla siccità

---

[1]) Atkinson G. F., *Comparative study of the structure and function of the sporangia of Ferns in the dispersion of spores.* — Int. Journ. Microsc. C. f. Bot. J. XXI.

Atkinson, *The extent of the annulus and the function of the different parts of the sporangium of Ferns in the dispersion of spores.*

[2]) Schrenk J., *The dehiscence of Fern-sporangia.* — B. Torr. B. C., XIII.

[3]) Schrodt J., *Neue Beiträge zur Mechanik der Farnsporangien.* — Flora, 70, 1887.

» *Die Bewegung der Farnsporangien, von neuen gesichtspunkten ausbetrachtet.*

[4]) Steinbrinck, *Der Oeffnungs und Schleudermeckanismus des Farnsporangiums.* — Ber. der. deut. bot. Gesel., vol. XV.

[5]) Higgins John., *Ejection of Fern spores.* — The Asa Gray Bulletin, vol. 5.

ed argomenti affini. Il Borzì [1]) ed alcuni anni dopo il Wittrock [2]) ànno pubblicati studii assai completi sullo xerotropismo in un gran numero di specie.

L'Arcangeli [3]), il Goebel [4]) ed il Potonié [5]) si sono occupati di rimarchevolissime modalità delle frondi e dei rizomi, inerenti alla funzione collettrice dell'acqua ed alla riserva di questa. Anche il Griesenhagen [6]) ha fatto importanti ricerche biologiche ed istologiche sopra numerose specie di felci igrofile.

Delle relazioni simbiotiche fra le felci e gl'insetti si sono occupati il Darwin [7]), il Delpino [8]), il Figdor [9]), il Ludwig [10]), il Goebel, il Müller nel suo viaggio al Brasile ed il Brischke.

Tutti questi lavori però riguardano casi singoli, tranne il lavoro del Müller, che è d'indole più generale. Le funzioni biologiche di difesa nelle felci ànno anche attirata l'attenzione di alcuni scienziati, fra i quali si può citare il Blasdale [11]), il quale si occupa dei peli secernenti di natura protettiva, lo Stahl [12]) ed altri.

Anche per i rapporti simbiotici fra le felci ed i funghi esistono importanti ricerche, fra le quali vanno citate quelle dell'Atkinson [13]), sulle radici delle ofioglossee, quelle del Grevillius [14]), sulle radici del *Botrychium Virginianum* e del Kühn, sulle radici delle Marattiacee e delle Ofioglossee.

Altri lavori dell'Atkinson [15]), Borbas [16]), Karsten [17]), Sadebeck [18]), El-

[1]) Borzì A., *Xerotropismo nelle Felci.* — N. G. B. I., XXI, 1889.

[2]) Wittrock V. B., *Biologiska ormbrucks Studier.* — Act. Hort. Berg., vol. I.

[3]) Arcangeli G., *Sulla funzione trofilegica delle foglie.* — Bull. della Soc. bot. Ital. N. G. B. I., XXI, 1889.

[4]) Goebel K., *Pflanzenbiogische Schilderungen.* — Marburg, 1889.

[5]) Potonié H., *Ueber die den Wasserspalten physiologisch entsprechenden Organe bei fossilen und recenten Farnen.* — Stzgsb. Ges. Naturf. Freunde. Berlin, 1892, pag. 117-124.

[6]) Griesenhagen K., *Ueber hygrophile Farne.* — Flora, LXXVI, 1892. Ergzgsbd.

[7]) Darwin, *Journ. Linn. Soc.* XV (1876), pag. 398-409.

[8]) Delpino, *Funzione mirmecofila nel regno vegetale.* — Bologna, 1886.

[9]) Figdor W., *Ueber die extranuptialen Nectarien von Pteridium aquilinum.* — Oest. B. Z., vol. XLI.

[10]) Ludwig F., *Myrmecophylie und Insectenfrass beim Adlerfarn. Natur.*—Wochen, vol. VI.
Ludwig F., *Lehrbuch der Biologie der Pflanzen.* — Stuttgart, 1895, pag. 268-249.

[11]) Blasdale W. C., *On certain leaf hair structure.* — Erythea I.

[12]) Stahl E., *Pflanzen und Schnecken.* Fenaische z. f. Naturwiss. u. Medizin.—Vol. XXII, N. F. XV, 126 pag. (In questo lavoro d'indole generale l'A. a proposito delle felci, verrebbe alla conclusione che il tannino difende queste dalle lumache).

[13]) Atkinson G. F., *Symbiosis in the roots of Ophioglosseae.* — P. Ann. Ac. XLII.

[14]) Grevillius, *Ueber Mykorrhizen bei der Gattung Botrychium nebst einigeen Bemerkungen über das Auftreten von Wurzelsprossen bei B. Virginianum Swartz.*

[15]) Atkinson G. F., *The study of the biology of Ferns by the collodion method.*

[16]) Borbas, *Sporophyllie der Mondrante.* — Sitzber K. Ung. Naturw. Ges. zu Budapest in Bot. C. LX.

[17]) Karsten G., *Morphologische und biologische Untersuchungen über einigen Epiphyten Formen.*

Karsten G., *Morphologische und biologische Untersuchungen über einige Epiphytenformen der Molukken.* — Ann. Jard. Bot. Buitenzorg, XII, 2.

[18]) Sadebeck, *Ueber gallenartige Knollen an den Blättern eines afrikanischen Farnes.* — Vers. deutsch. Naturf. und Aertze zu Wien, Bot. C. LX.

Sadebeck, *Ueber die Knollenartigen Adventivbildungen auf der Blattfläche von Phegopteris sparsiflora Hook.*

kins [1]), Sandford [2]), Watson [3]) e del Wiesner [4]) si occupano di ricerche biologiche sopra fatti singoli e sopra metodi generali di ricerche biologiche.

Molte ricerche, come quelle del Sadebeck, non menano a risultati positivi intorno alla natura degli organi da lui studiati, come pure resta finora ignoto il significato dell'odore in alcune specie. Esporrò le mie osservazioni raggruppandole nei singoli capitoli.

FUNZIONE TROFILEGICA

Sulla pagina superiore della fronda delle felci assai frequentemente si osservano solchi lungo la rachide, le nervature secondarie delle pinnule, e spesso anche lungo la nervatura delle foglicine; non di rado il solco della rachide accompagna questa fino alla sua base.

Tali solchi ànno per iscopo di raccogliere o canalizzare l'acqua depositata sulla fronda ed avviarla verso le radici; si potrebbe a tal uopo obbiettare che i solchi potrebbero esser destinati ad avviare l'acqua fuori della superficie della fronda, per impedire il soverchio peso; ma questo dubbio non può aver fondamento dal momento che l'osservazione ci dimostra, che oltre dei solchi, esistono speciali conformazioni, come rilievi, alette, destinate ad impedire che l'acqua esca fuori dai canali nel punto dove le nervature secondarie incontrano la rachide e la presenza di solchi spesso visibilissimi, i quali arrivano fin quasi al punto, dove il picciuolo emerge dal suolo.

L'illustre professore Arcangeli, nel suo lavoro sulla funzione trofilegica delle foglie, dice « Si può senz'altro asserire che la pagina superiore riproduce la configurazione di un bacino idrografico » ed in altro punto « L'acqua infatti delle precipitazioni atmosferiche raccolta sulle foglie, rilava queste e le parti più centrali dal pulviscolo, che le ricopre rendendole meglio adatte a compiere le loro funzioni, ne modera la traspirazione, e venendo guidata lungo i rami ed il suolo nelle parti più prossime alla radice primaria si distribuisce attorno a questa nel modo più conveniente onde servire alla nutrizione della pianta, trasportando pure quei minuti detriti di materia minerale ed organica che raccolse sulla superficie delle parti aeree ». Nelle felci, si può dire che la loro conformazione offre le migliori condizioni alla funzione trofilegica: sistemi di canali, disposizione generalmente obliqua della fronda e disposizione delle frondi in corona; in modo che l'acqua è avviata verso la parte centrale dove la sua presenza è più necessaria.

Nelle specie di felci studiate ho riscontrato speciali conformazioni destinate a rendere più completa la canalizzazione delle acque raccolte, credo, quindi opportuno, descrivere queste forme, le quali concorrono a dimostrare più evidentemente questo fatto.

---

[1]) Elkins D., Robertson, I. Hudson, Darey W., *Skin irritation by Davallia.*— Gard. Chron., IX.

[2]) Sandford E., *Fragrance in Ferns.* — G. Chr., 1890.

[3]) Watson W., *Fragrance in Ferns.* — G. Chr. VII, 1890.

[4]) Wiesner I., *Ueber ombrophile und ombrophobe Pflanzenorgane.* — Sitzber. Akad. Wien C. II.

Asplenium esculentum, Presl.

All' inserzione delle pinnule sulla rachide, alla pagina superiore si notano due espansioni membranose, abbastanza larghe, le quali si ripiegano sulla faccia superiore della stessa; queste espansioni sono destinate ad avviare l'acqua raccolta sulle superficie delle pinnule verso il solco della rachide ed impedire che questa esca e cada fuori.

Cystopteris filix foemina, Berhn.

In questa specie si nota sulla faccia superiore della fronda un sistema di dotti rimarchevolissimo. Un canale centrale decorre lungo la rachide ed è abbastanza largo; Tav. I, fig. 1, i suoi lati sono abbastanza sollevati e rivolti col margine verso l'interno; gli altri decorrono lungo le nervature delle divisioni primarie e mettono capo nel dotto principale. Questa disposizione è d'altra parte comune ad un gran numero di felci; ma ciò che richiama l'attenzione è la leggiera curvatura, allo sbocco dei solchi secondarii, del lato inferiore, e questa disposizione tende sempre a diminuire la resistenza di strofinio del liqui do scorrente e rende sempre più facile la discesa del liquido lungo la rachide.

Un'altra disposizione è da notarsi, l'ineguale sviluppo dei margini nei punti, dove l'acqua potrebbe uscir fuori; il lato maggiormente sviluppato e ripiegato in dentro rende sempre meno facile la caduta di questa fuori dei solchi.

Davallia, sp.

Oltremodo interessante è la disposizione e la forma dei solchi in questa specie; questi sono abbastanza profondi a causa dei bordi laterali assai sollevati; ma ciò che richiama più l'attenzione dell'osservatore è la presenza di due ripiegature nel punto dove sboccano i solchi delle nervature secondarie nel solco della rachide.

La ripiegatura inferiore è larga ed elevata, a bordo rientrante ed assai favorevole, per la sua curvatura, al facile scorrere del liquido.

La superiore è poco adatta per questo scopo, poichè il margine della scanalatura della rachide forma col lato superiore del canale della nervatura secondaria un angolo di circa ottanta gradi; in certi punti il lato superiore si arresta bruscamente in corrispondenza dello sbocco.

È assai evidente in questo caso la disposizione, atta ad avviare il liquido lungo la rachide e verso le radici.

Todea barbara, Moore

In questa specie esiste, specialmente durante lo sviluppo della fronda, una bella disposizione atta alla raccolta dell'acqua.

Le pinnule durante questo periodo sono rivolte (particolarmente il primo ed il secondo paio) obliquamente in sopra, in modo che le foglicine delle due pinnule restano quasi completamente a contatto nella parte inferiore.

Nello spazio compreso fra le foglicine a contatto e la rachide si raccoglie una di-

screta quantità di acqua, la quale specialmente verso l'epoca nella quale la fronda si trova facilmente esposta alle offese di alcuni insetti, può svolgere la sua benefica funzione di protezione.

Nel periodo del carbonifero, quando la ricchissima flora delle felci, raggiunse il suo massimo sviluppo, in un'atmosfera, alta, densa, ricchissima di vapore acqueo, piena di nebbie, questo adattamento alla raccolta dell'acqua ebbe, pare, il suo maggiore svolgimento.

Per cortesia dell'illustre Prof. Bassani, Direttore del Gabinetto di Geologia, ho avuto agio di studiare numerosi fossili vegetali di questo periodo.

Ho potuto notare in moltissime specie di felci fossili, dotti collettori assai rimarchevoli.

Assai notevoli sono i solchi, che si osservano lungo la rachide della fronda e lungo le nervature secondarie delle pinnule nell'*Alethopteris lonchitidis*; essi sono assai profondi e larghi.

Non meno importante si presenta l'*Hemitelites giganteus* per questo studio.

Si osservano, in questa specie lungo la rachide una lunghissima doccia e solchi profondi lungo le nervature secondarie; le due parti della lamina ai lati della nervatura principale nelle foglicine si presentano superiormente fortemente convessi, altra condizione, la quale facilità lo sgorgo del liquido verso il sistema collettore.

Nell'*Alethopteris Grandini* i solchi sono abbastanza profondi da raggiungere circa due millimetri; nell'*Alet. Mantellii* e nell'*Alet. Serli* sono anche rimarchevoli. Nella *Woodwardites obtusilobus* ricordano i solchi di alcune *Pteris*. Non meno interessanti sono quelli che si osservano nelle: *Neuropteris attenuata*, *flexuosa*, *heterophylla*, nella *Pecopteris dentata* e *muricata*, nella *Sphenopteris trifoliata* e *divaricata* e nella *Dicksonia Saportana*. Ho ragione di credere che tali disposizioni, più che a favorire la raccolta dell'acqua di pioggia, siano state oltremodo adatte a raccogliere le precipitazioni della rugiada come si può anche attualmente sperimentare sulle felci, le quali presentano condizioni ugualmente propizie. Adoperando un nebulizzatore o facendo cadere l'acqua sotto forma di pioggia, sulle frondi si ottengono risultati differenti: nel primo caso l'acqua scorre lungo i solchi e nel secondo cade quasi sempre sul terreno.

DISSEMINAZIONE

Diversi autori si sono occupati dei varii modi onde gli sporangi si aprono e della meccanica dello scatto delle spore. Lo Schrodt, lo Steinbrinck, l'Higgins, l'Atkinson ànno fatto lavori assai pregevoli sopra tal riguardo, onde credo inopportuno passare in rassegna gli svariati modi di disseminazione delle felci e preferisco intrattenermi sulle osservazioni da me compiute a tal riguardo sulle poche specie di cui ho potuto disporre.

Platycerium alcicorne, Desv.

L'apertura degli sporangi è abbastanza lenta e qualche volta il movimento di svolgimento dell'anello si arresta dopo la laceratura del sacco, compiendosi in un tempo postumo.

Il sacco è provvisto di pareti sottilissime e dopo la rottura di queste, le spore sono spinte a breve distanza.

La faccia inferiore della fronda nella parte ricoperta dagli sporangi si presenta fittamente ricoperta di grossi peli stellati, Tav. I, fig. 3.

Questi sono formati da molte cellule ellittiche acuminate, laminari, disposte in ordine stellato sopra diversi piani; una cellula della stessa forma costituisce il pedicello del pelo.

Questi peli, per la loro speciale struttura e per la leggerezza, sono ottimi veicoli di galleggiamento aereo ed a questo fatto contribuisce la forma laminare delle cellule, la loro disposizione in piani più o meno obliqui all'asse ed il facile distacco della cellula che li attacca all'epidermide, che in corrispondenza di questa è fortemente assottigliata.

Le spore, la cui superficie è alquanto attaccaticcia, aderiscono alle cellule dei peli, i quali circondano letteralmente gli sporangi; la speciale disposizione delle cellule del pelo è tale che il maggior numero delle spore resta così impigliato.

Poco dopo la deiscenza degli sporangi i peli si staccano e sono trasportati dal vento, rappresentando così importanti apparecchi di disseminazione.

Gymnogramme aspidioides? Hook.

Sugli sporangi si osserva un pelo glanduloso, il quale ha un certo interesse sotto il punto di vista della disseminazione.

Questo pelo ha origine per proliferazione di una cellula collocata a lato delle due grandi cellule terminali, verso i primi stadii dello sviluppo dello sporangio; in seguito si allunga e diventa clavato; acquista il suo massimo sviluppo poco tempo prima che lo sporangio raggiunga la perfetta maturità; in questo periodo si strozza la parte mediana e la parte clavata si trasforma completamente in sostanza glutinosa, Tav. I, fig. 6.

L'ufficio di questo pelo, pare che sia quello di rendere attaccaticcia la parte superiore dello sporangio e rendere così possibile il trasporto di questo in altri luoghi, per mezzo degli animali.

Meniscium sp. [1]).

Gli sporangi di questa felce radunati in numerosissimi sori bislunghi e brevi, paralleli al nervo medio della foglia, indivisa, scolopendriode, offrono una particolarità ben insigne, Tav. I, fig. 4.

Lo sporangio è armato di numerosi e rigidi uncini.

Ora se ogni pelo od altro organo uncinato ha per funzione di affiggere determinati corpuscoli ad esseri semoventi (quadrupedi, uccelli e simili), si può congetturare che presso questa specie la disseminazione avvenga per lo appiccicarsi degli sporangi ai peli di un qualche animale; è da presumersi che la deiscenza degli sporangi avvenga qualche tempo dopo della completa maturità, ed il distacco del pedicello dello sporangio sia favorito da condizioni speciali di struttura.

---

[1]) W. Hooker, *On a new species of* Meniscium, *from China*, Lond. Journ. of botany, I, pag. 294.

Cheilanthes lendigera, Swartz.

Le foglicine sono alla faccia inferiore assai concave; quando lo sporangio è immaturo è quasi completamente nascosto sotto una parte del margine completamente piegata; non appena si avvicina il momento nel quale lo sporangio si deve aprire, esso comincia lentamente a sollevarsi a misura che l'anello si svolge; quando l'anello è completamente svolto il sacco è ancora integro; incomincia allora un'inflessione nel senso contrario e lo sporangio rota, quindi, in sopra ed in fuori del margine piegato; quando questa rotazione è completa, lo sporangio scatta, come una catapulta, e va a cadere ad una certa distanza, Tav. I, fig. 5.

Contemporaneamente il sacco si fende e le spore cadono a grande distanza, prima che lo sporangio cada sul terreno.

La forma particolare, concava, delle foglicine rende possibile questo speciale scatto; poichè lo sporangio dallo stato di quiete allo scatto descrive, senza incontrare ostacoli, un angolo di circa 210° ed acquista quindi la tensione necessaria per una lunga spinta e sufficiente per produrre il suo distacco dalla fronda.

Per osservare questo scatto, è necessario adoperare esemplari di recente raccolti e metterli in condizioni opportune; poichè se si cerca per mezzo di un ago di spingere lo sporangio maturo fuori della concavità della foglicina, questo scoppia senza che l'anello si svolga e le spore in questo caso restano nella foglicina. Mi è riuscito di osservare varie volte questo scatto piazzando la faccia inferiore della fronda sotto ad un microscopio a larghissimo campo (ingrandimento di 50 diametri) in ambiente leggermente riscaldato.

MIRMECOFILIA

Le relazioni fra le formiche e le piante sono state largamente studiate da molti illustri botanici, il Delpino, il Müller, lo Schumann, il Beccari, lo Schimper ed altri. Le sostanze le quali, più facilmente attirano le formiche sulle piante sono: il glucosio e le sostanze albuminoidi; il primo è segregato da nettarii estranuziali generalmente nappiformi piazzati sulle foglie, le seconde si trovano in speciali corpuscoli (corpuscoli del Belt, corpuscoli del Müller) all'estremità delle foglie. Molte piante presentano condizioni assai opportune per la vita delle formiche ed i mirmecodomazii di cui sono fornite molte specie, ce ne offrono un esempio evidentissimo. Anche le felci ci mostrano esempii di nettarii estranuziali destinati alle formiche.

Sono stati descritti i nettarii estranuziali di alcune felci: *Cyathea arborea*, *Hemithelia obtusa*, *H. horrida*, diverse specie di *Angiopteris*, *Polypodium quercifolium*.

Il Müller ha notato nel Brasile, che le felci, le quali attirano le formiche del genere *Cremogaster*, restano illese contro gli assalti delle formiche tagliatrici di foglie (*Oecodoma*).

La *Pteris aquilina* offre un esempio di mirmecofilia di assai facile osservazione; il Ludwig, il Figdor e precedentemente il Delpino ed il Darwin se ne sono occupati.

La protezione delle formiche nelle felci è specialmente diretta contro gl' insetti allo stato di bruchi.

Ho avuto occasione di studiare nell'Orto botanico di Napoli alcuni esemplari, assai bene sviluppati di *Thamnopteris musaefolia*, Mett. ed il *Diplazium viviparum* ed avendo avuto agio di fare delle osservazioni sul proposito, credo utile esporre i risultati da me ottenuti.

Thamnopteris musaefolia, Mett.

Questa bella varietà della *Tham. nidus* offre uno studio assai interessante per la biologia.

È una pianta formicaria, la quale offre le migliori condizioni per la vita di questi insetti.

Le sue grandi fronde, lunghe circa un metro e sessanta per venticinque centimetri e più di larghezza, dopo che marciscono, cadono e la parte della rachide, la quale resta attaccata al fusto, si svuota completamente, formando una specie di caverna rivolta in basso. I resti della parte inferiore della fronda formano una specie di rivestitura esterna e ne mascherano l'apertura, Tav. II, fig. 1.

Le giovani fronde sono letteralmente coperte da squame e restano circondate dalla corona esterna delle frondi adulte.

Le squame, le quali coprono le frondi in via di sviluppo, presentano una struttura rimarchevole; esse sono formate per lo più di cellule, delle quali alcune presentano le pareti ispessite, altre solamente verso la parte rivolta verso l'interno; ai lati ed alla parte superiore di queste squame si notano cellule grosse elissoidali, le quali si attaccano alla squama mediante due cellule assai più piccole, delle quali la più esterna tinta in giallo; la grossa cellula terminale contiene sostanze albuminoidi, come ho potuto constatare mediante le reazioni microchimiche, Tav. II, fig. 2 e 3.

Le piccole caverne e lo spazio compreso fra le squame sono abitate da un grande numero di formiche.

La vigilanza esercitata dalle formiche fra le squame, le quali proteggono le giovani frondi, è rimarchevolissima; esse restano continuamente nascoste fra queste ed al minimo movimento o al minimo indizio della presenza di qualche intruso, escono tutte fuori, percorrendo la superficie delle squame in tutti i sensi, finchè non abbiano trovata la causa; non appena osservano qualche insetto o qualche altro animale si lanciano con grande furia e ripetutamente lo mordono, accostando di tratto in tratto alla vittima la parte posteriore dell'addome provvista della glandula contenente l'acido formico.

Ho piazzato diversi animali sulle squame per vedere contro quali di essi maggiormente fosse rivolta la benefica difesa delle formiche.

Ho potuto constatare che la difesa è rivolta contro i bruchi; i molluschi terrestri (*Limax*, *Helix*, etc.) restano illesi essendo naturalmente difesi dalla sostanza mucosa, che ricopre la superficie del corpo e che ad ogni tentativo, che fanno le formiche per mordere, invischia le antenne e le mandibole; ciò non pertanto si allontanano con sufficiente rapidità dalle squame; forse a causa dell'acido formico delle formiche.

Gli artropodi, a dermascheletro poco resistente, sono rapidamente uccisi e trasportati fuori della corona delle frondi adulte.

Le formiche abitatrici non si allontanano quasi mai dalle squame per andare altrove per la ricerca del cibo e quando loro capita l'occasione di trovare qualche insetto lo mordono più per lo scopo di ucciderlo, che di cibarsene.

I corpuscoli di sostanza albuminoide che si trovano sulle squame debbono servire di nutrimento alle formiche.

I corpuscoli, i quali si osservano nelle squame della *Thamnopteris nidus* sono assai meno sviluppati e di forma cilindrica, almeno negli esemplari da noi posseduti, Tav. II, fig. 5.

Diplazium viviparum, Presl.

Sono rimarchevolissime le squame le quali circondano le gemme; queste sono linguettate e formate da cellule a pareti ispessite e colorate in giallo bruno; le cellule esterne e laterali delle squame presentano ispessita la sola parete interna.

All'estremità della squama e lateralmente si trovano cellule di forma elissoidale, le quali restano attaccate alla squama, mediante cellule spesso parzialmente o totalmente colorate in giallo. Qualche volta queste cellule si attaccano direttamente alla squama, Tav. II, fig. 7 e 8.

La struttura di questa squama è perfettamente identica a quella della *Thamnopteris musaefolia* ed a quella di molte squame ritenute formicarie nelle felci. Evidentemente queste squame debbono attirare le formiche per preservare le gemme da altri animali nocivi. Ho osservato delle formiche in vicinanza di queste squame, non ho potuto però stabilire che le formiche si cibassero delle cellule terminali e laterali delle squame.

ACAROFILIA

Per ciò che riguarda i rapporti fra gli acari e le felci non si notano nelle riviste bibliografiche lavori di sorta.

Nelle felci da me studiate ho potuto rilevare manifesti adattamenti a tali rapporti, trasformazioni di altri apparecchi in organi acarofili, cespuglietti di peli, di squame e cavernicole.

Il numero delle specie, da me a tal riguardo studiate, è assai limitato poichè la collezione di felci da noi posseduta non è molto ricca. Descriverò man mano le diverse specie osservate.

Pteris flabellata, Thunb.

Questa specie tramanda in alcune epoche dell'anno un odore quasi resinoso piuttosto spiacevole.

Nei punti d'inserzione delle divisioni primarie della fronda si osservano macchie di un colore piceo; in corrispondenza di queste macchie si notano piccoli cespugli di peli pluricellulari, spesso ramosi, le cui cellule terminali sono a contenuto glutinoso e spesso clavate.

Gli acari pare che siano attirati verso questi peli ed assai spesso vi lasciano sospese le loro uova. Lungo le nervature delle pinne e della rachide si osservano lunghi e profondi solchi, Tav. I, fig. 18, i quali in certi punti per il ravvicinamento completo dei margini sono trasformati in veri cunicoli; i loro margini si sollevano abbastanza e presentano alternativamente lunghi ed acuminati peli, i quali decorrono obliqui e rivolti verso la parte esterna; anche le nervature delle foglicine presentano solchi simili ed anzi più frequentemente chiusi nella parte superiore.

Questi solchi costituiscono ottimi ricoveri per gli acari, i quali vi abbondano in modo notevolissimo; il fondo ed i lati dei solchi, specialmente nei punti quasi letteralmente chiusi, lasciano osservare un gran numero di uova, di spoglie e sostanze escrementizie. L'acaro abitatore dei cunicoli è una specie frequentemente notata nelle cavernicole di diverse dicotiledonee.

Ho potuto notare in diversi esemplari un graduale passaggio da solchi collettori di rugiada a questi organi acarofili; in modo che mi sono convinto che tali organi rappresentino un adattamento assai spiccato, destinato a stabilire un rapporto stabile fra la pianta e gli acari. La parte interna dei solchi lascia osservare numerosi peli glandulosi.

Pteris tremula, R. Br.

I solchi acarofili, Tav. I, fig. 17, che si notano sulla pagina superiore della fronda di questa specie, non sono molto dissimili per forma da quelli osservati nella specie precedente. Essi decorrono lungo le nervature delle divisioni primarie della fronda e sono formati da due sollevamenti longitudinali, i quali spesso si riuniscono col margine superiore in modo da formare un canale, questi solchi sono appena visibili nelle foglicine.

La parte superiore dei margini è meno arrotondata di quelli della *Pteris flabellata*; la parte interna del canale non mostra peli glandulosi.

I margini sono protetti da emergenze cuneate, decorrenti nel senso della rachide e formate da cellule allungate. Dette emergenze sono alternanti sui margini del canale.

L'acaro abitatore (*Tydeus foliorum*) è la specie, che più facilmente si osserva nelle cavernicole.

Anche in questo è evidente l'adattamento di solchi collettori di rugiada ad organi acarofili.

Questi solchi non raggiungono lo stesso grado di sviluppo sopra tutte le fronde.

Gymnogramme chaerophylla, Desv.

Lungo la rachide della fronda si nota una doccia, formata da un sollevamento dei bordi esterni. Il margine di questi sollevamenti si piega verso la linea mediana della rachide; in modo che vengono limitati due solchi completamente ricoperti dai margini, i quali costituiscono un ottimo ricovero per gli acari, i quali vi abbondano, specialmente nei punti dove si dipartono le pinnule dalla rachide, dove il margine si ripiega assai più.

Balantium antarcticum, Labill.

Osservando le frondi di questa specie si nota, che alcune foglicine delle divisioni terziarie, sono alquanto modificate.

La modificazione consiste in una accentuata concavità e nello sviluppo assai frequente di peli.

Questa modificazione si nota generalmente nelle prime foglicine delle pinnule, vale a dire in quelle, che restano quasi a contatto colle nervature secondarie della fronda.

La concavità la quale è rivolta verso il basso, resta quasi letteralmente riempita da una specie di acaro che solo casualmente ho incontrato sopra altre piante, Tav. I, fig. 11.

Questa specie, di un colorito bruno marrone, con addome sferico ed assai tumido è l'*Oppia tibialis*, Tav. I, fig. 12.

Il punto della foglicina dove restano più frequentemente attaccati è lo spazio compreso fra la nervatura della pinnula e la nervatura secondaria della fronda, ed è in questa parte che assai spesso si nota uno sviluppo rimarchevole di peli.

Alsophila australis, Endl.

All'estremità delle divisioni secondarie, nell'angolo formato fra la nervatura principale e le nervature delle foglicine, si notano foveole assai rimarchevoli, anche visibili sotto forma di piccoli sollevamenti alla pagina inferiore, Tav. I, fig. 15.

In queste fossette si notano numerosi acari.

Pteris argyraea, More.

Sulla faccia superiore della fronda lungo la nervatura delle divisioni primarie si nota un solco, le cui pareti sono abbastanza elevate sulla superficie, Tav. I, fig. 7.

I margini sono protetti da emergenze falcate e da peli pluricellulari a punta acuminata; i peli e le emergenze sono rivolti verso la parte esterna. Sono abitati dal *Tydeus foliorum.*

Gleichenia dichotoma, Willd.

All'ascella delle grandi divisioni della fronda si trovano sviluppatissimi cespuglietti di squame allungate, costituite da cellule molto lunghe. Le cellule laterali e terminali si allungano formando peli sottili ed a pareti assai poco ispessite.

Questi cespuglietti ricordano assai bene i cespuglietti di peli acarofili di molte dicotiledonee, Tav. I, fig. 9 e 10.

Fra questi peli ho trovato spoglie di acari e numerosi detriti.

Lomaria pumila, Raoul.

In diversi punti della superficie inferiore della fronda si notano cavernicole.

Le aperture delle stesse sono ellittiche o circolari e presentano un cercine di tessuto assai rilevato.

Queste cavernicole sono anche visibili dalla parte superiore della fronda, sotto forma di piccole eminenze sferiche.

La cavità interna di queste cavernicole è vasta e lascia osservare spoglie di acari e sostanze escrementizie.

Ho avuto occasione di osservare cavernicole simili nel *Platycerium alcicorne*, nel *Polypodium irioides*, nell'*Adiantum reniforme*, nella *Pteris cretica*, nella *Pellaea* ed in molte altre specie; pare però che questi fatti isolati rappresentassero una semplice reazione dei tessuti alla puntura degli acari.

Lomaria procera, Spreng.

Sulla superficie superiore della fronda si osservano numerose cavernicole, Tav. I, fig. 13, sparse senza ordine.

Queste sono cinte da un bordo sollevato di un colorito bianco argentino.

La parte bianca argentina del bordo è formata da cellule sinuose, Tav. I, fig. 14, laminari la cui parete à subita una speciale modificazione; generalmente la loro superficie appare come se fosse formata da stearina leggermente fusa al contorno.

L'alterazione delle cellule pare che preceda la formazione delle cavernicole, come ho potuto vedere, osservando cavernicole in diversi gradi di formazione.

La cavità interna è piuttosto vasta e lascia osservare numerosi *Phytoptus*, detriti e sostanze escrementizie.

Pare che la modificazione delle cellule che cingono l'apertura, rappresenti una difesa, destinata ad allontanare altri animali dalle cavernicole.

Anche però questo caso pare che rappresenti un fatto accidentale.

Asplenium esculentum, Presl.

Alla pagina inferiore della fronda si notano depressioni, Tav. I, fig. 16, fra la nervatura della pinnula e le due nervature secondarie; queste depressioni, le quali spessissimo sono delle vere fossette, sono abitate da un gran numero di acari (*Tydeus foliorum*).

Dette fossette sono generalmente visibili anche dalla parte superiore della fronda.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Fig. 1. *Cystopteris filix foemina.* Disposizione della doccia della rachide.
» 2. *Asplenium esculentum.* Piccole espansioni membranose ai lati dello sbocco del canale della pinnula.
» 3. *Platycerium alcicorne.* Peli per la disseminazione aerofila.
» 4. *Meniscium.* Sporangio.
» 5. *Cheilanthes lendigera. b.* Sporangio quasi nascosto. *c.* serie dei movimenti dello sporangio.
» 6. *Gymnogramme aspidioides?* Sporangi in via di sviluppo.
» 7. *Pteris argyraea.* Solco della pinnula e delle foglicine.
» 8. » » Solco × 60.
» 9. *Gleichenia dichotoma.* Squame acarofile alla divisione della fronda.
» 10. » » Squama ingrandita × 60.
» 11. *Balantium antarcticum.* Foglicina con acari.
» 12. *Oppia tibialis* × 60.
» 13. *Lomaria procera.* Cavernicola con fitopti.
» 14. » » Cellule dell'epidermide alterate × 70.
» 15. *Alsophila australis.* Acarocecidii delle pinnule (*a*).
» 16. *Asplenium esculentum.* Acarocecidii (*a*).
» 17. *Pteris tremula.* Solco acarofilo × 60.
» 18. *Pteris flabellata.* Solco acarofilo × 60.

Tavola II.

» 1. *Thamnopteris musaefolia.* Parte inferiore con le cavità.
» 2 e 3. » » Corpuscoli albuminoidi della squama × 170 e 120.
» 4. Squama con peli della stessa pianta.
» 5. *Thamnopteris nidus.* Corpuscolo della squama.
» 6. » » Insieme delle squame.
» 7 e 8. *Diplatium viviparum.* Squama con corpuscoli.

finita di stampare il dì 12 Agosto 1898

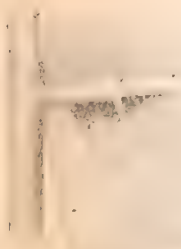
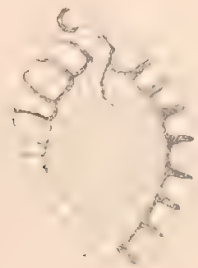
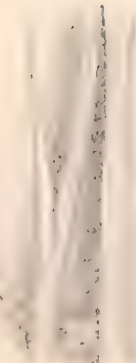
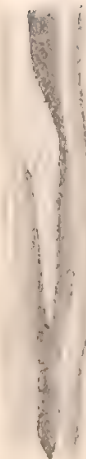
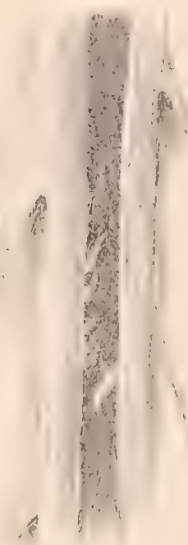
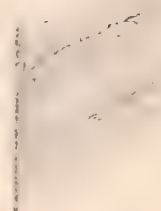
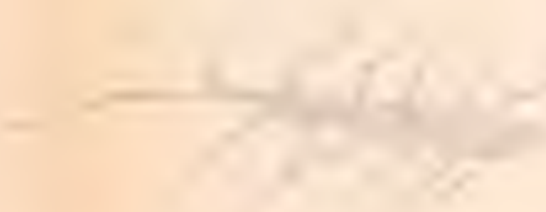
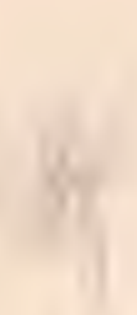
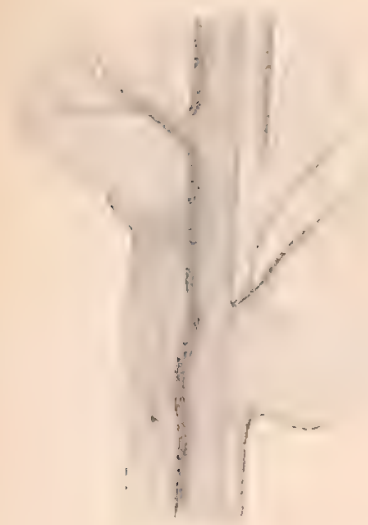
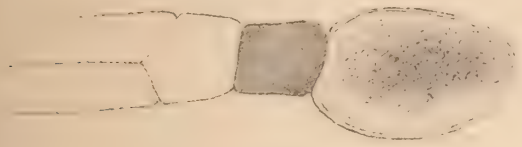



Fig. 2.
Fig. 4
Fig. 1.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

I POLIGONI PRINCIPALI

DI UNA QUARTICA GOBBA DOTATA DI PUNTO DOPPIO

MEMORIA

di ALBERTO BRAMBILLA

presentata nell'adunanza del dì 18 Giugno 1898

La questione, di cui quì propongo lo studio, non è nuova; però la letteratura relativa è molto limitata. Essa appartiene al campo estesissimo dei *Schliessungsprobleme*, ma, per quanto io sappia, soltanto il dottor G. Zecca se n'è occupato fin quì *), indicando la via naturale per giungere alla soluzione.

Nel presente scritto io penso di aver recato un contributo all'argomento. — Ricordate alcune proprietà già note della quartica gobba con punto doppio, enuncio e risolvo il problema dei *poligoni principali*, così chiamando quei *poligoni semplici* inscritti nella curva medesima, dotati di ordinamento dei vertici, per i quali avvenga che il piano osculatore in un vertice seghi nel vertice successivo (*operazione principale*) la quartica in discorso. Determino il numero dei poligoni principali *proprî* (cioè non scissi in poligoni inferiori) di qualunque ordine e quindi passo a trattare con qualche ampiezza, i casi dei triangoli principali, dei quadrangoli principali, dei pentagoni principali.

Il metodo di analisi delle configurazioni che si presentano è basato sopratutto sulla considerazione delle omografie che mutano in sè medesima la quartica sghemba dotata di punto doppio; parecchie proprietà delle medesime sono enunciate, ma è pure aperto il campo a indagini ulteriori, sia sugli enti quì considerati, sia sull'infinita serie di altri che nascono elevando sempre più l'ordine dei poligoni principali.

È appena utile osservare che alcune proprietà delle radici dell'unità sono in continua azione: ad esse sono dovute talune riduzioni a forma semplificata di equazioni di certi piani e di coordinate di certi punti. — È probabile che, volendo proseguire le indagini sui pochi casi quì analizzati e sui problemi dei poligoni principali superiori, possano giovare grandemente le stesse od altre proprietà delle medesime radici dell'unità.

---

*) *Sopra una classe di curve razionali* — Giornale di Matematiche diretto dal prof. G. Battaglini, Vol. XXV, 1887.

§ I. — Generalità sulla quartica gobba dotata di punto doppio

1. La curva gobba C^4 di quarto ordine e con punto doppio, o quartica gobba *armonica* *), è base di un fascio di quadriche toccantisi tutte in un punto **O**, il punto doppio. — A questo fascio appartengono due coni bi-projettanti la curva ed un cono projettante dal punto doppio **). — Come per ogni quartica gobba razionale, le tre corde principali concorrono in un punto **V**; ma una di esse, che indicheremo col simbolo **d**, è l'intersezione dei due piani osculatori nel punto doppio: le altre due, che appoggiano alla curva in coppie di punti distinti, verranno dette corde principali *proprie*, e si indicheranno coi simboli d_1, d_2. — Le due coppie di punti di appoggio delle corde principali proprie definiscono un quadrangolo, del quale uno dei punti diagonali è il punto **V** di concorso delle tre corde principali, e gli altri due sono i vertici dei coni quadrici bi-projettanti la quartica C^4 ***).

2. Assumiamo la determinazione parametrica dei punti di C^4, già proposta dal Weyr ****), nella quale si assegnano i valori 0 ed ∞ al parametro del punto doppio, cosicchè potrà darsi la forma

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 1 \tag{1}$$

all'equazione di condizione necessaria e sufficiente perchè sia piana la quaderna dei punti di parametri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Di guisa che saranno:

$$\lambda_1^3\lambda_2 = 1 \tag{2}$$

la relazione tra il parametro λ_1 del punto di contatto e quello λ_2 del punto di segamento di un piano osculatore;

$$\lambda^4 = 1 \tag{3}$$

l'equazione dei punti di contatto dei piani stazionari;
e sarà

$$\lambda^4 = -1 \tag{4}$$

---

*) Perchè è armonica la quaderna dei punti di contatto dei piani stazionari (Armenante: *Sulle curve gobbe razionali del quarto ordine*, Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. *11* e *12*, 1873-74. — Brambilla: *Ricerche analitiche intorno alle curve gobbe razionali del quart' ordine*, Atti del R. Istituto Veneto, 1885. — *Sopra alcuni casi particolari della curva gobba razionale del quarto ordine*, Rendic. d. R. Accademia delle Scienze di Napoli, 1885.

**) La curva C^4 partecipa dei caratteri di quartica di 1ª specie, e di quartica di 2ª specie: la presenza dei due coni bi-projettanti (nel fascio di quadriche) appartiene al primo carattere; mentre il cono quadrico projettante dal punto doppio è il luogo delle trisecanti e spetta alla seconda specie.

***) Brambilla: *Sulla curva gobba del quart' ordine dotata di punto doppio*, Rendic. del R. Istituto Lombardo, 1884.

****) *Ueber rationaler Curven vierter Ordnung*, Math. Annalen, Bd. IV.

quella dei punti di appoggio delle corde principali proprie, a proposito delle quali osserviamo che, posti:

$$\beta_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad , \quad \beta_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad , \quad \beta_3 = -\frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad , \quad \beta_4 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \, ,$$

esse saranno:

$$\mathrm{d}_1 \equiv \beta_1 \beta_3 \quad , \quad \mathrm{d}_2 \equiv \beta_2 \beta_4 \quad *).$$

3. Come tetraedro di riferimento scegliamo quello formato nel modo seguente:

sia $x_1 = 0$ il piano osculatore nel punto doppio al ramo ∞,
» $x_2 = 0$ » bitangente » »
» $x_3 = 0$ » osculatore » » al ramo 0,
» $x_4 = 0$ » delle due corde principali proprie.

Allora la curva $\mathbf{C}^4$ viene rappresentata dalle equazioni:

$$x_1 : x_2 ; x_3 : x_4 = \omega : \omega^2 : \omega^3 : \omega^4 + 1 \, . \tag{5}$$

L'equazione del cono quadrico $[\mathbf{O}]$ projettante dal punto doppio è:

$$x_2^2 - x_1 x_3 = 0 \, ; \tag{6}$$

mentre sono ordinatamente

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 - x_3)^2 + x_2(2x_2 - x_4) = 0 \, , \\ (x_1 + x_3)^2 - x_2(2x_2 + x_4) = 0 \, , \end{array} \right. \tag{7}$$

quelle dei due coni bi-projettanti $[\mathbf{O}_1]$ ed $[\mathbf{O}_2]$, i cui vertici hanno le coordinate:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : 0 : 1 : 0 \quad \text{per} \quad \mathbf{O}_1 \, , \\ x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : 0 : -1 : 0 \quad \text{»} \quad \mathbf{O}_2 \, . \end{array} \right. \tag{8}$$

Essendo $-i, 1, i -1$ i parametri dei punti di contatto dei piani stazionari, saranno ordinatamente

$$\left\{ \begin{array}{l} 4ix_1 + 6x_2 - 4ix_3 - x_4 = 0 \, , \\ 4x_1 - 6x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \, , \\ 4ix_1 - 6x_2 - 4ix_3 + x_4 = 0 \, , \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \, , \end{array} \right. \tag{9}$$

le equazioni di codesti piani.

Con tale rappresentazione della curva, poi, sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \equiv x_1 - ix_3 = 0 \, , \\ \delta_2 \equiv x_1 + ix_2 = 0 \, , \end{array} \right. \tag{10}$$

---

*) Veggasi la mia Nota citata dell'Istituto Lombardo, 1884.

le equazioni dei piani $\delta_1 \equiv dd_1$ e $\delta_2 \equiv dd_2$ che la corda **d** determina colle altre due corde principali (proprie). Cosicchè, il tetraedro costituito dalle facce del triedro delle corde principali ($\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, x_4 = 0$) dal piano bitangente nel punto doppio ($x_2 = 0$, il quale è il piano polare del punto **V** di concorso delle corde principali rispetto al cono [**O**], ed anche il piano polare di **V** rispetto alla curva) ha gli spigoli

$$(11)\quad \begin{cases} \mathbf{d} \equiv (x_1 = 0 \ , \ x_3 = 0) \quad , \quad \mathbf{d}' \equiv (x_2 = 0 \ , \ x_4 = 0) \ ; \\ \mathbf{d}_1 \equiv (x_1 - ix_3 = 0 \ , \ x_4 = 0) \quad , \quad \mathbf{d}'_1 \equiv (x_1 + ix_3 = 0 \ , \ x_2 = 0) \ ; \\ \mathbf{d}_2 \equiv (x_1 + ix_3 = 0 \ , \ x_4 = 0) \quad , \quad \mathbf{d}'_2 \equiv (x_1 - ix_3 = 0 \ , \ x_2 = 0) \ . \end{cases}$$

Questo tetraedro verrà detto *fondamentale*.

Nella mia Nota citata del 1884 è dimostrato che i piani uscenti dalla retta **d**′ segano la curva $\mathbf{C}^4$ in quaderne di punti, ognuna delle quali è di contatto di quadrilateri circoscritti alla quartica, se λ è il parametro di un punto di $\mathbf{C}^4$, il quadrangolo di contatto di un quadrilatero circoscritto che ivi si inizia è: λ , λ^{-1} , $-\lambda$, $-\lambda^{-1}$.

4. Una quartica gobba razionale ammette sempre tre involuzioni bi-assiali che la mutano in sè stessa *): ma nel caso attuale della quartica armonica, vi sono, oltre di quelle involuzioni, ancora quattro omografie di $\mathbf{C}^4$ in sè medesima.

Due sono omologie armoniche, e due omografie cicliche del quarto ordine, inverse fra loro.

Le tre involuzioni bi-assiali sono

I ,	appoggiata alla coppia	**d** , **d**′ ,	
$\mathbf{I}_1$,	»	»	$\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}'_1$,
$\mathbf{I}_2$,	»	»	$\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}'_2$,

di spigoli opposti dal tetraedro fondamentale.

Le due omologie armoniche hanno rispettivamente per sostegno il centro di un cono bi-projettante ed il suo piano polare σ rispetto alla quartica. Esse, quindi, sono:

$$(12)\quad \begin{cases} \mathbf{J}_1 \ \text{di centro} \ \mathbf{O}_1 \ \text{e piano} \ \sigma_1 \equiv x_1 + x_3 = 0 \ , \\ \mathbf{J}_2 \quad » \quad \mathbf{O}_2 \quad » \quad \sigma_2 \equiv x_1 - x_3 = 0 \ . \end{cases}$$

Quanto alle due omografie $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ cicliche di 4° ordine, esse scambiano fra loro le corde principali proprie; ma si differenziano fra loro per ciò che mentre in una si corrispondono in un dato ordine i punti d'appoggio, nell'altra si corrispondono nell'ordine scambiato.

*) Una trattazione generale e completa delle omografie che mutano in sè medesima una quartica gobba razionale è esposta in una mia Nota dei Rendic. del R. Istituto Lombardo, del 1887. Della medesima questione già si era occupato il Dottor A. Del Re negli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* (1887), ma rispetto alla sola quartica gobba dotata di due tangenti osculatrici: a piè di una pagina sono però indicate le tre involuzioni bi-assiali summenzionate — Più tardi il signor Rohn nei *Berichte der k. sächs. Gesell. d. Wissensch.* (1890) indica pure le medesime *geschart-involutorische Raumtransformationen*, ma non discute casi particolari. Fra questi ultimi, da me esaminati, meriterebbe speciale sviluppo quello della quartica equianarmonica, ricca di notevoli ed eleganti proprietà in parte già note.

Queste sette omografie quaternarie si diranno *fondamentali* per la curva $\mathbf{C}^4$.

Per istabilire le equazioni di tali omografie quaternarie, torna utile ricorrere a quelle delle omografie binarie che esse determinano sulla curva. E si trova agevolmente l'equazione

$\omega + \omega' = 0$	per l'omografia binaria	i	determinata da	I ,
$\omega\omega' + i = 0$	» »	i_1	»	I_1 ,
$\omega\omega' - i = 0$	» »	i_2	»	I_2 ,
$\omega\omega' + 1 = 0$	» »	j_1	»	J_1 ,
$\omega\omega' - 1 = 0$	» »	j_2	»	J_2 ,
$\omega' + i\omega' = 0$	» »	u_1	»	U_1 ,
$\omega - i\omega' = 0$	» »	u_2	»	U_2 .

Si trovano allora le seguenti equazioni per le quaternarie:

$$\text{per } \mathrm{I} \begin{cases} x'_1 : \ldots\ldots : x'_4 = -x_1 : x_2 : -x_3 : x_4 , \\ \xi'_1 : \ldots\ldots : \xi'_4 = -\xi_1 : \xi_2 : -\xi_3 : \xi_4 ; \end{cases}$$

$$\text{per } \mathrm{I}_1 \begin{cases} x'_1 : \ldots\ldots : x'_4 = -ix_3 : -x_2 : ix_1 : x_4 , \\ \xi'_1 : \ldots\ldots : \xi'_4 = i\xi_3 : -\xi_2 : -i\xi_1 : \xi_4 ; \end{cases}$$

$$\text{per } \mathrm{I}_2 \begin{cases} x'_1 : \ldots\ldots : x'_4 = ix_3 : -x_2 : -ix_1 : x_4 , \\ \xi'_1 : \ldots\ldots : \xi'_4 = -i\xi_3 : -\xi_2 : i\xi_1 : \xi_4 : \end{cases}$$

$$\text{per } \mathrm{J}_1 \begin{cases} x'_1 : \ldots\ldots : x'_4 = -x_3 : x_2 : -x_1 : x_4 , \\ \xi'_1 : \ldots\ldots : \xi'_4 = -\xi_3 : \xi_2 : -\xi_1 : \xi_4 ; \end{cases}$$

$$\text{per } \mathrm{J}_2 \begin{cases} x'_1 : \ldots\ldots : x'_4 = x_3 : x_2 : x_1 : x_4 . \\ \xi'_1 : \ldots\ldots : \xi'_4 = \xi_3 : \xi_2 : \xi_1 : \xi_4 ; \end{cases}$$

$$\text{per } \mathrm{U}_1 \begin{cases} x'_1 : \ldots\ldots : x'_4 = ix_1 : -x_2 : -ix_3 : x_4 , \\ \xi'_1 : \ldots\ldots : \xi'_4 = -i\xi_1 : -\xi_2 : i\xi_3 : \xi_4 ; \end{cases}$$

$$\text{per } \mathrm{U}_2 \begin{cases} x'_1 : \ldots\ldots : x'_4 = -ix_1 : -x_2 : ix_3 : x_4 , \\ \xi'_1 : \ldots\ldots : \xi'_4 = i\xi_1 : -\xi_2 : -i\xi_3 : \xi_4 . \end{cases}$$

Può tornar utile l'aver presenti le seguenti relazioni fra codeste omografie che mutano in sè la quartica $\mathbf{C}^4$:

$$\mathrm{I}\mathrm{I}_h \equiv \mathrm{I}_k \; .$$

$$\mathrm{I}\mathrm{J}_h \equiv \mathrm{J}_h\mathrm{I} \equiv \mathrm{J}_k \; .$$

$$\mathrm{I}_h\mathrm{J}_h \equiv \mathrm{J}_r\mathrm{I}_s \equiv \mathrm{U}_1 \quad . \quad \mathrm{I}_r\mathrm{J}_s \equiv \mathrm{J}_h\mathrm{I}_h \equiv \mathrm{U}_2 \; ,$$

ed altre ovvie, che ne sono conseguenze.

§ II. — Determinazione dei poligoni principali in generale

5. Se il piano osculatore nel punto λ sega la quartica nel punto λ_1, e quello osculatore in λ_1, sega in λ_2, ecc...., ed il piano osculatore in λ_{n-1} sega in λ, si avranno le relazioni:

$$\lambda^3\lambda_1 = 1 \; , \; \lambda_1^3\lambda_2 = 1 \; \ldots. \; , \; \lambda_{n-1}^3\lambda = 1 \; ,$$

dalle quali si ricava, nel caso di n pari, la condizione necessaria:

$$\lambda^{3^n-1}=1 \;;$$

e nel caso di n dispari:

$$\lambda^{3^n+1}=1 \;.$$

Queste due equazioni si compendiano nell'unica

$$\lambda^{3^n-(1)^n}=1 \;, \tag{13}$$

che diremo *equazione determinatrice* degli n-goni principali, appunto perchè ad essa soddisfano i parametri dei vertici di tali poligoni.

6. Nel caso di n dispari, ed $=2\nu+1$, l'esponente di λ nell'equazione determinatrice degli n-goni principali è:

$$\begin{aligned}3^{2\nu+1}+1&=(3+1)(3^{2\nu}-3^{2\nu-1}+\ldots+1)\\&=4\chi \;,\end{aligned}$$

dove

$$\chi=3^{2\nu}-3^{2\nu-1}+\ldots+1 \;.$$

L'equazione medesima è dunque

$$(\lambda^4)^\chi=1 \;,$$

epperò è soddisfatta da $\lambda^4=1$ ossia, *qualunque sia il numero dispari* n, *fra i vertici di* n-*goni principali si trovano pure i punti di contatto dei piani stazionari* (**Zecca**, l. c.).

Nel caso di n pari, ed $=2\nu$, il grado della medesima equazione determinatrice rispetto a λ è

$$\begin{aligned}3^{2\nu}-1=(3^2)^\nu-1&=(3^2-1)(3^{2(\nu-1)}+3^{2(\nu-2)}+\ldots+1)\\&=8\varkappa \;,\end{aligned}$$

dove

$$\varkappa=3^{2(\nu-1)}+3^{2(\nu-2)}+\ldots+1 \;.$$

L'equazione medesima è dunque

$$(\lambda^8)^\varkappa=1 \;,$$

epperò è soddisfatta da $\lambda^4=1$ e da $\lambda^4=-1$. Ossia, *qualunque sia il numero pari* n, *fra i vertici di* n-*goni principali si trovano pure i punti di contatto dei piani stazionari, ed i punti di appoggio delle corde principali proprie* *) (**Zecca**, l. c.).

Così possiamo dire che, in tutti i casi, fra i vertici dei poligoni principali appaiono i punti di contatto dei piani stazionari: il che era bene a prevedersi, perchè si intuisce anche a priori che nel problema dei poligoni principali il punto di contatto di un piano stazionario si muta sempre in sè medesimo colla operazione principale e che per un dato numero pari di vertici si incontrano le coppie di punti di appoggio delle corde

---

*) È evidente che fra quei vertici stanno anche i due punti di $\mathbf{C}^4$ coincidenti nel punto doppio.

principali *). Anzi riesce evidente che fra i poligoni principali di $n_1 n_2 \ldots n_k$ vertici si devono incontrare quelli di $n_1, n_2 \ldots, n_k$, quelli di $n_1 n_2, \ldots, m_1 n_2 n_3, \ldots$, ecc. vertici.

7. Supponiamo che sia n un numero primo $\neq 2$. Se dall'equazione determinatrice degli n-goni separiamo quella dei punti di contatto dei piani stazionari, rimane un'equazione di grado $3^n + 1 - 4 = 3^n - 3$: cosicchè, per $n \neq 2$ primo, gli n-goni principali saranno in numero di $\frac{1}{n}(3^n - 3)$.

Se fosse invece $n = \nu^2$, dove sia $\nu \neq 2$ un numero primo, ogni ν-gono, contato ν volte costituirebbe un ν^2-gono, epperò nella ricerca dei ν^2-goni principali si incontreranno pure i ν-goni principali. Pertanlo volendo cercare il numero dei vertici di ν^2-goni principali propriamente detti, si dovrà togliere dalle soluzioni dell'equazione determinatrice il numero dei vertici dei ν-goni principali. Avendosi allora

$$3^{\nu^2} + 1 - 4 - (3^\nu - 3) = 3^{\nu^2} - 3^\nu,$$

si concluderà che, per $\nu \neq 2$ primo, il numero dei ν^2-goni principali è $\frac{1}{\nu^2}(3^{\nu^2} - 3^\nu)$.

Se fosse $n = \nu^3$, ed escludendo i vertici dei ν-goni e dei ν^2-goni principali, si trova il numero $3^{\nu^3} + 1 - 4 - (\varepsilon^\nu - 3) - (\varepsilon^{\nu^2} - \varepsilon^\nu) = 3^{\nu^3} - 3^{\nu^2}$; cosicchè si conchiude che i ν^3-goni principali sono in numero di $\frac{1}{\nu^3}(3^{\nu^3} - 3^{\nu^2})$.

Continuando di questo passo al caso $n = \nu^k$ si trova che il numero dei vertici di ν^k-goni principali propriamente detti, per $\nu \neq 2$ numero primo, è $3^{\nu^k} - 3^{\nu^{k-1}}$, epperò tali poligoni sono in numero di $\frac{1}{\nu^k}(3^{\nu^k} - 3^{\nu^{k-1}})$.

Quando, poi, sia $n = 2$ (caso delle corde principali) l'equazione determinatrice è: $\lambda^8 = 1$, che si scinde nelle due $\lambda^4 = 1$ e $\lambda^4 = -1$. Le soluzioni che spettano a tali corde sono in numero di $3^2 - 1 - 4 = 3^2 - 5$.

Per $n = 2^2$, escludendo i punti di contatto dei piani stazionari e quelli d'appoggio delle corde principali proprie, rimarranno $3^{2^2} - 1 - 4 - (3^2 - 5) = 3^{2^2} - 3^2$ vertici di 2^2-goni principali

Se $n = 2^3$, escludendo i punti d'appoggio delle corde principali oltre quelli di contatto dei piani stazionari, quindi i vertici dei 2^2-goni principali si otterranno

$$3^{2^3} - 1 - 4 - (3^2 - 5) - (3^{2^2} - 3^2) = 3^{2^3} - 3^{2^2}$$

vertici di 2^3-goni principali. E così continuando si finisce col trovare che il numero dei vertici dei 2^k-goni principali è

$$3^{2^k} - 1 - 4 - (3^2 - 5) - (3^{2^2} - 3^2) - \ldots - (3^{2^{k-1}} - 3^{2^{k-2}}) = 3^{2^k} - 3^{2^{k-1}}.$$

---

*) Che i punti d'appoggio delle corde principali non si debbano presentare tra i vertici di n-goni principali per n dispari si rileva assai agevolmente dalla semplice intuizione: ma ciò risulta pure dall'osservazione che, affinchè $\lambda^{3^{n+1}} - 1$ sia divisibile per $\lambda^8 - 1$ bisognerebbe che fosse $3^n + 1$ un multiplo di 8, ossia che fosse χ un multiplo di 2. E ciò non è, perchè $\chi = 3^{2\nu} - 3^{2\nu-1} + \ldots + 3^2 - 3 + 1$ è necessariamente un numero dispari.

8. Dobbiamo dunque concludere che, *se ν è un numero primo qualunque e* **k** *un intero positivo qualsivoglia, il numero dei vertici dei ν^k-goni principali della quartica* **C^4** *è espresso da $3^{\nu^k}-3^{\nu^{k-1}}$, epperò tali poligoni sono in numero di $\frac{1}{\nu^k}(3^{\nu^k}-3^{\nu^{k-1}})$* *).

9. È chiaro che, adottando principio cui già si alluse nei numeri precedenti, allorchè sia

$$n=\nu_1^{k_1}\nu_2^{k_2}\dots\nu_r^{k_r}\ (\nu_i \mp 2)\ ,$$

la ricerca dei vertici dagli n-goni principali si effettuerà togliendo dalle soluzioni della equazione determinatrice

$$\lambda^{3^{\nu_1^{k_1}\dots\nu_r^{k_r}}+1}=1$$

i vertici dei poligoni principali subordinati. Così, se indichiamo con $\mathfrak{N}(n)$ il numero dei vertici di n-goni principali, si vede che

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}(\nu_1^{k_1}\nu_2^{k_2}\dots\nu_r^{k_r}) = 3^{\nu_1^{k_1}\nu_2^{k_2}\dots\nu_r^{k_r}} & -3-\mathfrak{N}(\nu_1)-\mathfrak{N}(\nu_1^2)-\dots-\mathfrak{N}(\nu_1^{k_1})\\ & -\mathfrak{N}(\nu_2)-\mathfrak{N}(\nu_2^2)-\dots-\mathfrak{N}(\nu_2^{k_2})\\ & -\dots\dots\\ & -\mathfrak{N}(\nu_r)-\mathfrak{N}(\nu_r^2)-\dots-\mathfrak{N}(\nu_r^{k_r})\\ & -\mathfrak{N}(\nu_1\nu_2)-\dots-\mathfrak{N}(\nu_1^{k_1}\nu_2)-\dots-\dots-\mathfrak{N}(\nu_{r-1}^{k_{r-1}}\nu_r^{k_r})\\ & -\mathfrak{N}(\nu_1\nu_2\nu_3)-\dots-\dots-\mathfrak{N}(\nu_{r-2}^{k_{r-2}}\nu_{r-1}^{k_{r-1}}\nu_r^{k_r})\\ & -\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ & -\dots-\mathfrak{N}(\nu_1^{k_1}\nu_2^{k_2}\dots\nu_{r-1}^{k_{r-1}}\nu_r^{k_r-1})\ .\end{aligned}$$

Nel caso in cui fosse

$$n=2^k\nu_1^{k_1}\dots\nu_r^{k_r}\ ,$$

si troverebbe

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}(2^k\nu_1^{k_1}\dots\nu_r^{k_r}) = 3^{2^k\nu_1^{k_1}\dots\nu_r^{k_r}} & -5-(3^2-5)-\mathfrak{N}(2^2)-\dots-\mathfrak{N}(2^k)\\ & -\mathfrak{N}(\nu_1)-\mathfrak{N}(\nu_1^2)-\dots-\mathfrak{N}(\nu_1^{k_1})\\ & -\dots\dots\\ & -\dots\dots-\dots\dots\\ & \dots\dots-\dots\dots-\mathfrak{N}(2^k\nu_1^{k_1}\dots\nu_{r-1}^{k_{r-1}}\nu_r^{k_r-1})\ .\end{aligned}$$

---

*) Che il numero $3^{\nu^k}-3^{\nu^{k-1}}$ sia divisibile per ν^k risulta pure dal teorema di Fermat generalizzato da Eulero. Infatti, $3^{\nu^k}-3^{\nu^{k-1}}=3^{\nu^{k-1}}(3^{\nu^k-\nu^{k-1}}-1)$, cioè $3^{\nu^k}-3^{\nu^{k-1}}=3^{\nu^{k-1}}(3^{(\nu-1)\nu^{k-1}}-1)$; e poichè il citato teorema afferma che appunto $3^{(\nu-1)\nu^{k-1}}-1$ è divisibile per ν^k, tale sarà $3^{\nu^k}-3^{\nu^{k-1}}$. Però il teorema non è più valido per $\nu=3$: ma, in questo caso, la suddetta divisibilità di $3^{\nu^k}-3^{\nu^{k-1}}$ per ν^k ha luogo per altra ragione. Si ha, infatti, che è divisibile per 3^k il fattore $3^{3^{k-1}}$, perchè $3^{k-1}>k$. Ed invero $3^{k-1}=(1+2)^{k-1}=1+(k-1).2+\dots=k+(k-1)+\dots$ Dunque, in ogni caso, $3^{\nu^k}-3^{\nu^{k-1}}$ è divisibile per ν^k.

Se introduciamo la notazione simbolica

$$_*(\alpha^p - 1)(\alpha^q - 1)\alpha^r$$

ad esprimere che, nello eseguire il prodotto indicato, alle somme di esponenti di α si devono sostituire i prodotti dei medesimi, cosicchè, per chiarir l'idea, sarà

$$_*(\alpha^p - 1)(\alpha^q - 1)\alpha^r = \alpha^{pqr} - \alpha^{pr} - \alpha^{qr} + \alpha^r ,$$

il numero dei vertici degli n-goni principali proprii pel caso $n = \nu_1^{k_1}\nu_2^{k_2}\ldots\nu_r^{k_r}$, dove siano $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ numeri primi qualisivogliano, è rappresentato dall'espressione simbolica

$$(14) \qquad \mathcal{N}(\nu_1^{k_1}\nu_2^{k_2}\ldots\nu_r^{k_r}) = {}_*(3^{\nu_1} - 1)(3^{\nu_2} - 1)\ldots(3^{\nu_r} - 1)3^{\nu_1^{k_1-1}\nu_2^{k_2-1}\cdots\nu_r^{k_r-1}} . \text{*)}$$

In particolare, si hanno

$$\mathcal{N}(\nu_1\nu_2) = 3^{\nu_1\nu_2} - 3^{\nu_1} - 3^{\nu_2} + 3 = {}_*(3^{\nu_1} - 1)(3^{\nu_2} - 1)3$$

$$\mathcal{N}(\nu_1^2\nu_2) = 3^{\nu_1^2\nu_2} - 3^{\nu_1^2} - 3^{\nu_1\nu_2} + 3^{\nu_1} = {}_*(3^{\nu_1} - 1)(3^{\nu_2} - 1)3^{\nu_1}$$

. . . .

$$\mathcal{N}(\nu_1\nu_2\nu_3) = 3^{\nu_1\nu_2\nu_3} - 3^{\nu_2\nu_3} - 3^{\nu_3\nu_1} - 3^{\nu_1\nu_2} + 3^{\nu_1} + 3^{\nu_2} + 3^{\nu_3} - 3 = {}_*(3^{\nu_1} - 1)(3^{\nu_2} - 1)(3^{\nu_3} - 1)3$$

. . . .

Scendendo ad esempi numerici, poi, si trova che il numero dei vertici dei poligoni principali va rapidamente crescendo col crescere dell'ordine dei poligoni stessi. Infatti si hanno:

$$\mathcal{N}(2) = 4 , \ \mathcal{N}(3) = 24 , \ \mathcal{N}(4) = 72 , \ \mathcal{N}(5) = 240 , \ \mathcal{N}(6) = 696 ,$$

$$\mathcal{N}(7) = 2184 , \ \mathcal{N}(8) = 6480 , \ \mathcal{N}(9) = 19656 , \ \mathcal{N}(10) = 58800 , \ \mathcal{N}(11) = 177144 ,$$

$$\mathcal{N}(12) = 530640 , \ \mathcal{N}(13) = 1594320 , \ \mathcal{N}(14) = 4780780 , \ \mathcal{N}(15) = 14348640 ,$$

ecc. ecc. E appena si esce dai primi numeri della serie naturale si incontrano presto

---

*) Non siamo riusciti a dare di questa formola intuita una dimostrazione semplice, mentre l'abbiamo verificata in tutti i casi quì indicati ed in altri numerosissimi. — Del resto a convincere della validità di questa formola può bastare l'esame dei seguenti due esempi:

1) Ammettiamola vera per $n = \nu_1, \nu_2, \nu_1\nu_2, \nu_1^2\nu_2, \nu_1\nu_2^2, \nu_1^2\nu_2^2$ e dimostriamola per $n = \nu_1^2\nu_2^3$. — Supponiamo, per brevità $\nu_i \neq 2$. Si ha allora

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\nu_1^2\nu_2^3) = 3^{\nu_1\nu_2} - 3 &- \mathcal{N}(\nu_1) - \mathcal{N}(\nu_1^2) \\ &- \mathcal{N}(\nu_2) - \mathcal{N}(\nu_2^2) - \mathcal{N}(\nu_2^3) \\ &- \mathcal{N}(\nu_1\nu_2) - \mathcal{N}(\nu_1\nu_2^2) - \mathcal{N}(\nu_1\nu_2^3) \\ &- \mathcal{N}(\nu_1^2\nu_2) - \mathcal{N}(\nu_1^2\nu_2^2) , \end{aligned}$$

dei numeri enormi di soluzioni della questione: così, per esempio, per $n = 3^2 . 5^2$ si trova

$$\mathcal{N}(3^2 5^2) = 3^{225} - 3^{45} - 3^{75} + 3^{15} ,$$

che è un numero di 108 cifre.

10. Se poniamo $\mu = 3^n - (-1)^n$, ed indichiamo con ε una radice μ-ma primitiva dell'unità, saranno $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^\mu$ i parametri di *tutti* i vertici di n-goni principali, compresi i punti di contatto dei piani stazionari, e per n pari compresi pure i punti d'appoggio delle corde principali, come anche quelli dei ν-goni principali se ν è un fattore di n. A indicare un n-gono principale, quello che possiede il vertice ε^α, e che ha pure i vertici successivi $\varepsilon^{(-3)\alpha}, \varepsilon^{(-3)^2\alpha}, \ldots, \varepsilon^{(-3)^{n-1}\alpha}$, adotteremo il simbolo

$$[\alpha \,.\, (-3)\alpha \,,\, (-3)^2\alpha \,,\, \ldots \,,\, (-3)^{n-1}\alpha] ,$$

proposto dallo Zecca (*l. c.*).

11. Se $\varepsilon^\alpha, \varepsilon^\beta, \varepsilon^\gamma$ sono tre soluzioni dell'equazione determinatrice degli n-goni, il piano dei tre punti che essi rappresentano, ha l'equazione

$$(15) \quad \left\{ \varepsilon^{2(\alpha+\beta+\gamma)} + \varepsilon^{\beta+\gamma} + \varepsilon^{\gamma+\alpha} + \varepsilon^{\alpha+\beta} \right\} x_1 - \left\{ \varepsilon^{\alpha+2\beta+2\gamma} + \varepsilon^{\beta+2\gamma+2\alpha} + \varepsilon^{\gamma+2\alpha+2\beta} + \varepsilon^\alpha + \varepsilon^\beta + \varepsilon^\gamma \right\} x_2$$
$$+ \left\{ \varepsilon^{2\alpha+\beta+\gamma} + \varepsilon^{2\beta+\gamma+\alpha} + \varepsilon^{2\gamma+\alpha+\beta} + 1 \right\} x_3 - \varepsilon^{\alpha+\beta+\gamma} x_4 = 0 .$$

---

ossia, poichè

$$\mathcal{N}(\nu_1\nu_2^3) = 3^{\nu_1\nu_2} - 3 - \mathcal{N}(\nu_1) - \mathcal{N}(\nu_2) - \mathcal{N}(\nu_2^2) - \mathcal{N}(\nu_2^3)$$
$$- \mathcal{N}(\nu_1\nu_2) - \mathcal{N}(\nu_1\nu_2^2) ,$$

sarà

$$\mathcal{N}(\nu_1^2\nu_2^3) = 3^{\nu_1\nu_2} - 3^{\nu_1\nu_2} - \mathcal{N}(\nu_1^2) - \mathcal{N}(\nu_1^2\nu_2) - \mathcal{N}(\nu_1^2\nu_2^2)$$
$$= 3^{\nu_1\nu_2} - 3^{\nu_1\nu_2} - {}_*(3^{\nu_1} - 1)3^{\nu_1} - {}_*(3^{\nu_1} - 1)(3^{\nu_2} - 1)3^{\nu_1} - {}_*(3^{\nu_1} - 1)(3^{\nu_2} - 1)3^{\nu_1\nu_2}$$
$$= {}_*(3^{\nu_1} - 1)(3^{\nu_2} - 1)3^{\nu_1\nu_2} ,$$

cioè vale per $\mathcal{N}(\nu_1^2\nu_2^3)$ la formola (14): c. v. d.

2) Ammessa la formola (14) per $n = \nu_i \,,\, \nu_i\nu_j \,,\, \nu_i\nu_j\nu_k$, si dimostra che sussiste per $n = \nu_1\nu_2\nu_3\nu_4$. Infatti

$$\mathcal{N}(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4) = 3^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} - 3 - \mathcal{N}(\nu_1) - \cdots - \mathcal{N}(\nu_4)$$
$$- \mathcal{N}(\nu_1\nu_2) - \cdots - \mathcal{N}(\nu_3\nu_4)$$
$$- \mathcal{N}(\nu_2\nu_3\nu_4) - \cdots - \mathcal{N}(\nu_1\nu_2\nu_3)$$
$$= 3^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} - 3 - {}_*(3^{\nu_1} - 1)3 - \cdots - {}_*(3^{\nu_4} - 1)3$$
$$- {}_*(3^{\nu_1} - 1)(3^{\nu_2} - 1)3 - \cdots - {}_*(3^{\nu_3} - 1)(3^{\nu_4} - 1)3$$
$$- {}_*(3^{\nu_2} - 1)(3^{\nu_3} - 1)(3^{\nu_4} - 1)3 - \cdots - (3^{\nu_1} - 1)(3^{\nu_2} - 1)(3^{\nu_3} - 1)$$
$$= {}_*(3^{\nu_1} - 1)(3^{\nu_2} - 1)(3^{\nu_3} - 1)(3^{\nu_4} - 1)3 , \qquad \text{c. v. d.}$$

È evidente che questi ragionamenti si possono ripetere nei casi analoghi più generali.

Si può verificare su questa equazione, ma più facilmente si rileva mediante la relazione (1), che questo piano sega ulteriormente la curva C^4 in un vertice di n-gono principale, e precisamente in $\varepsilon^{-(\alpha+\beta+\gamma)}$ (Zecca, *l. c.*). Questo punto si dirà il *complemento* dei primi tre *).

Se $\alpha=\beta=\gamma$, si trova l'equazione

$$(16) \qquad (\varepsilon^{6\alpha}+3\varepsilon^{2\alpha})x_1-3(\varepsilon^{5\alpha}+\varepsilon^{\alpha})x_2+(3\varepsilon^{4\alpha}+1)x_3-\varepsilon^{3\alpha}x_4=0\ ,$$

del piano osculatore, e si verifica tosto che questo passa per il punto $\varepsilon^{-3\alpha}$, come deve effettivamente.

Finalmente, se $\varepsilon^{\alpha}, \varepsilon^{\beta}, \varepsilon^{\gamma}$ sono tre vertici consecutivi di un n-gono principale, cioè se $\beta=-3^{\alpha}, \gamma=9^{\alpha}$, sarà

$$(17) \qquad (\varepsilon^{14\alpha}+\varepsilon^{6\alpha}+\varepsilon^{10\alpha}+\varepsilon^{-2\alpha})x_1-(\varepsilon^{13\alpha}+\varepsilon^{17\alpha}+\varepsilon^{5\alpha}+\varepsilon^{\alpha}+\varepsilon^{-3\alpha}+\varepsilon^{9\alpha})x_2$$
$$+(\varepsilon^{8\alpha}+\varepsilon^{4\alpha}+\varepsilon^{16\alpha}+1)x_3-\varepsilon^{7\alpha}x_4=0\ ,$$

l'equazione del loro piano. È ε^{α} il vertice *iniziale* nella *faccia* del poligono principale.

§ III. — I triangoli principali

12. Per $n=3$ si ha $\mu=28$ e $\mathfrak{N}(3)=24$. I parametri dei vertici dei triangoli principali sono quindi le radici 28^{me} dell'unità.

Sia η una radice 7ma primitiva dell'unità, e $-i$ una radice quarta dell'unità: le soluzioni dell'equazione determinatrice dei vertici dei triangoli principali sono:

$$\begin{array}{lllllll}
\varepsilon=-i\eta\ , & \varepsilon^2=-\eta^2\ , & \varepsilon^3=i\eta^3\ , & \varepsilon^4=\eta^4\ , & \varepsilon^5=-i\eta^5\ , & \varepsilon^6=-\eta^6\ , & \varepsilon^7=i\ , \\
\varepsilon^8=\eta\ , & \varepsilon^9=-i\eta^2\ , & \varepsilon^{10}=-\eta^3\ , & \varepsilon^{11}=i\eta^4\ , & \varepsilon^{12}=\eta^5\ , & \varepsilon^{13}=-i\eta^6\ , & \varepsilon^{14}=-1\ , \\
\varepsilon^{15}=i\eta\ , & \varepsilon^{16}=\eta^2\ , & \varepsilon^{17}=-i\eta^3\ , & \varepsilon^{18}=-\eta^4\ , & \varepsilon^{19}=i\eta^5\ , & \varepsilon^{20}=\eta^6\ , & \varepsilon^{21}=-i\ , \\
\varepsilon^{22}=-\eta\ , & \varepsilon^{23}=i\eta^2\ , & \varepsilon^{24}=\eta^3\ , & \varepsilon^{25}=-i\eta^4\ , & \varepsilon^{26}=-\eta^5\ , & \varepsilon^{27}=i\eta^6\ , & \varepsilon^{28}=1\ .
\end{array}$$

È evidente che si hanno identicamente:

$$\varepsilon^{k}+\varepsilon^{k+4}+\varepsilon^{k+8}+\varepsilon^{k+12}+\varepsilon^{k+16}+\varepsilon^{k+20}+\varepsilon^{k+24}=0\ ,$$
$$\varepsilon^{k}+\varepsilon^{k+14}=0\ .$$

13. Escludendo le soluzioni $\varepsilon^7=i, \varepsilon^{14}=-1, \varepsilon^{21}=-i, \varepsilon^{28}=1$, rimangono 24 vertici di otto triangoli principali (Zecca, *l. c.*), per i quali ci serviremo anche dei simboli Λ, sia ad indicare i triangoli stessi, sia a designare i loro piani.

---

*) Se consideriamo una terna di punti di contatto di piani stazionari, fra essi è una coppia di coniugati rispetto al punto doppio (sede dei punti $0, \infty$). Tali punti sono soluzioni dell'equazione determinatrice di n-goni principali (qualunque sia n). Il complementare della terna suddetta è quel punto della medesima che è coniugato dell'escluso. Vale a dire che il piano di tre punti di contatto di piani stazionari è tangente alla quartica nel punto della terna che è coniugato armonico del quarto punto rispetto al punto doppio. E questa era proprietà nota.

Distingueremo tali otto triangoli in due quaderne:

$$\begin{cases} A_1^{(1)} \equiv [\,1\,,\,25\,,\,\;9]\,, \\ A_2^{(1)} \equiv [\,3\,,\,19\,,\,27]\,, \\ A_3^{(1)} \equiv [\,5\,,\,13\,,\,17]\,, \\ A_4^{(1)} \equiv [11\,,\,23\,,\,15]\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1^{(2)} \equiv [\,2\,,\,22\,,\,18]\,, \\ A_2^{(2)} \equiv [\,4\,,\,16\,,\,\;8]\,, \\ A_3^{(2)} \equiv [\,6\,,\,10\,,\,26]\,, \\ A_4^{(2)} \equiv [12\,,\,20\,,\,24]\,; \end{cases}$$

le diremo *quaderna dispari* (quella dei triangoli $A^{(1)}$) e *quaderna pari* (quella dei triangoli $A^{(2)}$).

14. Registriamo il fatto (Zecca, *l.c.*) che i piani

$A_1^{(1)}$, $A_3^{(1)}$	passano per il punto	$+i$,
$A_2^{(1)}$, $A_4^{(1)}$	» »	$-i$,
$A_2^{(2)}$, $A_4^{(2)}$	» »	$+1$,
$A_1^{(2)}$, $A_3^{(2)}$	» »	-1,

dalla qual cosa si rileva come le due quaderne di piani A siano coordinate alle due coppie di punti di contatto di piani stazionari coniugate rispetto al punto doppio.

15. Ma un fatto che meglio caratterizza la separazione in due quaderne nel modo indicato, si mette in luce considerando le omografie della quartica $\mathbf{C}^4$ in sè medesima.

Intanto osserviamo che

$$(18)\quad \begin{cases} J_1A_1^{(1)}[1\,,\,25\,,\,\;9] \equiv A_3^{(1)}[13\,,\,17\,,\,\;5]\,, \\ J_1A_2^{(1)}[3\,,\,19\,,\,27] \equiv A_4^{(1)}[11\,,\,23\,,\,15]\,; \\ \\ J_1A_1^{(2)}[2\,,\,22\,,\,18] \equiv A_4^{(2)}[12\,,\,20\,,\,24]\,, \\ J_1A_2^{(2)}[4\,,\,16\,,\,\;8] \equiv A_3^{(2)}[10\,,\,26\,,\,\;6]\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} J_2A_1^{(1)}[1\,,\,25\,,\,\;9] \equiv A_2^{(1)}[27\,,\,\;3\,,\,19]\,, \\ J_2A_3^{(1)}[5\,,\,13\,,\,17] \equiv A_4^{(1)}[23\,,\,15\,,\,11]\,; \\ \\ J_2A_1^{(2)}[2\,,\,22\,,\,18] \equiv A_3^{(2)}[26\,,\,\;6\,,\,10]\,, \\ J_2A_2^{(2)}[4\,,\,16\,,\,\;8] \equiv A_4^{(2)}[24\,,\,12\,,\,20]\,. \end{cases}$$

Indichiamo con g_{pq}^{rs} la retta comune ai due piani $A_p^{(r)}$ e $A_q^{(s)}$. Allora si vede che giacciono nel piano σ_1 (v. n. 4) le rette $g_{13}^{11}, g_{24}^{11}, g_{14}^{22}, g_{23}^{22}$, e nel piano σ_2 le g_{12}^{11}, g_{34}^{11}, g_{13}^{22}, g_{24}^{22}.

E poichè i due piani σ_1 e σ_2 si tagliano nella retta **d**, così le rette g_{13}^{11}, g_{12}^{11} si incontrano in un punto $A^{(1)}$ di questa retta **d**, per il quale passano dunque i piani $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}, A_3^{(1)}$, quindi le rette g_{24}^{11}, g_{34}^{11}, e finalmente ancora il piano $A_3^{(1)}$. Similmente si dimostra che le quattro rette g^{22}, e quindi i quattro piani $A^{(2)}$, escono da un altro unico punto $A^{(2)}$ della **d**.

Dunque *gli otto piani dei triangoli principali formano due angoli tetraedri* (le nostre due quaderne dispari e pari) *i cui vertici* $A^{(1)}$ *e* $A^{(2)}$ *giacciono sulla retta* **d** *intersezione dei due piani osculatori nel punto doppio. Tali due angoli tetraedri hanno in*

comune due piani diagonali che sono i piani polari dei vertici dei coni bi-projettanti rispetto alla quartica: in ognuno dei medesimi angoli tetraedri, il terzo piano diagonale è quello che projetta dal rispettivo vertice la d' *congiungente i vertici dei suddetti coni bi-projettanti.*

16. Se nell'equazione (17) poniamo rispettivamente per α i valori **1**, 3, 5, 11 otteniamo le equazioni dei piani $A^{(1)}$; e se poniamo $\alpha = 2, 4, 6, 12$ otteniamo le equazioni dei piani $A^{(2)}$. Se scriviamo

$$\rho_1 = 1 + \eta^3 + \eta^5 + \eta^6 \qquad \text{e} \qquad \rho_2 = 1 + \eta + \eta^2 = \eta^4 \quad *)$$

---

*) In parecchie espressioni che si presentano risolvendo alcune questioni relative a questi piani A si ottengono notevoli semplificazioni di forma mediante talune identità che quì registriamo. Oltre ad aversi, evidentemente, $\rho_1 + \rho_2 = 1$, si trova agevolmente $\rho_1 \rho_2 = 2$ e quindi $(\rho_1 - \rho_2)^2 = -7$ da cui $\rho_1 - \rho_2 = \pm i\sqrt{7}$. Il segno a scegliersi dev'essere l'inferiore, perchè si trova per altra via

$$\rho_1 - \rho_2 = -2i\left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{7} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right),$$

e

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{7} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$$

è positivo. Dunque

$$\rho_1 - \rho_2 = -i\sqrt{7}\,.$$

Registriamo incidentalmente la relazione

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{7} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}\sqrt{7}\,.$$

Del resto è questo un caso particolare di relazioni più generali, che, forse, possono essere utili in problemi più inoltrati, del genere che trattiamo. — Essendo p un numero primo, si ponga $\eta = e^{i\frac{2\pi}{p}}$. Sussiste allora la formola, indicatami dal prof. E. Cesàro,

$$\sum_{q=1}^{q=p-1} \left(\frac{q}{p}\right) \eta^{q-1} = \sqrt{\pm p}\,,$$

dove è $\left(\frac{q}{p}\right)$ il noto simbolo di Legendre avente il valore $+1$ o -1 secondo che sia q un residuo od un non-residuo quadratico di p, e dove si assumerà $\pm p$ secondo che sia $p \equiv \pm 1$ (mod. 4). Siano infatti $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ i residui quadratici ed $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ i non-residui quadratici di p e si pongano:

$$k = 1 + \eta^{\alpha} + \eta^{\beta} + \eta^{\gamma} + \ldots, \qquad k' = 1 + \eta^{\alpha'} + \eta^{\beta'} + \eta^{\gamma'} + \ldots.$$

Si avranno allora

$$k + k' = 1 \qquad kk' = \frac{1}{4}(1 \mp p)$$

onde $\rho_1 - \rho_2 = 1$, le suddette equazioni assumono la forma

$$
(19) \qquad
\begin{array}{ll}
\Lambda_1^{(1)} \equiv \rho_1 x_1 + i x_2 - \rho_2 x_3 + i x_4 = 0 \,, & \Lambda_1^{(2)} \equiv \rho_1 x_1 - x_3 + \rho_2 x_3 + x_4 = 0 \,, \\
\Lambda_2^{(1)} \equiv \rho_2 x_1 - i x_2 - \rho_1 x_3 - i x_4 = 0 \,, & \Lambda_2^{(2)} \equiv \rho_1 x_1 + x_2 + \rho_2 x_3 - x_4 = 0 \,, \\
\Lambda_3^{(1)} \equiv \rho_2 x_1 + i x_2 - \rho_7 x_3 + i x_4 = 0 \,, & \Lambda_3^{(2)} \equiv \rho_2 x_1 - x_2 + \rho_1 x_3 + x_4 = 0 \,, \\
\Lambda_4^{(1)} \equiv \rho_1 x_1 - i x_2 - \rho_2 x_3 - i x_4 = 0 \,; & \Lambda_4^{(2)} \equiv \rho_2 x_1 + x_3 + \rho_1 y_3 - x_4 = 0 \,.
\end{array}
$$

Ponendo in queste equazioni $x_1 = 0$ ed $x_3 = 0$ si ottengono per i punti $A^{(1)}$ ed $A^{(2)}$ le seguenti coordinate:

$$
(20) \qquad
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{per } A^{(1)}, \ldots & x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0 : 1 : 0 : -1 \,, \\
\text{»} \;\; A^{(2)}, \ldots & \qquad \text{»} \qquad\; = 0 : 1 : 0 : \;\; 1 \,.
\end{array}
\right.
$$

Di conseguenza, le equazioni dei piani diagonali non comuni dei due angoli tetraedri sono ordinatamente:

$$
(21) \qquad \sigma^{(1)} \equiv x_2 + x_4 = 0 \,, \qquad \sigma^{(1)} \equiv x_2 - x_4 = 0 \,.
$$

17. Registriamo ancora come si corrispondano i triangoli principali nelle altre omografie di $\mathbf{C}^4$ in sè stessa.

---

il segno essendo il superiore o l'inferiore secondo che sia $p \equiv \pm 1 \pmod{4}$, e quindi sotto le stesse condizioni, $(k - k')^2 = \pm p$.

Introducendo l'espressione trigonometrica di η, si trovano facilmente per:

$$p = 3 \,,\ 7 \,,\ 11 \,,\ \ldots$$

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$-\text{sen}\,\frac{\pi}{7} + \text{sen}\,\frac{3\pi}{7} + \text{sen}\,\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{11} + \text{sen}\,\frac{3\pi}{11} + \text{sen}\,\frac{5\pi}{11} - \text{sen}\,\frac{7\pi}{11} + \text{sen}\,\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}\sqrt{11}$$

. . . .

e per

$$p = 5 \,,\ 13 \,,\ 17 \,,\ \ldots$$

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} - \cos\frac{5\pi}{13} - \cos\frac{7\pi}{13} - \cos\frac{9\pi}{13} - \cos\frac{11\pi}{13} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

$$-\cos\frac{\pi}{17} + \cos\frac{3\pi}{17} + \cos\frac{5\pi}{17} + \cos\frac{7\pi}{17} - \cos\frac{9\pi}{17} + \cos\frac{11\pi}{17} - \cos\frac{13\pi}{17} - \cos\frac{15\pi}{17} = \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

. . . .

. . . .

Si hanno:

$I_1\Lambda_1^{(1)}[\,1\,,25\,,\;9] \equiv \Lambda_4^{(2)}[20\,,24\,,12]\,,$ $\qquad I_2\Lambda_1^{(1)}[\,1\,,25\,,\;9] \equiv \Lambda_3^{(2)}[\,6\,,10\,,26]$

$I_1\Lambda_2^{(1)}[\,3\,,19\,,27] \equiv \Lambda_1^{(2)}[18\,,\;2\,,22]\,,$ $\qquad I_2\Lambda_2^{(1)}[\,3\,,19\,,26] \equiv \Lambda_2^{(2)}[\,4\,,16\,,\;8]$

$I_1\Lambda_3^{(1)}[\,5\,,13\,,17] \equiv \Lambda_2^{(2)}[16\,.\;8\,.\;4]\,,$ $\qquad I_2\Lambda_3^{(1)}[\,5\,,13\,,17] \equiv \Lambda_1^{(2)}[\,2\,,22\,,18]$

$I_1\Lambda_4^{(1)}[11\,,23\,,15] \equiv \Lambda_3^{(2)}[10\,,26\,,\;6]\,;$ $\qquad I_2\Lambda_4^{(1)}[11\,,23\,,15] \equiv \Lambda_4^{(2)}[24\,,12\,,20]$

$$I\Lambda_1^{(1)}[1\,,25\,,\;9] \equiv \Lambda_4^{(1)}[15\,,11\,,23]$$
$$I\Lambda_2^{(1)}[3\,,19\,,27] \equiv \Lambda_3^{(1)}[17\,,\;5\,,13]$$

$$I\Lambda_1^{(2)}[2\,,22\,,18] \equiv \Lambda_2^{(2)}[16\,,\;8\,,\;4]$$
$$I\Lambda_3^{(2)}[6\,,10\,,26] \equiv \Lambda_4^{(2)}[20\,,24\,;12]$$

$U_1\Lambda_1^{(1)}[\,1\,,25\,,\;9] \equiv \Lambda_1^{(2)}[22\,,18\,,\;2]\,,$ $\qquad U_1\Lambda_1^{(2)}[\,2\,,22\,,18] \equiv \Lambda_4^{(1)}[23\,,15\,,11]\,,$

$U_1\Lambda_2^{(1)}[\,3\,,19\,,27] \equiv \Lambda_4^{(2)}[24\,,12\,,20]\,,$ $\qquad U_1\Lambda_2^{(2)}[\,4\,,16\,,\;8] \equiv \Lambda_1^{(1)}[25\,,\;9\,,\;1]\,,$

$U_1\Lambda_3^{(1)}[\,5\,,13\,,17] \equiv \Lambda_3^{(2)}[26\,,\;6\,,10]\,,$ $\qquad U_1\Lambda_3^{(2)}[\,6\,,10\,,26] \equiv \Lambda_2^{(1)}[27\,,\;3\,,19]\,,$

$U_1\Lambda_4^{(1)}[11\,,23\,,15] \equiv \Lambda_2^{(2)}[\,4\,,16\,,\;8]\,,$ $\qquad U_1\Lambda_4^{(2)}[12\,,20\,,24] \equiv \Lambda_3^{(1)}[\,5\,,13\,,17]\,.$

Per gli effetti di U_2 basti rammentare che $U_2 = U_1^{-1}$.

18. Sebbene ciò non riguardi direttamente lo studio dei triangoli principali, crediamo che non sia privo di interesse il dir qualche cosa del gruppo di 16 rette in cui i due angoli tetraedri si intersecano scambievolmente. Perciò si osservi che nel piano σ_1 le due coppie di rette g_{13}^{11}, g_{24}^{11} e g_{14}^{22}, g_{23}^{22} si segano nei quattro punti:

$$S_1' \equiv g_{13}^{11} g_{14}^{22}\,,\quad \text{di coordinate}\quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = -2i : 1 - \sqrt{7} : \;\; 2i : 1 + \sqrt{7}\,,$$
$$S_1'' \equiv g_{24}^{11} g_{14}^{22}\,,\quad » \quad » \quad = \;\; 2i : 1 + \sqrt{7} : -2i : 1 - \sqrt{7}\,,$$
$$S_1''' \equiv g_{13}^{11} g_{23}^{22}\,,\quad » \quad » \quad = -2i : 1 + \sqrt{7} : \;\; 2i : 1 - \sqrt{7}\,,$$
$$S_1^{IV} \equiv g_{24}^{11} g_{23}^{22}\,,\quad » \quad » \quad = \;\; 2i : 1 - \sqrt{7} : -2i : 1 + \sqrt{7}\,;$$

e che, similmente, le due coppie g_{12}^{11}, g_{34}^{11} e g_{13}^{22}, g_{24}^{22} del piano σ_2 si tagliano scambievolmente nei quattro punti

$$S_2' \equiv g_{12}^{11} g_{13}^{22}\,,\quad \text{di coordinate}\quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : = 2 : \;\; 1 + \sqrt{7} : 2 : -(1 - \sqrt{7})\,,$$
$$S_2'' \equiv g_{34}^{11} g_{13}^{22}\,,\quad » \quad » \quad = 2 : \;\; 1 - \sqrt{7} : 2 : -(1 + \sqrt{7})\,,$$
$$S_2''' \equiv g_{12}^{11} g_{24}^{22}\,,\quad » \quad » \quad = 2 : -(1 - \sqrt{7}) : 2 : \;\; 1 + \sqrt{7}\,,$$
$$S_2^{IV} \equiv g_{34}^{11} g_{24}^{22}\,,\quad » \quad » \quad = 2 : -(1 + \sqrt{7}) : 2 : \;\; 1 - \sqrt{7}\,.$$

È evidente che le rette in cui le facce dell'angolo tetraedro $(A^{(1)})$ intersecano quelle dell'angolo tetraedro $(A^{(2)})$ sono pure le congiungenti dei quattro punti S_1 coi quattro punti S_2.

A indicare tali rette ci serviamo, per brevità, del simbolo g_{pq}, intendendo che il primo indice si riferisca al piano $\Lambda^{(1)}$ ed il secondo al piano $\Lambda^{(2)}$, onde $g_{pq} \equiv \Lambda_p^{(1)} \Lambda_q^{(2)}$. Codeste sedici rette si raggruppano variamente in quadrilateri nel modo seguente:

I) *Quadrilateri piani:*

$$g_{11} g_{13} g_{12} g_{14} \equiv S'_2 \, S'''_1 S'''_2 S'_1 \equiv \Lambda_1^{(1)} (\Lambda_1^{(2)} \Lambda_3^{(2)} \Lambda_2^{(2)} \Lambda_4^{(2)})$$
$$g_{11} g_{21} g_{41} g_{31} \equiv S'_2 \, S'_1 \, S''_2 \, S'_1 \equiv \Lambda_1^{(2)} (\Lambda_1^{(1)} \Lambda_2^{(1)} \Lambda_4^{(1)} \Lambda_3^{(1)})$$
$$g_{22} g_{24} g_{21} g_{23} \equiv S'''_2 S''_1 \, S'_2 \, S^{IV}_1 \equiv \Lambda_2^{(1)} (\Lambda_2^{(2)} \Lambda_4^{(2)} \Lambda_1^{(2)} \Lambda_3^{(2)})$$
$$g_{22} g_{12} g_{32} g_{42} \equiv S'''_2 S'''_1 S^{IV}_2 S^{IV}_1 \equiv \Lambda_2^{(2)} (\Lambda_2^{(1)} \Lambda_1^{(1)} \Lambda_3^{(1)} \Lambda_4^{(1)})$$
$$g_{33} g_{31} g_{34} g_{32} \equiv S''_2 \, S'_1 \, S^{IV}_2 S'''_1 \equiv \Lambda_3^{(1)} (\Lambda_3^{(2)} \Lambda_1^{(2)} \Lambda_4^{(2)} \Lambda_2^{(2)})$$
$$g_{33} g_{43} g_{23} g_{13} \equiv S''_2 \, S^{IV}_1 S'_2 \, S'_1 \equiv \Lambda_3^{(2)} (\Lambda_3^{(1)} \Lambda_4^{(1)} \Lambda_2^{(1)} \Lambda_1^{(1)})$$
$$g_{44} g_{42} g_{43} g_{41} \equiv S^{IV}_2 S^{IV}_1 S''_2 \, S''_1 \equiv \Lambda_4^{(1)} (\Lambda_4^{(2)} \Lambda_2^{(2)} \Lambda_3^{(2)} \Lambda_1^{(2)})$$
$$g_{44} g_{34} g_{14} g_{24} \equiv S^{IV}_2 S'_1 \, S'''_2 S''_1 \equiv \Lambda_4^{(2)} (\Lambda_4^{(1)} \Lambda_3^{(1)} \Lambda_1^{(1)} \Lambda_2^{(1)})$$

II) *Quadrilateri sghembi*, le cui facce sono piani Λ:

$$g_{11} g_{13} g_{33} g_{31} \equiv S'_2 \, S'''_1 S''_2 \, S'_1 \equiv \Lambda_1^{(1)} \Lambda_3^{(2)} \Lambda_3^{(1)} \Lambda_1^{(1)} \equiv \mathrm{I}$$
$$g_{11} g_{21} g_{24} g_{14} \equiv S'_2 \, S''_1 \, S'''_2 S'_1 \equiv \Lambda_1^{(2)} \Lambda_2^{(1)} \Lambda_4^{(2)} \Lambda_1^{(1)} \equiv \mathrm{II}$$
$$g_{22} g_{24} g_{44} g_{42} \equiv S'''_2 S''_1 \, S^{IV}_2 S^{IV}_1 \equiv \Lambda_2^{(1)} \Lambda_4^{(2)} \Lambda_4^{(1)} \Lambda_2^{(2)} \equiv \mathrm{III}$$
$$g_{22} g_{12} g_{13} g_{23} \equiv S'''_2 S'''_1 S'_2 \, S^{IV}_1 \equiv \Lambda_2^{(2)} \Lambda_1^{(1)} \Lambda_3^{(2)} \Lambda_2^{(1)} \equiv \mathrm{IV}$$
$$g_{33} g_{43} g_{42} g_{32} \equiv S''_2 \, S^{IV}_1 S^{IV}_2 S'''_1 \equiv \Lambda_3^{(2)} \Lambda_4^{(1)} \Lambda_2^{(2)} \Lambda_3^{(1)} \equiv \mathrm{V}$$
$$g_{44} g_{34} g_{31} g_{41} \equiv S^{IV}_2 S'_1 \, S''_2 \, S''_1 \equiv \Lambda_4^{(2)} \Lambda_3^{(1)} \Lambda_1^{(2)} \Lambda_4^{(1)} \equiv \mathrm{VI}$$
$$g_{23} g_{21} g_{41} g_{43} \equiv S'_2 \, S''_1 \, S''_2 \, S^{IV}_1 \equiv \Lambda_2^{(1)} \Lambda_1^{(2)} \Lambda_4^{(1)} \Lambda_3^{(2)} \equiv \mathrm{VII}$$
$$g_{34} g_{32} g_{12} g_{14} \equiv S^{IV}_2 S'''_1 S'''_2 S'_1 \equiv \Lambda_3^{(1)} \Lambda_2^{(2)} \Lambda_1^{(1)} \Lambda_4^{(2)} \equiv \mathrm{VIII}$$

III) *Quadrilateri sghembi*, in ciascuno dei quali sono piani Λ due facce sole, e le altre facce sono certi piani, che noi indichiamo coi simboli T:

$$g_{11} g_{21} g_{44} g_{34} \equiv S'_1 \, S'_2 \, S''_1 \, S^{IV}_2 \equiv \Lambda_1^{(2)} T_4^{(1)} \Lambda_4^{(2)} T_1^{(1)} \equiv \; 1^0$$
$$g_{11} g_{13} g_{32} g_{34} \equiv S'_1 \, S'_2 \, S'''_1 S^{IV}_2 \equiv \Lambda_1^{(1)} T_4^{(3)} \Lambda_3^{(1)} T_1^{(1)} \equiv \; 2^0$$
$$g_{11} g_{23} g_{43} g_{31} \equiv S'_1 \, S'_2 \, S^{IV}_1 S''_2 \equiv T_1^{(4)} \Lambda_3^{(2)} T_2^{(2)} \Lambda_1^{(2)} \equiv \; 3^0$$
$$g_{11} g_{23} g_{22} g_{14} \equiv S'_1 \, S'_2 \, S^{IV}_1 S'''_2 \equiv T_1^{(4)} \Lambda_3^{(2)} T_2^{(1)} \Lambda_1^{(1)} \equiv \; 4^0$$
$$g_{31} g_{41} g_{24} g_{14} \equiv S'_1 \, S''_2 \, S''_1 \, S'''_2 \equiv \Lambda_1^{(2)} T_3^{(3)} \Lambda_4^{(2)} T_2^{(3)} \equiv \; 5^0$$

$$g_{31}\,g_{33}\,g_{12}\,g_{11} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}'}\,\underset{2}{\mathrm{S}''}\,\underset{1}{\mathrm{S}'''}\,\underset{2}{\mathrm{S}'''} \equiv \Lambda_3^{(1)}\,T_3^{(1)}\,\Lambda_1^{(1)}\,T_2^{(3)} \equiv 6^0$$

$$g_{31}\,g_{43}\,g_{42}\,g_{34} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}'}\,\underset{2}{\mathrm{S}''}\,\underset{1}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}}\,\underset{2}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}} \equiv T_2^{(2)}\,\Lambda_4^{(1)}\,T_1^{(2)}\,\Lambda_3^{(1)} \equiv 7^0$$

$$g_{14}\,g_{22}\,g_{42}\,g_{34} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}'}\,\underset{2}{\mathrm{S}'''}\,\underset{1}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}}\,\underset{2}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}} \equiv T_2^{(4)}\,\Lambda_2^{(2)}\,T_1^{(2)}\,\Lambda_4^{(2)} \equiv 8^0$$

$$g_{21}\,g_{13}\,g_{33}\,g_{41} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}''}\,\underset{2}{\mathrm{S}'}\,\underset{1}{\mathrm{S}'''}\,\underset{2}{\mathrm{S}''} \equiv T_4^{(2)}\,\Lambda_3^{(2)}\,T_3^{(4)}\,\Lambda_1^{(2)} \equiv 9^0$$

$$g_{21}\,g_{13}\,g_{12}\,g_{24} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}''}\,\underset{2}{\mathrm{S}'}\,\underset{1}{\mathrm{S}'''}\,\underset{2}{\mathrm{S}'''} \equiv T_4^{(2)}\,\Lambda_1^{(1)}\,T_3^{(2)}\,\Lambda_2^{(1)} \equiv 10^0$$

$$g_{21}\,g_{23}\,g_{42}\,g_{44} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}''}\,\underset{2}{\mathrm{S}'}\,\underset{1}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}}\,\underset{2}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}} \equiv \Lambda_2^{(1)}\,T_1^{(3)}\,\Lambda_4^{(1)}\,T_4^{(1)} \equiv 11^0$$

$$g_{41}\,g_{33}\,g_{32}\,g_{44} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}''}\,\underset{2}{\mathrm{S}''}\,\underset{1}{\mathrm{S}'''}\,\underset{2}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}} \equiv T_3^{(4)}\,\Lambda_3^{(1)}\,T_4^{(1)}\,\Lambda_4^{(1)} \equiv 12^0$$

$$g_{41}\,g_{43}\,g_{22}\,g_{21} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}''}\,\underset{2}{\mathrm{S}''}\,\underset{1}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}}\,\underset{2}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}} \equiv \Lambda_4^{(1)}\,T_2^{(1)}\,\Lambda_2^{(1)}\,T_3^{(3)} \equiv 13^0$$

$$g_{24}\,g_{12}\,g_{32}\,g_{44} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}''}\,\underset{2}{\mathrm{S}'''}\,\underset{1}{\mathrm{S}'''}\,\underset{2}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}} \equiv T_3^{(2)}\,\Lambda_2^{(2)}\,T_4^{(4)}\,\Lambda_4^{(2)} \equiv 14^0$$

$$g_{13}\,g_{23}\,g_{42}\,g_{32} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}'''}\,\underset{2}{\mathrm{S}'}\,\underset{1}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}}\,\underset{2}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}} \equiv \Lambda_3^{(2)}\,T_1^{(3)}\,\Lambda_2^{(2)}\,T_4^{(3)} \equiv 15^0$$

$$g_{33}\,g_{43}\,g_{22}\,g_{12} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}'''}\,\underset{2}{\mathrm{S}''}\,\underset{1}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}}\,\underset{2}{\mathrm{S}'''} \equiv \Lambda_3^{(2)}\,T_2^{(1)}\,\Lambda_2^{(2)}\,T_3^{(1)} \equiv 16^0$$

IV) *Quadrilateri sghembi*, le cui facce sono piani T:

$$g_{11}\,g_{34}\,g_{42}\,g_{23} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}'}\,\underset{2}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}}\,\underset{1}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}}\,\underset{2}{\mathrm{S}'} \equiv T_1^{(1)}\,T_1^{(2)}\,T_1^{(3)}\,T_1^{(4)}$$

$$g_{22}\,g_{43}\,g_{31}\,g_{14} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}}\,\underset{2}{\mathrm{S}''}\,\underset{1}{\mathrm{S}'}\,\underset{2}{\mathrm{S}'''} \equiv T_2^{(1)}\,T_2^{(2)}\,T_2^{(3)}\,T_2^{(4)}$$

$$g_{33}\,g_{12}\,g_{24}\,g_{41} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}'''}\,\underset{2}{\mathrm{S}'''}\,\underset{1}{\mathrm{S}''}\,\underset{2}{\mathrm{S}''} \equiv T_3^{(1)}\,T_3^{(2)}\,T_3^{(3)}\,T_3^{(4)}$$

$$g_{44}\,g_{21}\,g_{13}\,g_{32} \equiv \underset{1}{\mathrm{S}''}\,\underset{2}{\mathrm{S}'}\,\underset{1}{\mathrm{S}'''}\,\underset{2}{\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}} \equiv T_4^{(1)}\,T_4^{(2)}\,T_4^{(3)}\,T_4^{(4)}$$

I piani $T_p^{(r)}$ che insieme ai piani Λ entrano per coppie a formare le facce dei quadrilateri del III gruppo e che formano tutte le facce di quelli del gruppo IV, hanno le seguenti equazioni:

$$T_1\left\{\begin{array}{l} T_1^{(1)} \equiv g_{11}\,g_{34} \equiv 4ix_1 - (1-\sqrt{7})x_2 - 4ix_3 - (1+\sqrt{7})x_4 = 0\,, \\ T_1^{(2)} \equiv g_{34}\,g_{42} \equiv 4x_1 + (1+\sqrt{7})x_2 + 4x_3 - (1-\sqrt{7})x_4 = 0\,, \\ T_1^{(3)} \equiv g_{42}\,g_{23} \equiv 4ix_1 + (1-\sqrt{7})x_2 - 4ix_3 + (1+\sqrt{7})x_4 = 0\,, \\ T_1^{(4)} \equiv g_{23}\,g_{11} \equiv 4x_1 - (1+\sqrt{7})x_2 + 4x_3 + (1-\sqrt{7})x_4 = 0\,; \end{array}\right.$$

$$T_2\left\{\begin{array}{l} T_2^{(1)} \equiv g_{22}\,g_{43} \equiv 3ix_1 - (1+\sqrt{7})x_2 - 3ix_3 - (1-\sqrt{7})x_4 = 0\,, \\ T_2^{(2)} \equiv g_{43}\,g_{31} \equiv 3x_1 + (1+\sqrt{7})x_2 + 3x_3 - (1-\sqrt{7})x_4 = 0\,, \\ T_2^{(3)} \equiv g_{31}\,g_{14} \equiv 3ix_1 + (1+\sqrt{7})x_2 - 3ix_3 + (1-\sqrt{7})x_4 = 0\,, \\ T_2^{(4)} \equiv g_{14}\,g_{22} \equiv 3x_1 - (1+\sqrt{7})x_2 + 3x_3 + (1-\sqrt{7})x_4 = 0\,; \end{array}\right.$$

$$T_3\left\{\begin{array}{l} T_3^{(1)} \equiv g_{33}\,g_{12} \equiv 4ix_1 - (1+\sqrt{7})x_2 - 4ix_3 - (1-\sqrt{7})x_4 = 0\,, \\ T_3^{(2)} \equiv g_{12}\,g_{24} \equiv 4x_1 + (1-\sqrt{7})x_2 + 4x_3 - (1+\sqrt{7})x_4 = 0\,, \\ T_3^{(3)} \equiv g_{24}\,g_{41} \equiv 4ix_1 + (1+\sqrt{7})x_2 - 4ix_3 + (1-\sqrt{7})x_4 = 0\,, \\ T_3^{(4)} \equiv g_{41}\,g_{33} \equiv 4x_1 - (1-\sqrt{7})x_2 + 4x_3 + (1+\sqrt{7})x_4 = 0\,, \end{array}\right.$$

$$T_4 \begin{cases} T_4^{(1)} \equiv g_{44}\, g_{21} \equiv 3ix_1 - (1-\sqrt{7})x_2 - 3ix_3 - (1+\sqrt{7})x_4 = 0\,, \\ T_4^{(2)} \equiv g_{21}\, g_{13} \equiv 3x_1 + (1-\sqrt{7})x_2 + 3x_3 - (1+\sqrt{7})x_4 = 0\,, \\ T_4^{(3)} \equiv g_{13}\, g_{32} \equiv 3ix_1 + (1-\sqrt{7})x_2 - 3ix_3 + (1+\sqrt{7})x_4 = 0\,, \\ T_4^{(4)} \equiv g_{32}\, g_{44} \equiv 3x_1 - (1-\sqrt{7})x_2 + 3x_3 + (1+\sqrt{7})x_4 = 0\,. \end{cases}$$

19. Da queste equazioni risulta ad evidenza che *i sedici piani T passano ad otto ad otto per i vertici* $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ *dei coni bi-projettanti la quartica.* Ma ciò scaturisce ancora dalle seguenti considerazioni. È facile riconoscere che

$$\mathbf{J}_1 \begin{pmatrix} g_{11}\, g_{12}\, g_{13}\, g_{14} \\ g_{21}\, g_{22}\, g_{23}\, g_{24} \\ g_{31}\, g_{32}\, g_{33}\, g_{34} \\ g_{41}\, g_{42}\, g_{43}\, g_{44} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g_{34}\, g_{33}\, g_{32}\, g_{31} \\ g_{44}\, g_{43}\, g_{42}\, g_{41} \\ g_{14}\, g_{13}\, g_{12}\, g_{11} \\ g_{24}\, g_{23}\, g_{22}\, g_{21} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J}_2 \begin{pmatrix} g_{11}\, g_{12}\, g_{13}\, g_{14} \\ g_{21}\, g_{22}\, g_{23}\, g_{24} \\ g_{31}\, g_{32}\, g_{33}\, g_{34} \\ g_{41}\, g_{42}\, g_{43}\, g_{44} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g_{23}\, g_{24}\, g_{21}\, g_{22} \\ g_{13}\, g_{14}\, g_{11}\, g_{12} \\ g_{43}\, g_{44}\, g_{41}\, g_{42} \\ g_{33}\, g_{34}\, g_{31}\, g_{32} \end{pmatrix}.$$

Ponendo mente alle definizioni dei piani T, seguono da questi quadri i seguenti:

$$\mathbf{J}_1 \begin{pmatrix} T_1(g_{11}\, g_{34}\, g_{42}\, g_{23}) \\ T_2(g_{23}\, g_{43}\, g_{31}\, g_{14}) \\ T_3(g_{33}\, g_{12}\, g_{24}\, g_{41}) \\ T_4(g_{44}\, g_{21}\, g_{13}\, g_{32}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} T_1(g_{34}\, g_{11}\, g_{23}\, g_{42}) \\ T_2(g_{43}\, g_{22}\, g_{14}\, g_{31}) \\ T_3(g_{13}\, g_{33}\, g_{41}\, g_{24}) \\ T_4(g_{21}\, g_{44}\, g_{32}\, g_{13}) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J}_2 \begin{pmatrix} T_1(g_{11}\, g_{34}\, g_{42}\, g_{23}) \\ T_2(g_{22}\, g_{43}\, g_{31}\, g_{14}) \\ T_3(g_{33}\, g_{12}\, g_{24}\, g_{41}) \\ T_4(g_{44}\, g_{21}\, g_{13}\, g_{32}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} T_1(g_{23}\, g_{42}\, g_{33}\, g_{11}) \\ T_2(g_{14}\, g_{31}\, g_{43}\, g_{22}) \\ T_3(g_{41}\, g_{24}\, g_{12}\, g_{33}) \\ T_4(g_{32}\, g_{13}\, g_{21}\, g_{44}) \end{pmatrix}$$

Ora, rammentando che $\mathbf{O}_1$ è il centro dell'omologia $\mathbf{J}_1$, ed $\mathbf{O}_2$ quello di $\mathbf{J}_2$, apparisce immediatamente che i piani

$$T_1^{(1)},\ T_2^{(1)},\ T_3^{(1)},\ T_4^{(1)},\ T_1^{(3)},\ T_2^{(3)},\ T_3^{(3)},\ T_4^{(3)} \text{ passano per } \mathbf{O}_1\,,$$

$$T_1^{(2)},\ T_2^{(2)},\ T_3^{(2)},\ T_4^{(2)},\ T_1^{(4)},\ T_2^{(4)},\ T_3^{(4)},\ T_4^{(4)} \quad \text{»} \quad \text{»} \ \mathbf{O}_2\,.$$

Inoltre, se indichiamo con $\mathbf{e}'_h \equiv \mathrm{S}''_h \mathrm{S}'''_h$ ed $\mathbf{e}''_h \equiv \mathrm{S}'_h \mathrm{S}_h^{\mathrm{IV}}$ le due diagonali diverse da $\mathbf{d}$ del quadrilatero delle rette g situate nel piano σ_h, si vede che i piani

$$T_3^{(2)},\ T_3^{(4)},\ T_4^{(2)},\ T_4^{(4)} \text{ passano per } \mathbf{e}'_1\,, \text{ e } \ T_1^{(2)},\ T_1^{(4)},\ T_2^{(2)},\ T_2^{(4)} \text{ passano per } \mathbf{e}''_1\,;$$

$$T_2^{(1)},\ T_2^{(3)},\ T_3^{(1)},\ T_3^{(3)} \quad \text{»} \quad \text{»} \ \mathbf{e}'_2\,, \text{ e } \ T_1^{(1)},\ T_1^{(3)},\ T_4^{(1)},\ T_4^{(3)} \quad \text{»} \quad \text{»} \ \mathbf{e}''_2$$

ossia, *i sedici piani T passano a quattro a quattro per le diagonali, diverse da* $\mathbf{d}$, *dei due quadrilateri di rette* g *situate nei piani* σ_1 *e* σ_2. *Il quadrangolo* (S_h) *giacente nel piano* σ_h *possiede, oltre i punti diagonali* $\mathrm{A}^{(1)}$ *ed* $\mathrm{A}^{(2)}$, *anche il punto* $\mathbf{O}_k$ $(\mathrm{h} \neq \mathrm{k} = 1, 2)$ *per terzo punto diagonale.*

20. Registriamo il modo di corrispondersi delle rette g_{rs} per le involuzioni $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$, e per le omografie $\mathbf{U}$. Si hanno:

$$\mathbf{I}_1 \begin{pmatrix} g_{11}\, g_{12}\, g_{13}\, g_{14} \\ g_{21}\, g_{22}\, g_{23}\, g_{24} \\ g_{31}\, g_{31}\, g_{33}\, g_{34} \\ g_{41}\, g_{42}\, g_{43}\, g_{44} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g_{24}\, g_{34}\, g_{44}\, g_{14} \\ g_{21}\, g_{31}\, g_{41}\, g_{11} \\ g_{22}\, g_{32}\, g_{42}\, g_{12} \\ g_{23}\, g_{33}\, g_{43}\, g_{13} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_2 \begin{pmatrix} g_{11}\, g_{12}\, g_{13}\, g_{14} \\ g_{21}\, g_{22}\, g_{23}\, g_{24} \\ g_{31}\, g_{32}\, g_{33}\, g_{34} \\ g_{41}\, g_{42}\, g_{43}\, g_{44} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g_{33}\, g_{23}\, g_{13}\, g_{43} \\ g_{32}\, g_{22}\, g_{12}\, g_{42} \\ g_{31}\, g_{21}\, g_{11}\, g_{41} \\ g_{34}\, g_{24}\, g_{14}\, g_{44} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_1 \begin{Bmatrix} g_{11}\,g_{12}\,g_{13}\,g_{14} \\ g_{21}\,g_{22}\,g_{23}\,g_{24} \\ g_{31}\,g_{32}\,g_{33}\,g_{21} \\ g_{41}\,g_{42}\,g_{43}\,g_{44} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} g_{41}\,g_{11}\,g_{21}\,g_{31} \\ g_{44}\,g_{14}\,g_{24}\,g_{54} \\ g_{43}\,g_{13}\,g_{23}\,g_{33} \\ g_{42}\,g_{12}\,g_{22}\,g_{34} \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{U}_2 \begin{Bmatrix} g_{11}\,g_{12}\,g_{13}\,g_{14} \\ g_{21}\,g_{22}\,g_{23}\,g_{24} \\ g_{31}\,g_{32}\,g_{33}\,g_{34} \\ g_{41}\,g_{42}\,g_{43}\,g_{44} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} g_{12}\,g_{42}\,g_{32}\,g_{22} \\ g_{13}\,g_{43}\,g_{33}\,g_{23} \\ g_{14}\,g_{44}\,g_{34}\,g_{24} \\ g_{41}\,g_{42}\,g_{43}\,g_{24} \end{Bmatrix}$$

e quindi *)

$$\mathbf{I} \begin{Bmatrix} g_{11}\,g_{12}\,g_{13}\,g_{14} \\ g_{21}\,g_{22}\,g_{23}\,g_{24} \\ g_{31}\,g_{32}\,g_{33}\,g_{34} \\ g_{41}\,g_{42}\,g_{43}\,g_{44} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} g_{42}\,g_{41}\,g_{44}\,g_{43} \\ g_{32}\,g_{31}\,g_{34}\,g_{33} \\ g_{22}\,g_{21}\,g_{24}\,g_{23} \\ g_{12}\,g_{11}\,g_{14}\,g_{13} \end{Bmatrix}$$

Ora, come può avvertirsi una dissimiglianza di *tipo* fra i tetraedri T_1, T_3 e T_2, T_4 da un semplice sguardo alle equazioni loro, si rileva ancora un fatto geometrico che pone in maggior rilievo tale distinzione. Ed in vero da ognuna delle omologie $\mathbf{J}_1$ e $\mathbf{J}_2$ e dall'involuzione bi-assiale $\mathbf{I}$ ogni quadrilatero T è mutato in sè medesimo, ciò non succede per le altre omografie: ma sono mutati ciascuno in sè stesso i due quadrilateri T_2 e T_3, mentre sono fra loro scambiati T_1 e T_3 **). Si rileva in fatti che

$$\mathbf{I}_1 \begin{Bmatrix} T_1(g_{11}\,g_{34}\,g_{42}\,g_{23}) \\ T_2(g_{22}\,g_{43}\,g_{31}\,g_{14}) \\ T_3(g_{33}\,g_{12}\,g_{24}\,g_{41}) \\ T_4(g_{44}\,g_{21}\,g_{13}\,g_{32}) \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} T_3(g_{24}\,g_{12}\,g_{33}\,g_{41}) \\ T_2(g_{31}\,g_{43}\,g_{22}\,g_{14}) \\ T_1(g_{42}\,g_{34}\,g_{11}\,g_{23}) \\ T_4(g_{13}\,g_{21}\,g_{44}\,g_{32}) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 \begin{Bmatrix} T_1(g_{11}\,g_{34}\,g_{42}\,g_{23}) \\ T_2(g_{22}\,g_{43}\,g_{31}\,g_{14}) \\ T_3(g_{33}\,g_{12}\,g_{24}\,g_{41}) \\ T_4(g_{44}\,g_{21}\,g_{13}\,g_{32}) \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} T_3(g_{33}\,g_{41}\,g_{24}\,g_{12}) \\ T_2(g_{22}\,g_{14}\,g_{31}\,g_{43}) \\ T_1(g_{11}\,g_{23}\,g_{42}\,g_{34}) \\ T_4(g_{44}\,g_{32}\,g_{13}\,g_{21}) \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{U}_1 \begin{Bmatrix} T_1(g_{11}\,g_{34}\,g_{42}\,g_{23}) \\ T_2(g_{22}\,g_{43}\,g_{31}\,g_{14}) \\ T_3(g_{33}\,g_{12}\,g_{24}\,g_{41}) \\ T_4(g_{44}\,g_{21}\,g_{13}\,g_{32}) \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} T_3(g_{41}\,g_{33}\,g_{12}\,g_{24}) \\ T_2(g_{14}\,g_{22}\,g_{43}\,g_{32}) \\ T_1(g_{23}\,g_{11}\,g_{34}\,g_{42}) \\ T_4(g_{32}\,g_{44}\,g_{21}\,g_{13}) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 \begin{Bmatrix} T_1(g_{11}\,g_{34}\,g_{42}\,g_{23}) \\ T_2(g_{22}\,g_{43}\,g_{31}\,g_{14}) \\ T_3(g_{33}\,g_{12}\,g_{24}\,g_{41}) \\ T_4(g_{44}\,g_{21}\,g_{13}\,g_{32}) \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} T_3(g_{12}\,g_{24}\,g_{41}\,g_{33}) \\ T_2(g_{43}\,g_{31}\,g_{14}\,g_{22}) \\ T_1(g_{34}\,g_{42}\,g_{23}\,g_{11}) \\ T_4(g_{21}\,g_{13}\,g_{32}\,g_{44}) \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{I} \begin{Bmatrix} T_1(g_{11}\,g_{34}\,g_{42}\,g_{23}) \\ T_2(g_{22}\,g_{43}\,g_{31}\,g_{14}) \\ T_3(g_{33}\,g_{12}\,g_{24}\,g_{41}) \\ T_4(g_{44}\,g_{21}\,g_{13}\,g_{32}) \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} T_1(g_{42}\,g_{23}\,g_{11}\,g_{34}) \\ T_2(g_{31}\,g_{14}\,g_{22}\,g_{43}) \\ T_3(g_{24}\,g_{41}\,g_{33}\,g_{12}) \\ T_4(g_{13}\,g_{32}\,g_{44}\,g_{21}) \end{Bmatrix}.$$

21. Riguardo ai quadrilateri o tetraedri del 2° gruppo possiamo facilmente riconoscere che sono fra loro scambievolmente inscritti e circoscritti i tetraedri

I e III , II e V , IV e VI , VII ed VIII .

Ora applicando a questi tetraedri la involuzione assiale $\mathbf{I}$ si trova che i tetraedri di una medesima coppia si corrispondono in essa.

---

*) Perchè, infatti, $\mathbf{I} = \mathbf{I}_r\, \mathbf{I}_s = \mathbf{J}_r\, \mathbf{J}_s = \mathbf{U}_r^2 = \mathbf{U}_s^2$.

**) Qual'è l'intima ragione di queste proprietà essenzialmente diverse tra due figure di eguale origine e di natura apparentemente omogenea ?

Dunque l'*involuzione assiale* **I** *accoppia i tetraedri del secondo gruppo per modo che due tetraedri corrispondenti sono fra loro scambievolmente inscritti e circoscritti.*

Le altre omografie fondamentali dànno rispettivamente:

$$
\begin{array}{llll}
\mathbf{I}_1 & \mathrm{I}\,(g_{11}\,g_{13}\,g_{33}\,g_{31}) \equiv \mathrm{III}\,(g_{24}\,g_{44}\,g_{42}\,g_{22})\,, & \mathbf{I}_2 & \mathrm{I}\,(g_{11}\,g_{13}\,g_{33}\,g_{31}) \equiv \mathrm{I}\,(g_{33}\,g_{13}\,g_{11}\,g_{31})\,, \\
\mathbf{I}_1 & \mathrm{II}\,(g_{11}\,g_{21}\,g_{24}\,g_{14}) \equiv \mathrm{II}\,(g_{24}\,g_{21}\,g_{11}\,g_{14})\,, & \mathbf{I}_2 & \mathrm{II}\,(g_{11}\,g_{21}\,g_{24}\,g_{14}) \equiv \mathrm{V}\,(g_{33}\,g_{32}\,g_{42}\,g_{43})\,, \\
\mathbf{I}_1 & \mathrm{IV}\,(g_{22}\,g_{12}\,g_{13}\,g_{23}) \equiv \mathrm{VI}\,(g_{31}\,g_{34}\,g_{44}\,g_{31})\,, & \mathbf{I}_2 & \mathrm{III}\,(g_{22}\,g_{24}\,g_{44}\,g_{42}) \equiv \mathrm{III}\,(g_{22}\,g_{42}\,g_{44}\,g_{24})\,, \\
\mathbf{I}_1 & \mathrm{V}\,(g_{33}\,g_{43}\,g_{42}\,g_{32}) \equiv \mathrm{V}\,(g_{42}\,g_{43}\,g_{33}\,g_{32})\,, & \mathbf{I}_2 & \mathrm{IV}\,(g_{22}\,g_{12}\,g_{13}\,g_{23}) \equiv \mathrm{IV}\,(g_{22}\,g_{23}\,g_{13}\,g_{12})\,, \\
\mathbf{I}_1 & \mathrm{VII}\,(g_{23}\,g_{21}\,g_{41}\,g_{43}) \equiv \mathrm{VII}\,(g_{41}\,g_{21}\,g_{23}\,g_{43})\,, & \mathbf{I}_2 & \mathrm{VI}\,(g_{44}\,g_{34}\,g_{31}\,g_{41}) \equiv \mathrm{VI}\,(g_{44}\,g_{41}\,g_{31}\,g_{34})\,, \\
\mathbf{I}_1 & \mathrm{VIII}\,(g_{34}\,g_{32}\,g_{12}\,g_{14}) \equiv \mathrm{VIII}\,(g_{12}\,g_{32}\,g_{34}\,g_{14})\,, & \mathbf{I}_2 & \mathrm{VII}\,(g_{23}\,g_{21}\,g_{41}\,g_{43}) \equiv \mathrm{VIII}\,(g_{12}\,g_{32}\,g_{34}\,g_{14})\,:
\end{array}
$$

e da queste ricavasi, naturalmente,

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\mathbf{I} & \mathrm{I}\,(g_{11}\,g_{13}\,g_{33}\,g_{31}) \equiv \mathrm{III}\,(g_{42}\,g_{44}\,g_{24}\,g_{22})\,, \\
\mathbf{I} & \mathrm{II}\,(g_{11}\,g_{21}\,g_{24}\,g_{14}) \equiv \mathrm{V}\,(g_{42}\,g_{32}\,g_{33}\,g_{43})\,, \\
\mathbf{I} & \mathrm{IV}\,(g_{22}\,g_{12}\,g_{13}\,g_{23}) \equiv \mathrm{VI}\,(g_{31}\,g_{41}\,g_{44}\,g_{34})\,, \\
\mathbf{I} & \mathrm{VII}\,(g_{23}\,g_{21}\,g_{41}\,g_{43}) \equiv \mathrm{VIII}\,(g_{34}\,g_{32}\,g_{12}\,g_{14})\,,
\end{array}
\right.
$$

come testè si era dichiarato. E poi

$$
\mathbf{U}_1 \left\{
\begin{array}{r}
\mathrm{I}\,(g_{11}\,g_{13}\,g_{33}\,g_{31}) \equiv \mathrm{VII}\,(g_{41}\,g_{21}\,g_{23}\,g_{43})\,, \\
\mathrm{II}\,(g_{11}\,g_{21}\,g_{24}\,g_{14}) \equiv \mathrm{VI}\,(g_{41}\,g_{44}\,g_{34}\,g_{31})\,, \\
\mathrm{III}\,(g_{22}\,g_{24}\,g_{44}\,g_{42}) \equiv \mathrm{VIII}\,(g_{14}\,g_{34}\,g_{32}\,g_{12})\,, \\
\mathrm{IV}\,(g_{22}\,g_{12}\,g_{13}\,g_{23}) \equiv \mathrm{II}\,(g_{14}\,g_{11}\,g_{21}\,g_{24})\,, \\
\mathrm{V}\,(g_{33}\,g_{43}\,g_{42}\,g_{32}) \equiv \mathrm{IV}\,(g_{23}\,g_{22}\,g_{12}\,g_{13})\,, \\
\mathrm{VI}\,(g_{44}\,g_{34}\,g_{31}\,g_{41}) \equiv \mathrm{V}\,(g_{32}\,g_{33}\,g_{43}\,g_{42})\,, \\
\mathrm{VII}\,(g_{23}\,g_{21}\,g_{41}\,g_{43}) \equiv \mathrm{III}\,(g_{24}\,g_{44}\,g_{42}\,g_{22})\,, \\
\mathrm{VIII}\,(g_{34}\,g_{32}\,g_{12}\,g_{14}) \equiv \mathrm{I}\,(g_{33}\,g_{13}\,g_{11}\,g_{31})\,;
\end{array}
\right.
$$

mentre per gli effetti di $\mathbf{U}_2$ basterà rammentare, come al solito, che $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1^{-1}$.

Finalmente

$$
\mathbf{J}_1 \left\{
\begin{array}{r}
\mathrm{I}\,(g_{11}\,g_{13}\,g_{33}\,g_{31}) \equiv \mathrm{VIII}\,(g_{34}\,g_{32}\,g_{12}\,g_{14})\,, \\
\mathrm{II}\,(g_{11}\,g_{21}\,g_{24}\,g_{14}) \equiv \mathrm{VI}\,(g_{34}\,g_{44}\,g_{41}\,g_{31})\,, \\
\mathrm{III}\,(g_{22}\,g_{24}\,g_{44}\,g_{42}) \equiv \mathrm{VII}\,(g_{43}\,g_{41}\,g_{21}\,g_{23})\,, \\
\mathrm{IV}\,(g_{22}\,g_{12}\,g_{13}\,g_{23}) \equiv \mathrm{V}\,(g_{43}\,g_{33}\,g_{32}\,g_{42})\,;
\end{array}
\right.
$$

e

$$
\mathbf{J}_2 \left\{
\begin{array}{r}
\mathrm{I}\,(g_{11}\,g_{13}\,g_{33}\,g_{31}) \equiv \mathrm{VII}\,(g_{23}\,g_{21}\,g_{41}\,g_{43})\,, \\
\mathrm{II}\,(g_{11}\,g_{21}\,g_{24}\,g_{14}) \equiv \mathrm{IV}\,(g_{23}\,g_{13}\,g_{12}\,g_{22})\,, \\
\mathrm{III}\,(g_{22}\,g_{24}\,g_{44}\,g_{42}) \equiv \mathrm{VIII}\,(g_{14}\,g_{12}\,g_{32}\,g_{34})\,, \\
\mathrm{V}\,(g_{33}\,g_{43}\,g_{42}\,g_{32}) \equiv \mathrm{VI}\,(g_{41}\,g_{31}\,g_{34}\,g_{44})\,.
\end{array}
\right.
$$

Con queste ultime e colle precedenti si controllano, come è naturale, le identità già avvertite $\mathbf{J}_r\mathbf{J}_s = \mathbf{U}_h^2 = \mathbf{I}_p\mathbf{I}_q = \mathbf{I}$.

Omettiamo di considerare le configurazioni di tetraedri del terzo gruppo perchè non sembrano presentare proprietà notevoli.

§ IV. — I quadrangoli principali

22. Per $n=4$ si ha $\mu=80$ ed $\mathfrak{N}(4)=72$. Detta allora ν una radice quinta primitiva dell'unità, onde sarà

$$1+\nu+\nu^2+\nu^3+\nu^4=0\ ,$$

e indicate le radici *sedicesime* dell'unità nel quadro seguente:

$$\zeta=\cos\frac{\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=\zeta$$

$$\zeta^2=\cos\frac{2\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{8}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\zeta^2$$

$$\zeta^3=\cos\frac{3\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{4+\sqrt{8}}-\sqrt{4-\sqrt{8}}+i\left(\sqrt{4+\sqrt{8}}+\sqrt{4-\sqrt{8}}\right)}{4}=\zeta^3$$

$$\zeta^4=\cos\frac{4\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{8}=i=\zeta^4$$

$$\zeta^5=\cos\frac{5\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=i\zeta$$

$$\zeta^6=\cos\frac{6\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{6\pi}{8}=-\frac{1-i}{\sqrt{2}}=i\zeta^2$$

$$\zeta^7=\cos\frac{7\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{8}=-\frac{\sqrt{4+\sqrt{8}}+\sqrt{4-\sqrt{8}}-i\left(\sqrt{4+\sqrt{8}}-\sqrt{4-\sqrt{8}}\right)}{4}=i\zeta^3$$

$$\zeta^8=\cos\frac{8\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{8\pi}{8}=-1=i\zeta^4$$

$$\zeta^9=\cos\frac{9\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{9\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=-\zeta$$

$$\zeta^{10}=\cos\frac{10\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{10\pi}{8}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}=-\zeta^2$$

$$\zeta^{11}=\cos\frac{11\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{8}=-\frac{\sqrt{4+\sqrt{8}}-\sqrt{4-\sqrt{8}}+i\left(\sqrt{4+\sqrt{8}}+\sqrt{4-\sqrt{8}}\right)}{4}=-\zeta^3$$

$$\zeta^{12}=\cos\frac{12\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{12\pi}{8}=-i=-\zeta^4$$

$$\zeta^{13}=\cos\frac{13\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{13\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=-i\zeta$$

$$\zeta^{14}=\cos\frac{14\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{14\pi}{8}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}=-i\zeta^2$$

$$\zeta^{15}=\cos\frac{15\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{15\pi}{8}=\frac{\sqrt{4+\sqrt{8}}+\sqrt{4-\sqrt{8}}-i\left(\sqrt{4+\sqrt{8}}-\sqrt{4-\sqrt{8}}\right)}{4}=-i\zeta^3$$

$$\zeta^{16}=\cos\frac{16\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{16\pi}{8}=1=-i\zeta^4$$

tutte le radici *ottantesime* dell'unità saranno

$\varepsilon = \nu\zeta$	$\varepsilon^2 = \nu^2\zeta^2$	$\varepsilon^3 = \nu^3\zeta^3$	$\varepsilon^4 = i\nu^4$	$\varepsilon^5 = i\zeta$
$\varepsilon^6 = i\nu\zeta^2$	$\varepsilon^7 = i\nu^2\zeta^3$	$\varepsilon^8 = -\nu^3$	$\varepsilon^9 = -\nu^4\zeta$	$\varepsilon^{10} = -\zeta^2$
$\varepsilon^{11} = -\nu\zeta^3$	$\varepsilon^{12} = -i\nu^2$	$\varepsilon^{13} = -i\nu^3\zeta$	$\varepsilon^{14} = -i\nu^4\zeta^2$	$\varepsilon^{15} = -i\zeta^3$
$\varepsilon^{16} = \nu$	$\varepsilon^{17} = \nu^2\zeta$	$\varepsilon^{18} = \nu^3\zeta^2$	$\varepsilon^{19} = \nu^4\zeta^8$	$\varepsilon^{20} = i$
$\varepsilon^{21} = i\nu\zeta$	$\varepsilon^{22} = i\nu^2\zeta^2$	$\varepsilon^{23} = i\nu^3\zeta^3$	$\varepsilon^{24} = -\nu^4$	$\varepsilon^{25} = -\zeta$
$\varepsilon^{26} = -\nu\zeta^2$	$\varepsilon^{27} = -\nu^2\zeta^3$	$\varepsilon^{28} = -i\nu^3$	$\varepsilon^{29} = -i\nu^4\zeta$	$\varepsilon^{30} = -i\zeta^2$
$\varepsilon^{31} = -i\nu\zeta^3$	$\varepsilon^{32} = \nu^2$	$\varepsilon^{33} = \nu^3\zeta$	$\varepsilon^{34} = \nu^4\zeta^2$	$\varepsilon^{35} = \zeta^3$
$\varepsilon^{36} = i\nu$	$\varepsilon^{37} = i\nu^2\zeta$	$\varepsilon^{38} = i\nu^3\zeta^2$	$\varepsilon^{39} = i\nu^4\zeta^3$	$\varepsilon^{40} = -1$
$\varepsilon^{41} = -\nu\zeta$	$\varepsilon^{42} = -\nu^2\zeta^2$	$\varepsilon^{43} = -\nu^3\zeta^3$	$\varepsilon^{44} = -i\nu^4$	$\varepsilon^{45} = -i\zeta$
$\varepsilon^{46} = -i\nu\zeta^2$	$\varepsilon^{47} = -i\nu^2\zeta^3$	$\varepsilon^{49} = \nu^3$	$\varepsilon^{49} = \nu^4\zeta$	$\varepsilon^{50} = \zeta^2$
$\varepsilon^{51} = \nu\zeta^3$	$\varepsilon^{52} = i\nu^2$	$\varepsilon^{53} = -i\nu^3\zeta$	$\varepsilon^{54} = i\nu^4\zeta^2$	$\varepsilon^{55} = i\zeta^3$
$\varepsilon^{56} = -\nu$	$\varepsilon^{57} = -\nu^2\zeta$	$\varepsilon^{58} = -\nu^3\zeta^2$	$\varepsilon^{59} = -\nu^4\zeta^3$	$\varepsilon^{60} = -i$
$\varepsilon^{61} = -i\nu\zeta$	$\varepsilon^{62} = -i\nu^2\zeta^2$	$\varepsilon^{63} = -i\nu^3\zeta^3$	$\varepsilon^{64} = \nu^4$	$\varepsilon^{65} = \zeta$
$\varepsilon^{66} = \nu\zeta^2$	$\varepsilon^{67} = \nu^2\zeta^3$	$\varepsilon^{68} = i\nu^3$	$\varepsilon^{69} = -i\nu^4\zeta$	$\varepsilon^{70} = i\zeta^3$
$\varepsilon^{71} = i\nu\zeta^3$	$\varepsilon^{72} = -\nu^2$	$\varepsilon^{73} = -\nu^3\zeta$	$\varepsilon^{74} = -\nu^4\zeta^2$	$\varepsilon^{75} = -\zeta^3$
$\varepsilon^{76} = -i\nu$	$\varepsilon^{77} = -i\nu^2\zeta$	$\varepsilon^{78} = -i\varepsilon^3\zeta^2$	$\varepsilon^{79} = -i\nu^4\zeta^3$	$\varepsilon^{80} = 1$

Corrispondono ai punti di contatto dei piani stazionari le radici $\varepsilon^{20} = i$, $\varepsilon^{40} = -1$, $\varepsilon^{60} = -i$, $\varepsilon^{80} = 1$; e sono punti d'appoggio delle due corde principali (proprie) quelli di parametri $\varepsilon^{30} =$ e $\varepsilon^{70} = \varepsilon^{50}$ e $\varepsilon^{10} =$.

23. I quadrangoli principali sono così in numero di $\frac{72}{4} = 18$: noi li distingueremo in gruppi, ascrivendo ad un medesimo gruppo quei quadrangoli principali che si deducono da uno di essi mediante le omografie fondamentali.

Così si hanno:

$$
\text{I}^\circ \text{ Gruppo} \left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 \equiv [\,4\,,\,68\,,\,36\,,\,52]\,, \\ \Pi_2 \equiv [\,8\,,\,56\,,\,72\,,\,24]\,, \\ \Pi_3 \equiv [12\,,\,44\,,\,28\,,\,76]\,, \\ \Pi_4 \equiv [16\,,\,32\,,\,64\,,\,48]\,; \end{array} \right.
$$

$$
\text{II}^\circ \text{ Gruppo} \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 \equiv [\,2\,,\,74\,,\,18\,,\,26]\,, \\ \Omega_2 \equiv [\,6\,,\,62\,,\,54\,,\,78]\,, \\ \Omega_3 \equiv [14\,,\,38\,,\,46\,,\,22]\,. \\ \Omega_4 \equiv [34\,,\,58\,,\,66\,,\,42]\,; \end{array} \right.
$$

$$
\text{III}^\circ \text{ Gruppo} \left\{ \begin{array}{l} \Theta_1 \equiv [\,5\,,\,65\,,\,45\,,\,25]\,, \\ \Theta_2 \equiv [15\,,\,35\,,\,55\,,\,75]\,; \end{array} \right.
$$

$$
\text{IV}^\circ \text{ Gruppo} \left\{ \begin{array}{ll} \Delta_1 \equiv [\,1\,,\,77\,,\,\,9\,,\,53]\,, & \nabla_1 \equiv [\,7\,,\,59\,,\,63\,,\,51]\,, \\ \Delta_2 \equiv [\,3\,,\,71\,,\,27\,,\,79]\,, & \nabla_2 \equiv [11\,,\,47\,,\,19\,,\,23]\,, \\ \Delta_3 \equiv [13\,,\,41\,,\,37\,,\,49]\,, & \nabla_3 \equiv [17\,,\,29\,,\,73\,,\,21]\,, \\ \Delta_4 \equiv [31\,,\,67\,,\,39\,,\,43]\,, & \nabla_4 \equiv [33\,,\,61\,,\,57\,,\,69]\,. \end{array} \right.
$$

24. Applicando le omologie J_1 e J_2 al primo gruppo otteniamo:

$$J_1\Pi_1[4, 68, 36, 52] \equiv \Pi_1[36, 52, 4, 68]$$
$$J_1\Pi_2[8, 56, 72, 24] \equiv \Pi_4[32, 64, 48, 16]$$
$$J_1\Pi_3[12, 44, 28, 76] \equiv \Pi_3[28, 76, 12, 44]$$

$$J_2\Pi_1[4, 68, 36, 52] \equiv \Pi_3[76, 12, 44, 28]$$
$$J_2\Pi_2[8, 56, 72, 24] \equiv \Pi_2[72, 24, 8, 56]$$
$$J_2\Pi_4[16, 32, 64, 48] \equiv \Pi_4[64, 48, 16, 32]$$

Poichè 4 e 36 sono allineati con O_1, come lo sono 68 e 52, nello stesso modo che sono allineati con O_1 i punti 12 e 28, 44 e 76, ne argomentiamo che i quadrangoli Π_1 e Π_3 sono piani, ed i loro piani passano per O_1 — Similmente sono piani i quadrangoli Π_2 e Π_4, ed i loro piani passano per O_2 *).

Dall'equazione generale (17) si ricavano le seguenti dei piani di questi quadrangoli principali:

$$\text{per } \Pi_1 \;,\quad 0 = x_1 - ix_2 - x_3 + ix_4 \equiv \sigma_2 - i\sigma^{(2)} ,$$
$$\text{» } \Pi_2 \;,\quad 0 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \equiv \sigma_1 - \sigma^{(1)} ,$$
$$\text{» } \Pi_3 \;,\quad 0 = x_1 + ix_2 - x_3 - ix_4 \equiv \sigma_2 + i\sigma^{(2)} ,$$
$$\text{» } \Pi_4 \;,\quad 0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv \sigma_1 + \sigma^{(1)} . \text{ **)}$$

Le tre involuzioni biassiali applicate a questi quadrangoli dànno:

$$I\Pi_1[4, 68, 36, 52] \equiv \Pi_3[44, 28, 76, 12] ,$$
$$I\Pi_2[8, 56, 72, 24] \equiv \Pi_4[48, 16, 32, 64] ;$$

$$I_1\Pi_1[4, 68, 36, 52] \equiv \Pi_2[56, 72, 24, 8] ,$$
$$I_1\Pi_3[12, 44, 28, 76] \equiv \Pi_4[48, 16, 32, 64] ;$$

$$I_2\Pi_1[4, 68, 36, 52] \equiv \Pi_4[16, 32, 64, 48] ,$$
$$I_2\Pi_2[8, 56, 72, 24] \equiv \Pi_3[12, 44, 28, 76] .$$

Ora, se poniamo $s_{hk} \equiv \Pi_h \Pi_k$ a indicare gli spigoli del tetraedro dei piani Π, risulta da questi quadri che

s_{13} ed s_{24} appoggiano a d e d' ,
s_{12} » s_{34} » » d_1 » d'_1 ,
s_{14} » s_{23} » » d_2 » d'_2 .

Dunque: *il tetraedro principale* (Π) *ed il tetraedro fondamentale* (n.° 3) *si appoggiano l'un l'altro colle coppie di spigoli opposti.*

---

*) Anche il signor Zecca (*l.c.*) determina i diciotto quadrangoli, che noi diciamo principali e scopre l'esistenza dei quadrangoli piani servendosi della solita condizione della planarità di una quaderna di punti della curva.

) Cfr. coi n.i **4 e **16**.

Le coordinate dei punti di appoggio scambievole sono

per $s_{13}\,d$, $x_1 : \ldots : x_4 = 0:1:0:1$, per $s_{13}\,d'$, $x_1 : \ldots : x_4 = 1:0:\;\;1:0$,
» $s_{24}\,d$, » $= 0:1:0:-1$, » $s_{24}\,d'$, » $= 1:0:-1:0$;

» $s_{12}\,d_1$, » $= 1:1-i:-i:0$, » $s_{12}\,d'_1$, » $= 1:0:i:1+i$,
» $s_{34}\,d_1$, » $= 1:i-1:-i:0$, » $s_{34}\,d'_1$, » $= 1:0:i:-(1+i)$,

» $s_{14}\,d_2$, » $= 1:-(1+i):0$, » $s_{14}\,d'_2$, » $= 1:0:-i:i-1$,
» $s_{23}\,d_2$, » $= 1:\;(1+i):0$, » $s_{23}\,d'_2$, » $= 1:0:-i:1-i$.

Intanto si vede che *i punti d'appoggio alla retta* d *sono i punti di concorso dei piani dei triangoli principali* (n. 17).

25. Nell' involuzione bi-assiale **I**, i quadrangoli principali del secondo gruppo si corrispondono così:

$$\mathbf{I}\,\Omega_1\,[2\;,\;74\;,\;18\;,\;26] \equiv \Omega_4\,[42\;,\;34\;,\;58\;,\;66]\;,$$

$$\mathbf{I}\,\Omega_2\,[6\;,\;62\;,\;54\;,\;78] \equiv \Omega_3\,[46\;,\;22\;,\;14\;,\;38]\;,$$

Ora è facile osservare che, *presa in uno dei quadrangoli* Ω *una terna di vertici, il complemento suo* (n. 11) *è il corrispondente del quarto vertice nell'involuzione* **I**. Cioè: *dato un tetraedro* Ω, *il corrispondente di un suo vertice nell'involuzione* **I** *è situato sulla faccia opposta*.

In altre parole, *il tetraedro individuato da un quadrangolo principale del secondo gruppo è inscritto e circoscritto al tetraedro che gli corrisponde nell' involuzione bi-assiale* **I**. Due tetraedri Ω reciprocamente inscritti e circoscritti l'uno all'altro, si diranno coniugati fra loro.

26. Applicando le omologie $\mathbf{J}_1$ e $\mathbf{J}_2$ a codesti tetraedri principali, si hanno:

$$\mathbf{J}_1\,\Omega_1\,[\;2\;,\;74\;,\;18\;,\;26] \equiv \Omega_3\,[38\;,\;46\;,\;22\;,\;14]\;,$$
$$\mathbf{J}_1\,\Omega_2\,[\;6\;,\;62\;,\;54\;,\;78] \equiv \Omega_4\,[34\;,\;58\;,\;66\;,\;42]\;,$$

$$\mathbf{J}_2\,\Omega_1\,[\;2\;,\;74\;,\;18\;,\;26] \equiv \Omega_2\,[78\;,\;\;6\;,\;62\;,\;54]\;,$$
$$\mathbf{J}_2\,\Omega_3\,[14\;,\;38\;,\;46\;,\;22] \equiv \Omega_4\,[66\;,\;42\;,\;34\;,\;58]\;.$$

In seguito a ciò, ed imitando il procedimento del num. **15**, si dimostra che *i quattro tetraedri* Ω *sono incontrati tutti in una medesima quaderna di punti dalla retta* d.—E precisamente, introdotti, per le facce di questi tetraedri, i simboli:

$\Omega_1^{(1)} \equiv [74\;,\;18\;,\;26]$, $\Omega_1^{(2)} \equiv [18\;,\;26\;,\;\;2]$, $\Omega_1^{(3)} \equiv [26\;,\;\;2\;,\;74]$, $\Omega_1^{(4)} \equiv [\;2\;,\;74\;,\;18]$,
$\Omega_2^{(1)} \equiv [62\;,\;54\;,\;78]$, $\Omega_2^{(2)} \equiv [54\;,\;78\;,\;\;6]$, $\Omega_2^{(3)} \equiv [78\;,\;\;6\;,\;62]$, $\Omega_2^{(4)} \equiv [\;6\;,\;62\;,\;54]$,
$\Omega_3^{(1)} \equiv [38\;,\;46\;,\;22]$, $\Omega_3^{(2)} \equiv [46\;,\;22\;,\;14]$, $\Omega_3^{(3)} \equiv [22\;,\;14\;,\;38]$, $\Omega_3^{(4)} \equiv [14\;,\;38\;,\;46]$,
$\Omega_4^{(1)} \equiv [58\;,\;66\;,\;42]$, $\Omega_4^{(2)} \equiv [66\;,\;42\;,\;34]$, $\Omega_4^{(3)} \equiv [42\;,\;34\;,\;58]$, $\Omega_4^{(4)} \equiv [34\;,\;58\;,\;66]$,

si trova che i piani:

$$\begin{array}{llll}
\Omega_1^{(1)}, \Omega_2^{(4)}, \Omega_3^{(2)}, \Omega_4^{(4)}, & \text{concorrono in un punto} & L_1 & \text{di } d, \\
\Omega_1^{(2)}, \Omega_2^{(1)}, \Omega_3^{(3)}, \Omega_4^{(1)}, & \quad » \qquad » & L_2 & » \; d, \\
\Omega_1^{(3)}, \Omega_2^{(2)}, \Omega_3^{(4)}, \Omega_4^{(2)}, & \quad » \qquad » & L_3 & » \; d, \\
\Omega_1^{(4)}, \Omega_2^{(3)}, \Omega_3^{(1)}, \Omega_4^{(3)}, & \quad » \qquad » & L_4 & » \; d.
\end{array}$$

Le coordinate di questi punti si trovano stabilendo le equazioni dei piani Ω, le quali sono *):

$$\Omega_1^{(1)} \equiv i\zeta^2(1+2\nu^2)x_1 - \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,x_2 - \zeta^2(1+2\nu^3)x_3 + x_4 = 0 \,,$$

$$\Omega_1^{(2)} \equiv i\zeta^2(1+2\nu^4)x_1 + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,x_2 - \zeta^2(1+2\nu\;)x_3 - x_4 = 0 \,,$$

$$\Omega_1^{(3)} \equiv i\zeta^2(1+2\nu^3)x_1 + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,x_2 - \zeta^2(1+2\nu^2)x_3 + x_4 = 0 \,,$$

$$\Omega_1^{(4)} \equiv i\zeta^2(1+2\nu\;)x_1 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,x_3 - \zeta^2(1+2\nu^4)x_3 - x_4 = 0 \,,$$

---

*) Per istabilire le equazioni dei piani Ω, invece che della forma generale (17), abbiamo creduto più conveniente di servirci del metodo [che del resto si presta pure per trovare le equazioni (15), (16), (17)] che brevemente quì esponiamo a proposito del piano $\Omega_1^{(1)}$ — Codesto piano sega $\mathbf{C}^4$ nei quattro punti di parametri ε^{74}, ε^{18}, ε^{26} ed ε^{42}, i quali sono le radici dell'equazione

$$\omega^4 + \xi_3\omega^3 + \xi_2\omega^2 + \xi_1\omega + 1 = 0$$

dove siano $\xi_1, \xi_2, \xi_3, 1$ le coordinate del piano medesimo. Di conseguenza, indicando con $[\omega]_r$ la somma dei prodotti ad r ad r di queste radici dovranno essere

$$-\xi_3 \equiv [\omega]_1 \,,\quad \xi_2 \equiv [\omega]_2 \,,\quad -\xi_1 \equiv [\omega]_3 \,,\quad 1 \equiv [\omega]_4 \,,$$

e quindi, avvalendoci del secondo quadro del n.° 22, si troveranno

$$-\xi_3 = -\nu\zeta^2 - \nu^2\zeta^2 + \nu^3\zeta^2 - \nu^4\zeta^2 = \zeta^2(1+2\nu^3) \,,$$

$$-\xi_1 = \quad i\nu\zeta^2 - i\nu^2\zeta^2 + i\nu^3\zeta^2 + i\nu^4\zeta^2 = -i\zeta^2(1+2\nu^2) \,.$$

Quanto a ξ_2, giova tener sott'occhio le espressioni seguenti delle radici quinte dell'unità:

$$\nu = \cos\frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

$$\nu^2 = \cos\frac{2.2\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2.2\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$\nu^3 = \cos\frac{3.2\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{3.2\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5} - 1 - i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$\nu^4 = \cos\frac{4.2\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{4.2\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1 - i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

dove i radicali si devono assumere in valor assoluto. Allora si trova

$$\xi_2 = i(\nu - \nu^4) - i(\nu^2 - \nu^3) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{10+2\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5-2\sqrt{5}} \,.$$

L'equazione di $\Omega_1^{(1)}$ è quindi effettivamente

$$i\zeta^2(1+2\nu^2)\,x_1 - \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,x_2 - \zeta^2(1+2\nu^3)\,x_3 + x_4 = 0 \,.$$

Similmente si calcolano le equazioni degli altri piani Ω.

$$\Omega_2^{(1)} \equiv \zeta^2(1+2\nu\;)x_1 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,x_2 - i\zeta^2(1+2\nu^4)x_3 + x_4 = 0\ ,$$
$$\Omega_2^{(2)} \equiv \zeta^2(1+2\nu^2)x_1 - \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,x_2 - i\zeta^2(1+2\nu^3)x_3 - x_4 = 0\ ,$$
$$\Omega_2^{(3)} \equiv \zeta^2(1+2\nu^4)x_1 + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,x_2 - i\zeta^2(1+2\nu\;)x_3 - x_4 = 0\ ,$$
$$\Omega_2^{(4)} \equiv \zeta^2(1+2\nu^3)x_1 + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,x_2 - i\zeta^2(1+2\nu^2)x_3 - x_4 = 0\ ;$$

$$\Omega_3^{(1)} \equiv \zeta^2(1+2\nu^4)x_1 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,x_2 - i\zeta^2(1+2\nu\;)x_3 - x_4 = 0\ ,$$
$$\Omega_3^{(2)} \equiv \zeta^2(1+2\nu^3)x_1 - \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,x_2 - i\zeta^2(1+2\nu^2)x_3 + x_4 = 0\ ,$$
$$\Omega_3^{(3)} \equiv \zeta^2(1+2\nu\;)x_1 + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,x_2 - i\zeta^2(1+2\nu^4)x_3 - x_4 = 0\ ,$$
$$\Omega_3^{(4)} \equiv \zeta^2(1+2\nu^2)x_1 + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,x_2 - i\zeta^2(1+2\nu^3)x_3 + x_4 = 0\ ;$$

$$\Omega_4^{(1)} \equiv i\zeta^2(1+2\nu^4)x_1 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,x_2 - \zeta^2(1+2\nu\;)x_3 + x_4 = 0\ ,$$
$$\Omega_4^{(2)} \equiv i\zeta^2(1+2\nu^3)x_1 - \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,x_2 - \zeta^2(1+2\nu^2)x_3 - x_4 = 0\ ,$$
$$\Omega_4^{(3)} \equiv i\zeta^2(1+2\nu\;)x_1 + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,x_2 - \zeta^2(1+2\nu^4)x_3 + x_4 = 0\ ,$$
$$\Omega_4^{(4)} \equiv i\zeta^2(1+2\nu^2)x_1 + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,x_2 - \zeta^2(1+2\nu^3)x_3 - x_4 = 0\ .$$

Si ottengono così le seguenti coordinate dei punti **L**:

per L_1 , . . . $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0 :\ \ 1 : 0 : \sqrt{5-2\sqrt{5}}$,

» L_2 , . . . » $= 0 :\ \ 1 : 0 : \sqrt{5+2\sqrt{5}}$,

» L_3 , . . . » $= 0 : -1 : 0 : \sqrt{5-2\sqrt{5}}$,

» L_4 , . . . » $= 0 : -1 : 0 : \sqrt{5+2\sqrt{5}}$,

27. Registriamo ancora gli effetti delle due involuzioni bi-assiali $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e delle due omografie cicliche $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ — Si hanno:

$$\mathbf{I}_1\,\Omega_1[\ 2\ ,\ 74\ ,\ 18\ ,\ 26] \equiv \Omega_4[58\ ,\ 66\ ,\ 42\ ,\ 34]\ ,$$
$$\mathbf{I}_1\,\Omega_2[\ 6\ ,\ 62\ ,\ 54\ ,\ 78] \equiv \Omega_2[54\ ,\ 78\ ,\ \ 6\ ,\ 62]\ ,$$
$$\mathbf{I}_1\,\Omega_3[14\ ,\ 38\ ,\ 46\ ,\ 22] \equiv \Omega_3[46\ ,\ 22\ ,\ 14\ ,\ 38]\ ;$$

$$\mathbf{I}_2\,\Omega_1[\ 2\ ,\ 74\ ,\ 18\ ,\ 26] \equiv \Omega_1[18\ ,\ 26\ ,\ \ 2\ ,\ 74]\ ,$$
$$\mathbf{I}_2\,\Omega_2[\ 6\ ,\ 62\ ,\ 54\ ,\ 78] \equiv \Omega_3[14\ ,\ 38\ ,\ 46\ ,\ 22]\ ,$$
$$\mathbf{I}_2\,\Omega_4[34\ ,\ 58\ ,\ 66\ ,\ 42] \equiv \Omega_4[66\ ,\ 42\ ,\ 34\ ,\ 58]\ .$$

$$\mathbf{U}_1\,\Omega_1[\ 2\ ,\ 74\ ,\ 18\ ,\ 26] \equiv \Omega_2[62\ ,\ 54\ ,\ 72\ ,\ \ 6]\ ,$$
$$\mathbf{U}_1\,\Omega_2[\ 6\ ,\ 62\ ,\ 54\ ,\ 78] \equiv \Omega_4[66\ ,\ 42\ ,\ 34\ ,\ 58]\ ,$$
$$\mathbf{U}_1\,\Omega_3[14\ ,\ 38\ ,\ 46\ ,\ 22] \equiv \Omega_1[74\ ,\ 18\ ,\ 26\ ,\ \ 2]\ ,$$
$$\mathbf{U}_1\,\Omega_4[34\ ,\ 58\ ,\ 66\ ,\ 42] \equiv \Omega_3[14\ ,\ 38\ ,\ 46\ ,\ 22]\ ;$$

$$\mathbf{U}_2\,\Omega_1[\ 2\ ,\ 74\ ,\ 18\ ,\ 26] \equiv \Omega_3[22\ ,\ 14\ ,\ 38\ ,\ 46]\ ,$$
$$\mathbf{U}_2\,\Omega_2[\ 6\ ,\ 62\ ,\ 54\ ,\ 78] \equiv \Omega_1[26\ ,\ \ 2\ ,\ 74\ ,\ 18]\ ,$$
$$\mathbf{U}_2\,\Omega_3[14\ ,\ 38\ ,\ 46\ ,\ 22] \equiv \Omega_4[34\ ,\ 58\ ,\ 66\ ,\ 42]\ ,$$
$$\mathbf{U}_2\,\Omega_4[34\ ,\ 58\ ,\ 66\ ,\ 42] \equiv \Omega_2[54\ ,\ 78\ ,\ \ 6\ ,\ 62]\ .$$

Si rileva di quì che ogni omografia fondamentale muta bensì un quadrangolo principale Ω in uno consimile, ma che soltanto I_1 e I_2 mutano in sè medesimi dei quadrangoli in discorso. E precisamente: I_1 trasforma diagonalmente Ω_2 in Ω_2 ed Ω_3 in Ω_3, scambiando fra loro Ω_1 ed Ω_4; I_2 trasforma diagonalmente Ω_1 in Ω_1 ed Ω_4 in Ω_4, scambiando fra loro Ω_2 ed Ω_3. Ne segue che *i quadrangoli sghembi semplici* Ω_2 *ed* Ω_3 *appoggiano colle loro diagonali alle rette* d_1, d'_1; *ed i quadrangoli* Ω_1 ed Ω_4 *appoggiano colle loro diagonali alle rette* d_2, d'_2.

28. Relativamente ai quadrangoli principali del terzo gruppo, e quindi ai loro tetraedri, *essi risultano fra loro omologici in due maniere diverse.* Perchè, infatti, si hanno:

$$J_1\Theta_1[5\ ,\ 65\ ,\ 45\ ,\ 25] \equiv \Theta_2[35\ ,\ 55\ ,\ 75\ ,\ 15]\ ,$$
$$J_2\Theta_1[5\ ,\ 65\ ,\ 45\ ,\ 25] \equiv \Theta_2[75\ ,\ 15\ ,\ 35\ ,\ 55]\ .$$

Se poniamo

$$\Theta_1^{(1)} \equiv [65\ ,\ 45\ ,\ 25]\ ,\ \Theta_1^{(2)} \equiv [45\ ,\ 25\ ,\ 5]\ ,\ \Theta_1^{(3)} \equiv [25\ ,\ 5\ ,\ 65]\ ,\ \Theta_1^{(4)} \equiv [5\ ,\ 65\ ,\ 45]\ ;$$
$$\Theta_2^{(1)} \equiv [35\ ,\ 55\ ,\ 75]\ ,\ \Theta_2^{(2)} \equiv [55\ ,\ 75\ ,\ 15]\ ,\ \Theta_2^{(3)} \equiv [75\ ,\ 15\ ,\ 35]\ ,\ \Theta_2^{(4)} \equiv [15\ ,\ 35\ ,\ 55]\ ,$$

troviamo la proprietà seguente: *i piani dei due tetraedri* Θ *si distribuiscono in due quaderne per modo che, per ciascuna quaderna, passano tutti i piani per un medesimo punto* B *della retta* d. E precisamente passano i piani

$$\Theta_1^{(1)}\ ,\ \Theta_1^{(3)}\ ,\ \Theta_2^{(2)}\ ,\ \Theta_2^{(4)} \quad \text{per il punto} \quad B_1\ ,$$
$$\Theta_1^{(2)}\ ,\ \Theta_1^{(4)}\ ,\ \Theta_2^{(1)}\ ,\ \Theta_2^{(3)} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad B_2\ ,$$

essendo le coordinate di

$$B_1)\quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0 : 1 : 0 : \sqrt{2}\ ,$$
$$B_2)\quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0 : 1 : 0 : -\sqrt{2}\ .$$

Ciò si verifica mediante le equazioni dei piani Θ, che sono ordinatamente:

$$\Theta_1^{(1)} \equiv -\zeta^3(1+i)x_1 - \zeta^2(1-i)x_2 + \zeta(1+i)x_3 + x_4 = 0\ ,$$
$$\Theta_1^{(2)} \equiv \zeta^3(1-i)x_1 + \zeta^2(1-i)x_2 + \zeta(1-i)x_3 + x_4 = 0\ ,$$
$$\Theta_1^{(3)} \equiv \zeta^3(1+i)x_1 - \zeta^2(1-i)x_2 - \zeta(1+i)x_3 + x_4 = 0\ ,$$
$$\Theta_1^{(4)} \equiv -\zeta^3(1-i)x_1 + \zeta^2(1-i)x_2 - \zeta(1-i)x_3 + x_4 = 0\ ;$$

$$\Theta_2^{(1)} \equiv \zeta(1-i)x_1 + \zeta^2(1-i)x_2 + \zeta^3(1-i)x_3 + x_4 = 0\ ,$$
$$\Theta_2^{(2)} \equiv -\zeta(1+i)x_1 - \zeta^2(1-i)x_2 + \zeta^3(1+i)x_3 + x_4 = 0\ ,$$
$$\Theta_2^{(3)} \equiv -\zeta(1-i)x_1 + \zeta^2(1-i)x_2 - \zeta^3(1-i)x_3 + x_4 = 0\ ,$$
$$\Theta_2^{(4)} \equiv \zeta(1+i)x_1 - \zeta^2(1-i)x_2 - \zeta^3(1+i)x_3 + x_4 = 0\ .$$

29. Sia servendoci di codeste equazioni, sia, più semplicemente, valendoci della determinazione del complemento della terna di punti principali consecutivi di ciascun

piano Θ, si riconosce che *ogni piano Θ è tangente alla curva nel proprio punto principale finale.*

30. Rispetto alle due involuzioni $\mathbf{I}_1$ ed $\mathbf{I}_2$ i due tetraedri Θ si trasformano nel seguente modo l'uno nell'altro:

$$\mathbf{I}_1\Theta_1[5\ ,\ 65\ ,\ 45\ ,\ 25] \equiv \Theta_2[55\ ,\ 75\ ,\ 15\ ,\ 35]\ ,$$

$$\mathbf{I}_2\Theta_1[5\ ,\ 65\ ,\ 45\ ,\ 25] \equiv \Theta_2[15\ ,\ 35\ ,\ 55\ ,\ 75]\ ;$$

e, per conseguenza, *l'involuzione* $\mathbf{I}$, prodotto di queste due, *muterà in sè stesso ciascuno dei medesimi tetraedri* nel modo che indichiamo:

$$\mathbf{I}\Theta_1[\ 5\ ,\ 65\ ,\ 45\ ,\ 25] \equiv \Theta_1[45\ ,\ 25\ ,\ \ 5\ ,\ 65]\ ,$$

$$\mathbf{I}\Theta_2[15\ ,\ 35\ ,\ 55\ ,\ 75] \equiv \Theta_2[55\ ,\ 75\ ,\ 15\ ,\ 35]\ .$$

31. È notevole il fatto che *ciascuna delle omografie cicliche* $\mathbf{U}_1$ *ed* $\mathbf{U}_2$ *muta in sè medesimo ognuno dei tetraedri* Θ, *facendo corrispondere, in una di esse, ad un vertice il consecutivo, e nell'altra, come è naturale, il precedente.*

Infatti si hanno

$$\mathbf{U}_1\Theta_1[\ 5\ ,\ 65\ ,\ 45\ ,\ 25] \equiv \Theta_1[65\ ,\ 45\ ,\ 25\ ,\ \ 5]\ ,$$

$$\mathbf{U}_1\Theta_2[15\ ,\ 35\ ,\ 55\ ,\ 75] \equiv \Theta_2[75\ ,\ 15\ ,\ 35\ ,\ 55]\ ,$$

e, naturalmente,

$$\mathbf{U}_2\Theta_1[\ 5\ ,\ 65\ ,\ 45\ ,\ 25] \equiv \Theta_1[25\ ,\ \ 5\ ,\ 65\ ,\ 45]\ ,$$

$$\mathbf{U}_2\Theta_2[15\ ,\ 35\ ,\ 55\ ,\ 75] \equiv \Theta_2[35\ ,\ 55\ ,\ 75\ ,\ 15]\ .$$

32. Dobbiamo infine esaminare quel che succeda dei tetraedri del quarto gruppo. Anzitutto osserviamo che

$$\mathbf{J}_1\Delta_1[\ 1\ ,\ 77\ ,\ \ 9\ ,\ 53] \equiv \Delta_4[39\ ,\ 43\ ,\ 31\ ,\ 67]\ ,$$

$$\mathbf{J}_1\Delta_2[\ 3\ ,\ 71\ ,\ 27\ ,\ 79] \equiv \Delta_3[37\ ,\ 49\ ,\ 13\ ,\ 41]\ ;$$

$$\mathbf{J}_2\Delta_1[\ 1\ ,\ 77\ ,\ \ 9\ ,\ 53] \equiv \Delta_2[79\ ,\ \ 3\ ,\ 71\ ,\ 27]\ ,$$

$$\mathbf{J}_2\Delta_3[13\ ,\ 41\ ,\ 37\ ,\ 49] \equiv \Delta_4[67\ ,\ 39\ ,\ 43\ ,\ 31]\ .$$

$$\mathbf{J}_1\nabla_1[\ 7\ ,\ 59\ ,\ 63\ ,\ 51] \equiv \nabla_4[33\ ,\ 61\ ,\ 57\ ,\ 63]\ ,$$

$$\mathbf{J}_1\nabla_2[11\ ,\ 47\ ,\ 19\ ,\ 23] \equiv \nabla_3[29\ ,\ 73\ ,\ 21\ ,\ 17]\ ;$$

$$\mathbf{J}_2\nabla_1[\ 7\ ,\ 59\ ,\ 63\ ,\ 51] \equiv \nabla_3[73\ ,\ 21\ ,\ 17\ ,\ 29]\ ,$$

$$\mathbf{J}_2\nabla_2[11\ ,\ 47\ ,\ 19\ ,\ 23] \equiv \nabla_4[69\ ,\ 33\ ,\ 61\ ,\ 57]\ .$$

Si vede di quì che *i quadrangoli, e quindi i tetraedri, principali del quarto gruppo sono distribuiti in due sotto-gruppi, ognuno dei quali è mutato in sè medesimo dalle omologie* $\mathbf{J}$ *e quindi anche dall'involuzione* $\mathbf{I}$.

In maniera analoga a casi precedenti si dimostra che *i quattro tetraedri principali di un medesimo sotto-gruppo del quarto gruppo sono incontrati dalla retta* d *in una stessa*

quaderna di punti, e quelli dell'altro sotto-gruppo sono incontrati in un'altra stessa quaderna. E precisamente, posti i simboli

$$
\begin{array}{ll|ll}
\Delta_1^{(1)} \equiv [77\,,\ 9\,,\ 73]\,,\ \dots & & \nabla_1^{(1)} \equiv [59\,,\ 63\,,\ 51]\,,\ \dots \\
\Delta_2^{(1)} \equiv [71\,,\ 27\,,\ 79]\,,\ \dots & & \nabla_2^{(1)} \equiv [47\,,\ 19\,,\ 23]\,,\ \dots \\
\Delta_3^{(1)} \equiv [41\,,\ 37\,,\ 49]\,,\ \dots & & \nabla_3^{(1)} \equiv [29\,,\ 73\,,\ 21]\,,\ \dots \\
\Delta_4^{(1)} \equiv [67\,,\ 39\,,\ 43]\,,\ \dots & & \nabla_4^{(1)} \equiv [61\,,\ 57\,,\ 63]\,,\ \dots
\end{array}
$$

si dimostra che concorrono i piani:

$$
\begin{array}{llll}
\Delta_1^{(1)}\,,\ \Delta_2^{(4)}\,,\ \Delta_3^{(2)}\,,\ \Delta_4^{(3)} & \text{in un punto } E_1 & \text{della} & \text{retta } d \\
\Delta_1^{(2)}\,,\ \Delta_2^{(1)}\,,\ \Delta_3^{(3)}\,,\ \Delta_4^{(4)} & \text{»} \quad E_2 & \text{»} & \text{»} \\
\Delta_1^{(3)}\,,\ \Delta_2^{(2)}\,,\ \Delta_3^{(4)}\,,\ \Delta_4^{(1)} & \text{»} \quad E_3 & \text{»} & \text{»} \\
\Delta_1^{(4)}\,,\ \Delta_2^{(3)}\,,\ \Delta_3^{(1)}\,,\ \Delta_4^{(2)} & \text{»} \quad E_4 & \text{»} & \text{»} \\
 & & & \\
\nabla_1^{(1)}\,,\ \nabla_2^{(2)}\,,\ \nabla_3^{(3)}\,,\ \nabla_4^{(1)} & \text{»} \quad \exists_1 & \text{»} & \text{»} \\
\nabla_1^{(2)}\,,\ \nabla_2^{(3)}\,,\ \nabla_3^{(4)}\,,\ \nabla_4^{(2)} & \text{»} \quad \exists_2 & \text{»} & \text{»} \\
\nabla_1^{(3)}\,,\ \nabla_2^{(4)}\,,\ \nabla_3^{(1)}\,,\ \nabla_4^{(3)} & \text{»} \quad \exists_3 & \text{»} & \text{»} \\
\nabla_1^{(4)}\,,\ \nabla_2^{(1)}\,,\ \nabla_3^{(2)}\,,\ \nabla_4^{(4)} & \text{»} \quad \exists_4 & \text{»} & \text{»}\ ^{*)}
\end{array}
$$

33. Le involuzioni I_1 e I_2 come le omografie cicliche U_1 e U_2 scambiano fra loro i due sotto-gruppi. Cominciamo dalle omografie U e registriamo tutte le trasformazioni, sebbene in virtù della $U_1U_2 = 1$ potremmo limitarci a quelle sole su di un sotto-gruppo, per meglio mettere in vista un fatto interessante. Si hanno:

$$
\begin{array}{l}
U_1\Delta_1[\ 1\,,\ 77\,,\ 9\,,\ 53] \equiv \nabla_4[61\,,\ 57\,,\ 69\,,\ 33] \\
U_1\Delta_2[\ 3\,,\ 71\,,\ 27\,,\ 79] \equiv \nabla_1[63\,,\ 51\,,\ 7\,,\ 59] \\
U_1\Delta_3[13\,,\ 41\,,\ 37\,,\ 49] \equiv \nabla_3[73\,,\ 21\,,\ 17\,,\ 29] \\
U_1\Delta_4[31\,,\ 67\,,\ 39\,,\ 43] \equiv \nabla_2[11\,,\ 47\,,\ 19\,,\ 23] \\
\\
U_1\nabla_1[\ 7\,,\ 59\,,\ 63\,,\ 51] \equiv \Delta_4[67\,,\ 39\,,\ 43\,,\ 31] \\
U_1\nabla_2[11\,,\ 47\,,\ 19\,,\ 23] \equiv \Delta_2[71\,,\ 27\,,\ 79\,,\ 3] \\
U_1\nabla_3[17\,,\ 29\,,\ 73\,,\ 21] \equiv \Delta_1[77\,,\ 9\,,\ 53\,,\ 1] \\
U_1\nabla_4[33\,,\ 61\,,\ 57\,,\ 69] \equiv \Delta_3[13\,,\ 41\,,\ 37\,,\ 49]
\end{array}
$$

---

*) Non abbiamo creduto di registrare le coordinate di questi punti perchè non abbiamo potuto dare ad esse delle forme semplici come per gli analoghi relativi agli altri quadrangoli principali. Del resto esse si possono sempre stabilire, volendolo, mediante la equazione (17) applicata a codesti piani Δ e Δ, in cui si pongano poi $x_1 = 0\,, x_3 = 0$.

$U_2\Delta_1[\ 1\ ,77\ ,\ 9\ ,53] \equiv \nabla_3[21\ ,17\ ,29\ ,73]$

$U_2\Delta_2[\ 3\ ,71\ ,27\ ,79] \equiv \nabla_2[23\ ,11\ ,47\ ,19]$

$U_2\Delta_3[13\ ,41\ ,37\ ,49] \equiv \nabla_4[33\ ,61\ ,57\ ,69]$

$U_2\Delta_4[31\ ,67\ ,39\ ,43] \equiv \nabla_1[51\ ,\ 7\ ,59\ ,63]$

$U_2\nabla_1[\ 7\ ,59\ ,63\ ,51] \equiv \Delta_2[27\ ,79\ ,\ 3\ ,71]$

$U_2\nabla_2[11\ ,47\ ,19\ ,23] \equiv \Delta_4[31\ ,67\ ,39\ ,43]$

$U_2\nabla_3[17\ ,29\ ,73\ ,21] \equiv \Delta_3[37\ ,49\ ,13\ ,41]$

$U_2\nabla_4[33\ ,61\ ,57\ ,69] \equiv \Delta_1[53\ ,\ 1\ ,77\ ,\ 9]$

D'altronde si riconosce facilmente, col procedimento ordinario che

Δ_1	è circoscritto a	∇_3	ed inscritto in	∇_4 ,
Δ_2	»	∇_1	»	∇_2 ,
Δ_3	»	∇_4	»	∇_3 ,
Δ_4	»	∇_2	»	∇_1 ,

e

∇_1	è circoscritto a	Δ_4	ed inscritto in	Δ_2 ,
∇_2	»	Δ_2	»	Δ_4 ,
∇_3	»	Δ_3	»	Δ_1 ,
∇_4	»	Δ_1	»	Δ_3 .

Ossia *ogni tetraedro del primo (secondo) sotto-gruppo è inscritto nel tetraedro del secondo (primo) sotto-gruppo che gli corrisponde in una delle omografie* **U** *e circoscritto al tetraedro del secondo (primo) che gli corrisponde nell'altra omografia* **U**.

§ V. — I pentagoni principali

34. Per $n=5$, si ha $\mu=244$: quindi 244 sono le soluzioni analitiche del problema dei pentagoni principali, ed escludendo le soluzioni improprie (punti di contatto dei piani stazionari), ne rimangono $\mathfrak{N}(5)=240$. Cosicchè i veri pentagoni principali sono in numero di $\frac{240}{5}=48$.

I medesimi pentagoni si distribuiscono nelle seguenti sei ottuple, ognuna delle quali è mutata in sè medesima dalle omografie fondamentali:

$A_1 \equiv [\ 1\ ,241\ ,\ 9\ ,217\ ,\ 81]$ | $B_1 \equiv [\ 2\ ,238\ ,\ 18\ ,190\ ,162]$

$A_2 \equiv [\ 3\ ,235\ ,\ 27\ ,163\ ,243]$ | $B_2 \equiv [\ 6\ ,226\ ,\ 54\ ,\ 82\ ,242]$

$A_3 \equiv [\ 20\ ,184\ ,180\ ,192\ ,156]$ | $B_3 \equiv [\ 7\ ,223\ ,\ 63\ ,\ 56\ ,\ 79]$

$A_4 \equiv [\ 34\ ,142\ ,\ 62\ ,\ 58\ ,\ 70]$ | $B_4 \equiv [\ 21\ ,181\ ,189\ ,165\ ,237]$

$A_5 \equiv [\ 41\ ,121\ ,125\ ,113\ ,149]$ | $B_5 \equiv [\ 40\ ,124\ ,116\ ,140\ ,\ 68]$

$A_6 \equiv [\ 52\ ,\ 88\ ,224\ ,\ 60\ ,\ 64]$ | $B_6 \equiv [\ 43\ ,115\ ,143\ ,\ 59\ ,\ 67]$

$A_7 \equiv [\ 95\ ,203\ ,123\ ,119\ ,131]$ | $B_7 \equiv [101\ ,185\ ,177\ ,201\ ,129]$

$A_8 \equiv [102\ ,182\ ,186\ ,174\ ,210]$ | $B_8 \equiv [104\ ,176\ ,204\ ,120\ ,128]$

$C_1 \equiv [\ 4\ ,\ 232\ ,\ 36\ ,\ 136\ ,\ 8]$
$C_2 \equiv [\ 12\ ,\ 208\ ,\ 108\ ,\ 164\ ,\ 240]$
$C_3 \equiv [\ 14\ ,\ 202\ ,\ 126\ ,\ 110\ ,\ 158]$
$C_4 \equiv [\ 19\ ,\ 187\ ,\ 171\ ,\ 219\ ,\ 757]$
$C_5 \equiv [\ 25\ ,\ 169\ ,\ 225\ ,\ 57\ ,\ 73]$
$C_6 \equiv [\ 42\ ,\ 118\ ,\ 134\ ,\ 86\ ,\ 230]$
$C_7 \equiv [\ 47\ ,\ 103\ ,\ 179\ ,\ 195\ ,\ 147]$
$C_8 \equiv [\ 49\ ,\ 97\ ,\ 197\ ,\ 141\ ,\ 65]$

$D_1 \equiv [\ 8\ ,\ 220\ ,\ 72\ ,\ 28\ ,\ 160]$
$D_2 \equiv [\ 11\ ,\ 211\ ,\ 99\ ,\ 191\ ,\ 159]$
$D_3 \equiv [\ 23\ ,\ 175\ ,\ 207\ ,\ 111\ ,\ 155]$
$D_4 \equiv [\ 24\ ,\ 172\ ,\ 216\ ,\ 84\ ,\ 236]$
$D_5 \equiv [\ 33\ ,\ 145\ ,\ 53\ ,\ 85\ ,\ 233]$
$D_6 \equiv [\ 37\ ,\ 133\ ,\ 89\ ,\ 221\ ,\ 69]$
$D_7 \equiv [\ 38\ ,\ 130\ ,\ 98\ ,\ 194\ ,\ 150]$
$D_8 \equiv [\ 50\ ,\ 94\ ,\ 206\ ,\ 114\ ,\ 146]$

$E_1 \equiv [\ 5\ ,\ 229\ ,\ 45\ ,\ 109\ ,\ 161]$
$E_2 \equiv [\ 13\ ,\ 205\ ,\ 117\ ,\ 137\ ,\ 77]$
$E_3 \equiv [\ 15\ ,\ 199\ ,\ 135\ ,\ 83\ ,\ 239]$
$E_4 \equiv [\ 16\ ,\ 196\ ,\ 144\ ,\ 56\ ,\ 76]$
$E_5 \equiv [\ 22\ ,\ 178\ ,\ 198\ ,\ 138\ ,\ 74]$
$E_6 \equiv [\ 39\ ,\ 127\ ,\ 107\ ,\ 167\ ,\ 231]$
$E_7 \equiv [\ 46\ ,\ 106\ ,\ 170\ ,\ 222\ ,\ 66]$
$E_8 \equiv [\ 48\ ,\ 100\ ,\ 188\ ,\ 168\ ,\ 228]$

$F_1 \equiv [\ 10\ ,\ 214\ ,\ 90\ ,\ 218\ ,\ 78]$
$F_2 \equiv [\ 17\ ,\ 193\ ,\ 153\ ,\ 29\ ,\ 157]$
$F_3 \equiv [\ 26\ ,\ 166\ ,\ 234\ ,\ 30\ ,\ 154]$
$F_4 \equiv [\ 31\ ,\ 151\ ,\ 35\ ,\ 139\ ,\ 73]$
$F_5 \equiv [\ 32\ ,\ 148\ ,\ 44\ ,\ 112\ ,\ 152]$
$F_6 \equiv [\ 51\ ,\ 91\ ,\ 215\ ,\ 87\ ,\ 227]$
$F_7 \equiv [\ 92\ ,\ 212\ ,\ 96\ ,\ 200\ ,\ 132]$
$F_8 \equiv [\ 94\ ,\ 209\ ,\ 105\ ,\ 173\ ,\ 213]$

35. I vertici dei pentagoni principali, che noi abbiamo enumerati, hanno un ordine di successione: tenuto conto di ciò i pentagoni stessi ponno riguardarsi come semplici, epperò dànno luogo ad un pentaedro principale ciascuno, essendo sue facce i piani di tre vertici consecutivi. Tali facce sono quindi

$$A_1^{(1)} \equiv [241\ ,\ 9\ ,\ 217]\ ,\ A_1^{(2)} \equiv [9\ ,\ 217\ ,\ 81]\ ,\ A_1^{(3)} \equiv [217\ ,\ 81\ ,\ 1]\ ,$$
$$A_1^{(4)} \equiv [81\ ,\ 1\ ,\ 241]\ ,\ A_1^{(5)} \equiv [1\ ,\ 241\ ,\ 9]\ ,$$

e, similmente,

$$A_2^{(1)} \equiv [235\ ,\ 27\ ,\ 163]\ ,\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ A_8^{(5)} \equiv [102\ ,\ 182\ ,\ 185]\ ;$$
$$B_1^{(1)} \equiv [238\ ,\ 18\ ,\ 190]\ ,\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ B_8^{(5)} \equiv [104\ ,\ 176\ ,\ 204]\ ;$$
$$C_1^{(1)} \equiv [232\ ,\ 36\ ,\ 136]\ ,\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ C_8^{(5)} \equiv [\ 49\ ,\ 97\ ,\ 197]\ ;$$
$$D_1^{(1)} \equiv [229\ ,\ 45\ ,\ 109]\ ,\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ D_8^{(5)} \equiv [\ 48\ ,\ 100\ ,\ 188]\ ;$$
$$E_1^{(1)} \equiv [220\ ,\ 72\ ,\ 28]\ ,\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ E_8^{(5)} \equiv [\ 50\ ,\ 94\ ,\ 188]\ ;$$
$$F_1^{(1)} \equiv [214\ ,\ 90\ ,\ 218]\ ,\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ F_8^{(5)} \equiv [\ 93\ ,\ 209\ ,\ 105]\ .$$

36. Ora, si hanno:

$J_1 A_1[\ 1\ ,\ 241\ ,\ \ 9\ ,\ 217\ ,\ \ 81] \equiv A_5[121\ ,\ 125\ ,\ 113\ ,\ 149\ ,\ \ 41]$,
$J_1 A_2[\ 3\ ,\ 235\ ,\ \ 27\ ,\ 163\ ,\ 243] \equiv A_7[119\ ,\ 131\ ,\ \ 95\ ,\ 203\ ,\ 123]$,
$J_1 A_3[20\ ,\ 184\ ,\ 180\ ,\ 192\ ,\ 156] \equiv A_8[102\ ,\ 182\ ,\ 186\ ,\ 174\ ,\ 210]$,
$J_1 A_4[34\ ,\ 142\ ,\ \ 62\ ,\ \ 58\ ,\ \ 70] \equiv A_6[\ 88\ ,\ 224\ ,\ \ 60\ ,\ \ 64\ ,\ \ 52]$;

e

$J_2 A_1[\ 1\ ,\ 241\ ,\ \ 9\ ,\ 217\ ,\ \ 81] \equiv A_2[243\ ,\ \ 3\ ,\ 235\ ,\ \ 27\ ,\ 163]$,
$J_2 A_3[20\ ,\ 184\ ,\ 180\ ,\ 192\ ,\ 156] \equiv A_6[224\ ,\ \ 60\ ,\ \ 64\ ,\ \ 52\ ,\ \ 88]$,
$J_2 A_4[34\ ,\ 142\ ,\ \ 62\ ,\ \ 58\ ,\ \ 70] \equiv A_8[210\ ,\ 102\ ,\ 182\ ,\ 186\ ,\ 174]$,
$J_2 A_5[41\ ,\ 121\ ,\ 125\ ,\ 113\ ,\ 149] \equiv A_7[203\ ,\ 123\ ,\ 110\ ,\ 131\ ,\ \ 95]$.

Da queste relazioni si può argomentare che, per esempio, i quattro piani $A_1^{(1)}$, $A_2^{(5)}$, $A_5^{(2)}$, $A_7^{(3)}$ concorrono in un medesimo punto della retta **d**; e similmente si dica degli altri piani A_1, A_2, A_5, A_7. E poi anche dei piani A_3, A_4, A_6, A_8: ed infine dei piani $B, \ldots, F$. Di guisa che si potrà affermare che *ciascun gruppo di pentagoni semplici principali si scinde in due sotto-gruppi di quattro ciascuno, per modo che i piani principali di un medesimo sotto-gruppo sono incontrati in una stessa quintupla di punti della retta* **d**.

37. Studiamo anche il modo di scambiarsi degli elementi di uno dei gruppi di pentagoni principali mediante le altre omografie fondamentali. Si hanno:

$I_1 A_1[\ 1\ ,\ 241\ ,\ \ 9\ ,\ 217\ ,\ \ 81] \equiv A_8[182\ ,\ 186\ ,\ 174\ ,\ 219\ ,\ 102]$,
$I_1 A_2[\ 3\ ,\ 235\ ,\ \ 27\ ,\ 163\ ,\ 243] \equiv A_3[180\ ,\ 192\ ,\ 156\ ,\ \ 20\ ,\ 184]$,
$I_1 A_4[34\ ,\ 142\ ,\ \ 62\ ,\ \ 58\ ,\ \ 70] \equiv A_5[149\ ,\ \ 41\ ,\ 121\ ,\ 125\ ,\ 113]$,
$I_1 A_6[52\ ,\ \ 88\ ,\ 224\ ,\ \ 60\ ,\ \ 64] \equiv A_7[131\ ,\ \ 95\ ,\ 203\ ,\ 123\ ,\ 119]$;

$I_2 A_1[\ 1\ ,\ 241\ ,\ \ 9\ ,\ 217\ ,\ \ 81] \equiv A_6[\ 60\ ,\ \ 64\ ,\ \ 52\ ,\ \ 88\ ,\ 224]$,
$I_2 A_3[20\ ,\ 184\ ,\ 180\ ,\ 192\ ,\ 156] \equiv A_5[\ 41\ ,\ 121\ ,\ 125\ ,\ 113\ ,\ 149]$,
$I_2 A_4[34\ ,\ 142\ ,\ \ 62\ ,\ \ 58\ ,\ \ 70] \equiv A_2[\ 27\ ,\ 163\ ,\ 243\ ,\ \ 3\ ,\ 235]$,
$I_2 A_7[95\ ,\ 203\ ,\ 123\ ,\ 119\ ,\ 131] \equiv A_8[210\ ,\ 102\ ,\ 182\ ,\ 186\ ,\ 174]$;

$I\ A_1[\ 1\ ,\ 241\ ,\ \ 9\ ,\ 217\ ,\ \ 81] \equiv A_7[123\ ,\ 119\ ,\ 131\ ,\ \ 95\ ,\ 203]$,
$I\ A_2[\ 3\ ,\ 235\ ,\ \ 27\ ,\ 167\ ,\ 243] \equiv A_5[125\ ,\ 113\ ,\ 149\ ,\ \ 41\ ,\ 121]$,
$I\ A_3[20\ ,\ 184\ ,\ 180\ ,\ 192\ ,\ 156] \equiv A_4[142\ ,\ \ 62\ ,\ \ 58\ ,\ \ 70\ ,\ \ 34]$,
$I\ A_6[53\ ,\ \ 88\ ,\ 224\ ,\ \ 60\ ,\ \ 64] \equiv A_8[174\ ,\ 210\ ,\ 102\ ,\ 182\ ,\ 186]$;

$U_1 A_1[\ 1\ ,\ 241\ ,\ \ 9\ ,\ 217\ ,\ \ 81] \equiv A_3[184\ ,\ 180\ ,\ 102\ ,\ 156\ ,\ \ 20]$,
$U_1 A_2[\ 3\ ,\ 235\ ,\ \ 27\ ,\ 163\ ,\ 243] \equiv A_8[186\ ,\ 174\ ,\ 210\ ,\ 102\ ,\ 182]$,
$U_1 A_3[\ 20\ ,\ 184\ ,\ 180\ ,\ 192\ ,\ 156] \equiv A_7[203\ ,\ 123\ ,\ 119\ ,\ 131\ ,\ \ 95]$,
$U_1 A_4[\ 34\ ,\ 142\ ,\ \ 62\ ,\ \ 58\ ,\ \ 70] \equiv A_1[217\ ,\ \ 81\ ,\ \ 1\ ,\ 241\ ,\ \ 9]$,
$U_1 A_5[\ 41\ ,\ 121\ ,\ 125\ ,\ 113\ ,\ 149] \equiv A_6[224\ ,\ \ 60\ ,\ \ 64\ ,\ \ 52\ ,\ \ 88]$,
$U_1 A_6[\ 52\ ,\ \ 88\ ,\ 224\ ,\ \ 60\ ,\ \ 64] \equiv A_2[235\ ,\ \ 27\ ,\ 163\ ,\ 243\ ,\ \ 3]$,
$U_1 A_7[\ 95\ ,\ 203\ ,\ 123\ ,\ 119\ ,\ 131] \equiv A_4[\ 34\ ,\ 142\ ,\ \ 62\ ,\ \ 58\ ,\ \ 70]$,
$U_1 A_8[132\ ,\ 182\ ,\ 186\ ,\ 174\ ,\ 210] \equiv A_5[\ 41\ ,\ 121\ ,\ 125\ ,\ 113\ ,\ 149]$.

E per gli effetti di U_2, basta ricordare che $U_2 = U_1^{-1}$, perchè si deducano da quest'ultimo quadro.

Come si vede, non hanno luogo trasformazioni fondamentali di pentagoni principali in sè medesimi: pur tuttavia potrebbe essere interessante lo studio delle reciproche intersezioni dei piani di quelle coppie di pentagoni A che si corrispondono nelle omografie involutorie fondamentali.

Ciò che si è osservato per i pentagoni A, si può ripetere per i pentagoni B, C, D, E, F.

38. Come abbiamo visto, nessuna delle omografie fondamentali mette in relazione i pentagoni principali di gruppi diversi. Pure havvi una relazione tra di essi per una legge che andiamo ora mettendo in luce.

Di ciascuna terna di vertici successivi dei vari pentagoni principali determiniamo il complemento (n. 11). Si trova così che

il pentagono	A_1	è circoscritto a	B_4	ed inscritto in	F_8 ,
»	A_2	»	B_3	»	F_4 ,
»	A_3	»	B_8	»	F_5 ,
»	A_4	»	B_2	»	F_3 ,
»	A_5	»	B_7	»	F_2 ,
»	A_6	»	B_5	»	F_7 ,
»	A_7	»	B_6	»	F_6 ,
»	A_8	»	B_1	»	F_1 ;

il pentagono	B_1	è circoscritto a	C_6	ed inscritto in	A_8 ,
»	B_2	»	C_3	»	A_4 ,
»	B_3	»	C_7	»	A_2 ,
»	B_4	»	C_8	»	A_1 ,
»	B_5	»	C_2	»	A_6 ,
»	B_6	»	C_4	»	A_7 ,
»	B_7	»	C_5	»	A_5 ,
»	B_8	»	C_1	»	A_3 ;

e così di seguito. Di modo che, pensando all'ordine circolare nei simboli $A, B, \ldots, F$ si vede *i pentagoni semplici principali di un dato gruppo sono circoscritti uno ad uno ai pentagoni che li seguono*, e *sono inscritti uno ad uno nei pentagoni che li precedono.*

Napoli, Giugno 1898.

finita di stampare il dì 10 Settembre 1898

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

CONTRIBUTO ALLA FLORA DEL BACINO DEL LIRI

MEMORIA

del dottor GIUSEPPE FALQUI

presentata nell'adunanza del dì 18 Giugno 1898

CRYPTOGAMAE VASCULARES [1]

EQUISETACEAE

1. *Equisetum arvense* L.—Al Revieto ed al Rio Palelle (Arpino). Marzo-Aprile (350ᵐ).
2. *E. Telmateja* Ehrh. — A Sora ed a Carnello. Marzo-Aprile (280ᵐ).
3. *E. limosum* L. — B. fluviatile (L.) — Al lago della Posta. Maggio (285ᵐ).
4. *E. hyemale* L. — Nella stessa località. Maggio-Luglio.
5. *E. ramosissimum* Desf. — Nella stessa località. Giugno.

SELAGINELLACEAE

6. *Selaginella denticulata* L. — Presso Fontana Liri. Maggio.

POLYPODIACEAE

7. *Pteris aquilina* L.—Diffusa in tutti i gruppi montuosi della regione sino a 1000ᵐ d'altezza. Luglio.

8. *Adianthum Capillus Veneris* L.—Alle Faete (Grotta delle Fate), al Revieto, al Fosso Sarzana (Arpino) a Carnello, Isola e Sora. Maggio-Giugno (700ᵐ).

9. *Scolopendrium vulgare* Sym. — Alle Faete (Arpino), alla strada di Carnello ed al Rio Sarzana. Maggio.

10. *Asplenium Filix-foemina* Bernh. — Regione Arpinate sino alla Valle di Magnene. Inverno-Primavera (700ᵐ).

---

[1]) Il numero in parentesi apposto alle singole specie si riferisce al limite superiore in cui furono rinvenute le stesse; la cifra concernente il limite inferiore si è trascurata perchè molto variabile e per sè poco definibile.

11. *A. Trichomanes* L. — Regione Arpinate Inverno-Primavera.

12. *A. viride* Huds. — Alle falde del Monte Pietroso ed al Zaffineto (Picinisco). Agosto-Settembre (800^m). N. Terr.

13. *A. Ruta-muraria* L.—Sulle vecchie mura. A Picinisco. Settembre (800^m). N. Terr.

14. *A. tenuifolium* Guss. — A. fissum Kit. —Alla cima del Monte Meta, a Val di Canneto ed a Valcopella (Picinisco). Settembre (2241^m). N. Terr. [1]).

15. *A. Adianthum-nigrum* L. — Alle Faete (Arpino). Maggio (700^m).

16. *Cystopteris fragilis* Bernh. — Alla selva delle Cornacchie (Ianule), al Monte Pizzodetta presso la grotta, a Forca d'Acero, alla Valle di Canneto ed al Monte Cajro. Luglio-Settembre (1800^m).

17. *C. alpina* Lk. — Nelle rupi calcaree. Al Zaffineto. Settembre (1900^m). N. Terr., l. c.

18. *Aspidium Lonchitis* Sw. — Alla cima del Monte Pizzodetta (Orto del Centurione) alla vetta del Monte Meta, a' tre confini (Picinisco) e nel versante settentrionale del Monte Cajro. Luglio-Agosto (2241^m).

19. *A. aculeatum* Sn. — Alle Faete (Arpino) ed alla Valle di Canneto. Agosto (1300^m).

20. *Nephrodium Thelypteris* Stremp — Nell'isola galleggiante al lago della Posta. Luglio. N. Terr.

21. *N. Filix-Mas* Stremp — Al Monte Pizzodetta (Balsorano) ed alla Valle di Caneto (Picinisco) (1400^m).

22. *Polypodium vulgare* L.—In tutta la regione media (800^m). Inverno-Primavera.

23. *Ceterach officinarum* Willd. — In tutta la regione media ed alta sino a 1200^m. Inverno-Primavera.

PHANEROGAMAE

CONIFERAE

24. *Juniperus communis* — Monti della regione sino ai Tre confini (1600^m). Aprile-Maggio.

25. *Cupressus sempervirens* L. — Coltivato in tutta la regione.

26. *Pinus Pinea* L. — Coltivato in tutta la regione sino a 800^m. Aprile.

27. *P. Pinaster* Soland. — Come il precedente, ma più scarso.

28. *P. Laricio* Poir. — Al Zaffineto e sopra i Tre confini (Picinisco). Agosto (1900^m). N. Terr.

29. *P. montana* Duroi — Ai Tre confini ed al Zaffineto. Agosto (1900^m). N. Terr.

30. *Taxus baccata* L. — Nei monti di Atina ed in Val di Canneto. Luglio (500-1300^m). N. Terr.

LILIACEAE

31. *Tulipa sylvestris* L. — Sotto Roccasecca. Maggio (200^m). N. Terr.

32. *Lilium candidum* L. — Al colle di S. Amasia (Piedimonte S. Germano). Maggio (460^m). N. Terr.

---

[1]) Tutte le piante indicate con la sigla N. Terr. sono tolte dalle *Relazioni intorno alle peregrinazioni botaniche fatte nella Provincia di Terra di Lavoro ecc.* dal dottor N. Terracciano ecc. Caserta, Tipi Nobile e C.i 1872-1873-1874-1878.

33. *L. bulbiferum* L. — Alla selva di Sora ed al Monte S. Marcello (S. Donato). Luglio (1200^m).

34. *L. Martagon* L. — Al Zaffineto (Picinisco). Agosto (1500^m). N. Terr.

35. *Gagea Liottardi* Roem. et Schult. — A Campo rotondo, sopra Forca d'Acero (S. Donato). Giugno (1379^m).

36. *G. lutea* R. et S. — Al Monte Felcia sotto Forca d'Acero. Aprile (1600^m).

37. *Ornithogalum umbellatum* L. — Alla via di Santo Padre e ad Isola. Aprile-Maggio (700^m).

38. *O. tenuifolium* Guss. — Al Monte Ricco ed a' monti di Pescosolido. Maggio (800^m).

39. *O. orthophyllum* Ten. — Alla Frojetta ed a Monte Ricco (Arpino). Maggio (774^m).

40. *O. narbonense* L. — Alla pianura d'Isola ed alla selva di Sora. Aprile-Maggio (300^m).

41. *Scilla bifolia* L. — A Forca d'Acero. Aprile (1600^m).

42. *Bellevalia romana* Rchb. — A Piedimonte di Cassino e presso il Liri. Maggio (300^m). N. Terr.

43. *Hyacinthus orientalis* L. — Al Fibreno, a Carnello ecc. Aprile (280^m).

44. *Muscari comosum* Mill. — In tutta la regione, sino a 800^m. Aprile.

45. *M. racemosum* Mill. — Come l'antecedente, ma meno diffuso. Aprile.

46. *M. botryoides* Mill. — Alla via d'Isola a Santo Padre ed alla salita di Atina. Febbraio (700^m).

47. *Allium nigrum* L. — Alla via d'Isola ed alla via d'Arce. Aprile-Giugno (400^m).

48. *A. pendulinum* Merr. — Ad Arpino (Faete), ad Isola, al Ponte Tapino sul Fibreno, ed al Monte Cajro. Maggio (600^m).

49. *A. neapolitanum* Cyr. — Al Vallone (Arpino) ed a Carnello. Maggio-Giugno (280^m).

50. *A. roseum* L. — Ad Arpino, Isola, Sora, Pizzodetta, ed a Piedimonte Sangermano. Maggio-Giugno (600^m).

51. *A. pallens* L. — b. *paniculatum* L. nella Valle di Canneto. Luglio-Agosto (1400^m). N. Terr.

52. *A. pulchellum* Don. — Al Monte Pizzodetta ed a' monti di San Donato. Luglio (1500^m).

53. *A. Schoenoprasum* L. — Coltivato in tutta la regione.

54. *A. Cepa* L. — Coltivato in tutta la regione.

55. *A. ascalonicum* L. — Coltivato in tutta la regione.

56. *A. fistulosum* L. — Coltivato a Sora ed Isola.

57. *A. sphaerocephalon* L. — A Monte Tartaro e Vado Cavallo (Ernici) ed al Monte S. Marcello (S. Donato). Luglio-Agosto (1400^m).

58. *A. sativum* L. — Coltivato in tutta la regione.

MELANTHIEAE

59. *Colchicum Tenorii* Parl. — Alla via d'Isola. Ottobre (400^m).

60. *C. autumnale* L. — Alla via tra Atina e Picinisco ed alla Valle di Canneto. Settembre (1300^m). N. Terr.

61. *Veratrum album* L.— Alla Valle di Canneto ed alla Pietrosa. Agosto (1707^m).

62. *V. nigrum* L. — Alla Lugagna (S. Donato) ed in Val di Canneto. Luglio-Agosto (1300^m).

SMILACEAE

63. *Ruscus aculeatus* L. — Nella regione Arpinate. Aprile (700^m).

64. *Asparagus officinalis* L. — Comune in tutte le siepi della regione bassa e media. Maggio.

65. *Polygonatum verticillatum* All. — Ne' luoghi selvatici montuosi. Ai Tre confini ed al passaggio dell'Orso (Picinisco). Agosto (1624^m). N. Terr.

66. *Smilax aspera* L. — In tutta la regione sino a 800^m. Settembre.

67. *Paris quadrifolia* L. — Nelle foreste di Faggio. Alla grotta del Vaccaro, sopra Val di Canneto Agosto (1500^m). N. Terr.

AMARYLLIDACEAE

68. *Sternbergia lutea* Gawl. — A Cassino e sulla strada da Cassino ad Atina. Settembre. N. Terr.

69. *Narcissus poeticus* L. — A Magnene (Carnello) ed a Raja Pizzutella (Cajro). N. Terr.

70. *N. Tazetta* L. — Al vallone (Arpino) ed alla salita d'Atina. Marzo-Aprile (350^m).

71. *Agave americana* L. — In molti punti della regione bassa.

JUNCACEAE

72. *Luzula sylvatica* Gaud. — Alle Faete (Arpino) a S. Donato ed in Val di Canneto (Picinisco). Giugno (1300^m).

73. *L. campestris* Dc. — Alle Faete (Arpino). Giugno (700^m).

74. *Juncus glaucus* Ehrh. — A valle Radice e nelle vicinanze d'Isola Liri. Luglio (340^m).

var. *Angelisii* Ten. — A Picinisco, presso una sorgente, e nello scendere alla valle della Melfa. Luglio (584^m). N. Terr.

75. *J. diffusus* Hoppe. — Al Fosso Sarzana (Arpino) Maggio (350^m).

76. *J. effusus* L. — A Valle Radice ed al lago della Posta. Giugno (340^m).

77. *J. conglomeratus* L. — Vicino al lago della Posta. Luglio (285^m).

78. *J. Gussonii* Parl. — Al lago della Posta. Maggio-Giugno. N. Terr.

79. *J. striatus* Schousb. — A Pescosolido sotto il paese ed alla strada d'Isola. Maggio (600^m).

80. *J. articulatus* L. — A Picinisco. Agosto (1024^m). N. Terr.

IRIDACEAE

81. *Crocus vernus* Parl. — Nella valle tra la regione Controversa e Forca d'Acero ed alla base del M. Panico (S. Donato). Aprile (1600^m).

82. *Gladiolus segetum* Gawl. — In tutta la regione bassa e media. Maggio.

83. *Iris florentina* L. — Ad Arpino ed a Castel Liri. Maggio (500^m).

84. *I. germanica* L. — Nelle stesse località ed a Casalvieri. Maggio (600ᵐ).

85. *Xiphion Pseudo-acorus* Parl. — Alla riva sinistra e destra del Fibreno ed al lago della Posta. Maggio (280ᵐ).

86. *Hermodactylus tuberosus* Salisb. — Alle Faete (Arpino). Marzo (700ᵐ). N. Terr.

87. *Romulea Bulbocodium* Seb. et Mauri — Tra Arpino ed Isola. Aprile (400ᵐ).

DIOSCOREACEAE

88. *Tamus communis* L. — Nella regione media. Maggio-Luglio (700ᵐ).

TYPHACEAE

89. *Typha latifolia* L. — Lungo il corso del Liri. Giugno (340ᵐ).

90. *Sparganium ramosum* Huds. — Al lago della Posta. Luglio.

ARACEAE

91. *Biarum tenuifolium* Schott. — Al campo di Grano (Pescosolido). Maggio (1700ᵐ). N. Terr.

92. *Arum maculatum* L. — In tutta la regione sino a 1500ᵐ d'altezza. Maggio.

93. *A. italicum* Mill. — Nella regione bassa e media. Aprile-Maggio.

94. *Arisarum proboscideum* Savi — Ad Arpino. Febbraio (500ᵐ).

95. *A. vulgare* Targ. — Presso Fontana Liri.

LEMNEAE

96. *Lemna minor* L. — A Carnello e ad Isola Liri. Maggio (280ᵐ).

NAJADACEAE

97. *Potamogeton natans* L. — Presso la stazione ferroviaria di Sora. Luglio (280ᵐ).

CYPERACEAE

98. *Cyperus flavescens* L. — Nell' isola galleggiante al lago della Posta. Maggio. N. Terr.

99. *C. rotundus* L. — Comune nei campi. Giugno-Luglio.

100. *C. badius* Desf. — A Carnello. Maggio (280ᵐ).

101. *C. longus* L. — Al lago della Posta. Luglio (300ᵐ).

102. *Blysmus compressus* Panz. — Nella valle di Canneto. N. Terr.

103. *Eleocharis palustris* R. Br. — Nel lago della Posta e lungo il Fibreno. Maggio-Giugno (285ᵐ).

104. *Scirpus lacustris* L. — Sponde del lago della Posta. Aprile-Giugno (285ᵐ).

105. *S. pungens* Vahl. — Nella regione Magnene (Carnello). Agosto (280ᵐ).

106. *S. holoschoenus* L. — Al Vallone (Arpino) ed al lago della Posta. Giugno.
var. *australis* L. — Carnello. Giugno (280ᵐ).

107. *Carex divisa* Huds. — Negli spalti che dal cimitero di Sora conducono a Campoli. Maggio (500ᵐ). N. Terr.

108. *C. vulpina* L. — Lungo le rive del Fibreno e del Liri da Carnello sino al livello di Balsorano. Giugno (350^m).

109. *C. divulsa* Good. — Ne' fossi umidi presso i boschi a Santo Padre. Aprile (700^m).

110. *C. praecox* Jacq. — Presso il Rio Palelle (Fontana Liri) ed a Valle radice (Sora). Marzo-Aprile (400^m).

111. *C. echinata* Murr. — Al Monte S. Marcello. Maggio (1279^m). N. Terr.

112. *C. remota* L. — Ad Arpino. Maggio (600^m).

113. *C. macrolepis* DC. — Al Monte Cajro (dai Perroni alla Cima). Giugno (1669^m). N. Terr.

114. *C. acuta* Lm. — A Carnello. Maggio (280^m).

115. *C. microcarpa* Bert. — Sulle sponde del lago della Posta (Casino di Conti). N. Terr.

116. *C. pendula* Huds. — A Laurita Mammone presso il Fibreno e lungo le rive del lago della Posta. Maggio (300^m).

117. *C. glauca* Scop. — Alla strada di Santo Padre ed a Carnello. Marzo (600^m).

118. *C. ferruginea* Scop. — Alle Faete (Arpino) noi, a Val di Canneto presso la cappella (Picinisco) Marzo-Maggio (1024^m). N. Terr.

119. *C. sempervirens* Vill. — Alle *pietre Roscelle* (Sette fratti), a' Tre confini ed allo Zaffineto (Picinisco). Luglio-Agosto (1750^m). N. Terr.

120. *C. Oederi* Ehrh. — Alla Valle di Canneto presso la cappella (Picinisco). Settembre (1024^m). N. Terr.

121. *C. punctata* Gaud. — Alla Valle di Canneto (Picinisco). Maggio (1300^m). N. Terr.

122. *C. distans* L. — Alla riva sinistra del Fibreno ed al lago della Posta. Aprile-Maggio (280^m).

123. *C. sylvatica* Huds. — Al Vallone ed alla via d'Arce (Arpino). Aprile-Maggio (280^m).

124. *C. Pseudo-cyperus* L. — Ne' margini del lago della Posta. Maggio (285^m).

125. *C. paludosa* Good. — Rive del Fibreno e del Lacerno (Campoli). Maggio (300^m).

126. *C. riparia* Curt. — Presso il lago della Posta. Maggio.

127. *C. hirta* L. — Presso il Fibreno ed il Liri e nella valle di Canneto (Picinisco). Maggio (1300^m).

POACEAE

128. *Phalaris arundinacea* L. — Nelle vicinanze del lago della Posta. Maggio (300^m).

129. *Anthoxanthum odoratum* L. — Al vallone (Arpino), nei colli di Laurita mammone presso il Fibreno, e sulle colline di Vicalvi. Luglio (500^m).

130. *Holcus lanatus* L. — Ad Isola Liri, alla selva di Sora e nella valle di Canneto sopra Picinisco. Maggio-Luglio (1300^m).

131. *Phleum alpinum* L. — Alla valle di Fondillo (Tre confini), alla valle Lunga (Meta) ed alla costa Cavallara (Meta). Luglio-Agosto (1900^m). N. Terr.

132. *P. pratense* L. — Presso i tre confini (Picinisco). Agosto (1900^m). N. Terr.

133. *P. Bohemeri* Wibel. — Alle Faete (Arpino). Giugno (700^m).

134. *P. Michelii* All. — Al Monte S. Marcello (S. Donato) ed al Monte Pizzodeta (Balsorano) (1200^m).

135. *P. tenue* Schrd. — Vicino al lago della Posta ed al vallone (Arpino). Aprile-Maggio (285^m).

136. *Alopecurus agrestis* L.— Alla Madonna delle fosse (Santo Padre) ed a Frojetta (Arpino). Maggio (700^m).

137. *A. utriculatus* Per. — Nella regione media. Aprile-Maggio (800^m).

138. *Sesleria tenuifolia* Schrad. — Alla valle tra *Raja pizzutella* (Pozzaccone) e Monte Campanella (Cajro). Maggio-Giugno (1362^m). N. Terr.

139. *S. nitida* Ten. — Dai Perroni alla cima del Monte Cairo e sul monte che sovrasta Vicalvi. Giugno-Luglio (1669^m). N. Terr.

140. *S. argentea* Savi — Alla valle di Canneto (Picinisco). Giugno-Luglio (1300^m). N. Terr.

141. *Setaria verticillata* P. Beauv. — In tutta la regione bassa e media. Luglio (800^m).

142. *Digitaria sanguinalis* Scop.—Nei campi e nell'orlo delle vie. Luglio (800^m).

143. *Echinaria capitata* Desf. — Presso il lago della Posta. Maggio (285^m).

144. *Andropogon Ischaemum* L. — A Rocca d'Arce ed alla base degli Ernici in valle Radice. Maggio-Luglio (500^m).

145. *A. hirtum* L. — Lungo la strada da Arpino ad Isola Liri. Maggio (500^m).

146. *A. pubescens* Vis. — A Vicalvi. Luglio (590^m).

147. *Milium multiflorum* Cav. comune. — Giugno-Settembre (800^m).

148. *Stipa pennata* L. — Al vallone di Lacerno presso Campoli. Appennino. Giugno-Agosto (1200^m). N. Terr.

149. *Aristella bromoides* Bertol. — Presso Colle S. Magno. Maggio-Giugno (600^m). N. Terr.

150. *Agrostis alba* L. — A Monte Tartaro, alla selva di Sora alle Faete (Arpino) ed a Pescosolido. Maggio-Giugno (1127^m).

151. *Arundo Donax* L. — In tutta la regione. Agosto-Ottobre (800^m).

152. *Phragmites communis* Trin. — Presso il Liri ed il Fibreno. Settembre (285^m).

153. *Cynodon Dactylon* Pers.—Comune in tutta la regione bassa e media. Luglio-Settembre (800^m).

154. *Eleusine italica* N. Terr.—Lungo la vecchia calaja di Vicalvi. Giugno (500^m).

155. *E. indica* Gaert.—Presso le vie e nei prati. A Cassino. Maggio (187^m). N. Terr.

156. *Aira caryophyllea* L. — Presso Cassino. Maggio (187^m).

157. *A. capillaris* Host.—Alle Faete (bosco di S.^{a} Croce presso Arpino). Maggio-Giugno (700^m).

158. *A. Cupaniana* Guss. — A Sora. Maggio (280^m).

159. *Avena pubescens* L.—Alla valle Copella ed a Valle longa (Meta). Luglio (1957^m). N. Terr.

160. *A. Scheuchzeri* All. — Alla vetta del Monte Meta, a Pietre roscelle ed a Val copella (Picinisco). Agosto (1241^m). N. Terr.

161. *A. pratensis* L. — Alla Lungagna ed al Monte S. Marcello (S. Donato). Luglio (1800^m). N. Terr.

162. *A. bromoides* Gouan. — Ne' prati della valle presso Raja pizzutella (Monte Cajro). Agosto (1152^m). N. Terr.

163. *A. barbata* Brot. — In tutta la regione bassa e media. Maggio (800^m).

164. *Melica uniflora* Retz.—Presso Raja pizzutella (Monte Cajro). Maggio (1162^m). N. Terr.

165. *Koeleria phleoides* Pers. — A Monte Ricco (Arpino) ed al lago della Posta. Maggio-Giugno (774^m).

166. *K. grandiflora* Bert. — Al Monte S. Marcello (San Donato) ed alle falde del Monte Cajro. Maggio (1132^m). N. Terr.

167. *Cynosurus cristatus* L.—Alla pianura di Sora, Pescosolido Regione Prato; Iannuele (sopra Casalatico) ed alle Faete (Arpino). Maggio-Giugno (751^m).

168. *C. echinatus* L. — Alla pianura di Sora ed al Monte Tartaro (Ernici). Maggio-Luglio (1127^m).

169. *Poa annua* L. — Al Monte Pizzodetta (Balsorano) e ne' prati di pianura a Magnene (Carnello) ed al vallone (Arpino). Maggio-Luglio (1500^m).

170. *P. alpina* L. — Ne' prati montani. Ai Tre confini (Picinisco), alle Pietre roscelle (Sette fratti) e campo di Grano (Pescosolido) (1874^m). N. Terr.

var. *vivipara*. — A Pizzodetta. Luglio (2000^m).

171. *P. bulbosa* L. — Al vallone, alla via d'Arce, al Monte Nero (Arpino) ed a Santo Padre. Maggio-Luglio (803^m).

var. *vivipara* (Parl.) — Nelle vicinanze di Arpino (500^m).

172. *P. compressa* L.—Nella collina sopra il lago della Posta. Luglio (400^m). N. Terr.

173. *P. nemoralis* L. — Al Monte S. Marcello (San Donato) ed alla Brecciosa (Pescosolido). Luglio (1800^m). N. Terr.

174. *P. pratensis* L. — Alla via d'Arce, presso il Boschetto San Germano (Arpino), alle Jannule, regione Mortalo sopra Casalatico ed a Monte Ricco (Arpino) Maggio-Giugno (1000).

175. *P. trivialis* L. — Alla pianura d'Isola e di Sora. Maggio (286^m).

176. *Glyceria aquatica* Wahlb. — Alla pianura d'Isola, a Laurita presso il Fibreno e sotto Fontana Liri. Maggio-Giugno (350^m).

177. *G. spicata* Guss.—Sulle rive del lago della Posta. Maggio (300^m). N. Terr.

178. *Eragrostis megastachya* Link. — Lungo le strade di campagna. Giugno-Luglio (700^m).

179. *Briza maxima* L. — Presso la selva di Sora. Maggio (260^m).

180. *B. media* L. — Nelle stesse località.

181. *B. minor* L. — Al vallone (Arpino). Maggio (260^m).

182. *Serrafalcus racemosus* Parl.— Alla strada d'Isola Liri ed al vallone (Arpino). (450^m).

183. *S. mollis* Parl.—Alla strada di Forca d'Acero (S. Donato). Maggio (1500^m).

184. *S. patulus* Parl. — Al Monte Pizzodetta (Balsorano). Luglio (1000^m).

185. *S. squarrosus* Bab. — A Vicalvi, a Monte Tartaro, alle Faete (Arpino) e presso la selva di Sora. Maggio-Luglio (1127^m).

186. *S. macrostachys* Parl. — Ne' ciglioni e greppi calcarei. Al Monte Sant'Angelo (Sora). Maggio (600^m). N. Terr.

187. *Bromus sterilis* L.—In tutta la regione bassa e media. Maggio-Giugno (700^m).

188. *B. maximus* Desf. — Al lago della Posta ed al Monte Tartaro. Maggio-Luglio (1127^m).

189. *B. madritensis* L. — Ad Arpino, Isola, Sora e Pescosolido (Monti retrostanti). Maggio (850^m).

190. *B. erectus* Huds. — Al Monte Pizzodetta (Balsorano). Luglio (1600^m).

191. *B. tectorum* L. — A Monte Ricco e Monte Coccio (Arpino). Maggio-Giugno (774^m).

192. *Vulpia Myurus* Gmel. — Ne' prati di tutta la regione media. Aprile-Maggio (800^m).

193. *V. ciliata* Link. — A Monte Ricco (Arpino) (774^m).

194. *Festuca Halleri* All. — Alla Brecciosa (Pescosolido), al Monte Pizzodetta (Balsorano), alla piana de' Monaci sul Monte Meta ed alla valle dei Tre confini. Luglio-Agosto (1900^m). N. Terr. e Fq.

195. *F. ovina* L. subspec. laevis (Haeckel). — Alle Faete (Arpino) e presso il Casolare di Frojetta. Maggio-Luglio (667^m).

196. *F. arundinacea* Schreb. — A S.^{to} Padre, a Carnello e presso il lago della Posta. Maggio (761^m).

197. *F. elatior* L. — Alla selva di Sora ed alla Valle della Melfa. Luglio (385^m).

198. *Dactylis glomerata* L. — In tutta la regione bassa e media (700^m).

199. *Ampelodesmos tenax* Link. — In tutta la regione media sino al Monte Cajro. Maggio-Ottobre (800^m).

200. *Sclerochloa rigida* Link. — In tutta la regione media. Maggio (800^m).

201. *Brachypodium pinnatum* P. de Beauv. — Al vallone (Arpino), alla pianura d'Isola e di Sora, al Monte Tartaro, alle Faete (Arpino), a Pescosolido ed alla Madonna delle Fosse (S.^{to} Padre). Maggio-Luglio (1127^m).

202. *B. distachyon* R. et Schult. — A San Domenico (Isola), a S. Donato ed al Monte Cajro. Maggio-Giugno (1000^m).

203. *B. ramosum* R. et S. — A Vicalvi ed a Sora presso Campoli. Maggio (590^m).

204. *B. sylvaticum* Ret. et Sch. — Al Rio Ermuci, presso Fontana Liri ed alla selva di Sora. Maggio (500^m).

205. *Triticum vulgare* Will. — Coltivato sino al livello di 900^m.

206. *T. villosum* Beauv. — Ne' luoghi aridi. A San Donato (1200^m). N. Terr.

207. *Aegilops ovata* L. — Ne' luoghi aridi. A Monte Tartaro. Luglio (1127^m).

208. *Hordeum vulgare* L. — Coltivato sino al livello di 1000^m e più.

209. *H. murinum* L. — In tutta la regione media e bassa. Maggio-Giugno (800^m).

210. *H. secalinum* Schreb. — Presso Sora. Maggio-Giugno (180^m).

211. *Elymus europaeus* L. — A Pescosolido (regione Prato) ed alla Valle della Melfa. Giugno (800^m).

212. *Lolium rigidum* Gaud. — Ad Arpino ed Isola. Maggio-Giugno (500^m).

213. *L. italicum* A. Br. — Alla pianura d'Isola e Sora. Giugno (280^m).

214. *L. multiflorum* Gaud. — Ad Arpino. Giugno (500^m).

215. *L. temulentum* L. — Ad Isola e Sora. Aprile-Giugno (290^m).

216. *L. perenne* L. — A Pescosolido (regione Prato). Maggio (700^m).

217. *Lepturus cylindricus* Trin. — Presso la cartiera a Picinisco. Maggio (430^m). N. Terr.

218. *Nardus stricta* L. — A val di Canneto. Maggio-Giugno (1500^m).

ORCHIDACEAE

219. *Cephalanthera rubra* C. L. Rich. — Al Zaffineto (Picinisco). Luglio (1600^{m}). N. Terr.

220. *Epipactis latifolia* All. — Sopra Revieto (Arpino) ed alla valle di Canneto. (Picinisco). Maggio-Agosto (1024^{m}).

221. *E. atrorubens* Schult. — Ai Tre confini, nel salire al Passeggio dell'orso (Picinisco), e nel sentiero dalla madonna di Canneto a Settefratti. Agosto (1700^{m}). N. Terr.

222. *E. microphylla* Swartz. — Alle Faete (Arpino) alla valle di Canneto (Picinisco) ed a Colle San Magno. Maggio-Luglio (1300^{m}).

223. *Neottia Nidus-avis* Rich. — Ne' boschi di faggi al Passeggio dell'orso, al Zaffineto (Picinisco) ed al Monte Cajro. Agosto (1800^{m}).

224. *Corallorhiza innata* Br. — Nelle radici dei faggi salendo al Zaffineto. Agosto (1800^{m}). N. Terr.

225. *Serapias lingua* L. — Al vallone (Arpino). Maggio (260^{m}).

226. *S. cordigera* L. — Nell'isola galleggiante al lago della Posta. Maggio (285^{m}). N. Terr.

227. *Aceras anthropophora* R. Brown. — Al lato Nord del Colle di Civitavecchia (Arpino). Maggio (600^{m}).

228. *Himantoglossum hircinum* Spr. — Presso Santa Lucia (Arpino). Maggio (350^{m}).

229. *Orchis Morio* L. — Presso il ponte della Scaffa ed al Monte Cajro. Maggio (600^{m}).

230. *O. longicornis* Poir. — Al Monte Tartaro. Luglio (1127^{m}).

231. *O. tridentata* Scop. — A Laurita Mammone presso il Fibreno. Maggio (540^{m}).

232. *O. militaris* L. — Alla via d'Arce (Arpino). Maggio (450^{m}).

233. *O. purpurea* Huds. — Dintorni d'Arpino e d'Isola. Maggio (600^{m}).

234. *O. provincialis* Balb. — Alla Forca d'Acero (S. Donato) presso il ponte Tapino (Vicalvi). Aprile-Maggio (800^{m}).

235. *O. pauciflora* Ten. — A Laurita (Brocco) e presso il Ponte Tapino (Vicalvi). Maggio (540^{m}).

236. *O. laxiflora* Lam. — Nei boschi delle Faete (Arpino). Aprile-Maggio (700^{m}).

237. *O. quadripunctata* Cyr. — Alle Baghelle (Jannule). Giugno (1477^{m}).

238. *O. maculata* L. — Alla Valle di Canneto presso la cappella (Picinisco). Luglio (1024^{m}). N. Terr.

239. *O. latifolia* L. — Presso il bosco di S. Croce ed alla via d'Arce (Arpino). Giugno (600^{m}).

240. *Ophrys apifera* Huds. — A Laurita presso la masseria Mammone (Brocco), al piano di Magnene (Carnello) ed alla parte bassa del Monte Cajro. Maggio-Giugno (600^{m}).

241. *O. arachnites* Host. — A Laurita e vicinanze. Maggio (350^{m}).

242. *O. Bertolonii* Morett. — Vicino al Fibreno. Maggio (300^{m}).

243. *Bicchia albida* Parl. — Alla base del Zaffineto (Picinisco). Agosto (1500^{m}). N. Terr.

244. *Plantanthera chlorantha* Cust. — A Laurita Mammone presso il Fibreno (rara). Maggio (540^{m}).

245. *P. bifolia* Rubb. — Presso Santo Padre. Maggio (700^m).

246. *Gymnadenia conopsea* R. Br. — Al Revieto presso la casina di Cossa. Noi, alle Pietre roscelle (Settefratti), al Zaffineto (Picinisco), al Monte S. Marcello (S. Donato). Giugno-Agosto (1800^m). N. Terr.

247. *Anacamptis pyramidalis* Rich. — A Laurita, alla Pianura d'Isola, al Monte Cajro ed alla base degli Ernici. Maggio (1000^m?).

ALISMACEAE

248. *Alisma Plantago* L. — Presso la stazione di Sora. Maggio (280^m).
var. *lanceolata* Rcb. — Nella stessa località.

DICOTILEAE

CORYLACEAE

249. *Corylus Avellana* L. — In tutta la regione media. Gennajo-Febbraio (800^m).

250. *Carpinus Betulus* L. — Nella regione media. Marzo-Aprile in fiore (900^m).

251. *C. duinensis* Scop. — Nella regione media (Faete, Ernici, Cajro) (800^m).

252. *Ostrya carpinifolia* Scop. — Alla strada dell'Arce (Arpino), alla base degli Ernici (Sora) ed al Monte Pizzodetta (Balsorano). Aprile (800^m).

QUERCACEAE

253. *Quercus Robur* L. var. *pedunculata* W. — (Farnia) in tutti i boschi della regione.
var. *sessiliflora* Sal. *Q. apennina* Ten. — Nei boschi della regione media e nella regione bassa. Aprile-Maggio.

254. *Q. Ilex* L. — Colle S. Magno, Roccasecca e Cassino. Aprile-Maggio.

255. *Q. Cerris* L. — Qua e là nella regione bassa e media.

256. *Fagus sylvatica* L. — In tutti i monti da 300 a 1800^m.

257. *Castanea sativa* Mill. — Nei boschi della regione media.

JUGLANDACEAE

258. *Juglans regia* L. — Coltivata in tutta la regione bassa e media.

SALICACEAE

259. *Salix babylonica* L. — Ad Isola e Sora. Coltivato.

260. *S. fragilis* L. — Presso la valle di Lacerno (Campoli). Maggio (300^m). N. Terr.

261. *S. triandra* L. — Con la precedente. N. Terr.

262. *S. viminalis* L. — Coltivata.

263. *S. cinerea* L. — Sulle rive del lago della Posta. Maggio (280^m). N. Terr.

264. *S. Caprea* L. — Sulle sponde del Fibreno e del Liri (300^m).

265. *S. nigricans* Sm. — Presso Atina (490^m). N. Terr.

266. *S. purpurea* — A Sora ed a Pescosolido (500^m). N. Terr.

267. *S. retusa* L. — Sulle rupi. Alle falde del Monte Pietroso (Picinisco). Agosto (1707-1817^m). N. Terr.

268. *Populus alba* L. — Alla Pianura d'Isola, al Fibreno, e ad Arpino.

269. *P. nigra* L. — In tutta la regione bassa e media.

URTICACEE

270. *Urtica membranacea* L. — Comune ne' fossi, negli orti ecc. Dicembre-Gennajo.

271. *U. pilulifera* L. — Nelle siepi, nell'orlo delle vie e tra i rottami. Aprile-Maggio.

272. *U. dioica* L. — Nella parte bassa ed alta della regione fino a 1000^m. Maggio-Settembre.

273. *U. urens* L. — In tutta la regione bassa e media. Maggio-Ottobre.

274. *Parietaria officinalis* L. — Comunissima nella regione bassa e media.
var. *diffusa* M. et K. — Alle Fornaci (Arpino). Aprile-Maggio (300^m).

275. *P. lusitanica* L. — Ai Morroni (Arpino), al Monte Pizzodetta (Balsorano) ed al Monte Cajro. Maggio-Luglio.

276. *Cannabis sativa* L. — Coltivata nelle bassure.

277. *Humulus Lupulus* L. — Tra Sora e Vicalvi ed a Roccasecca. Maggio-Giugno.

278. *Thelygonum Cynocrambe* L. — Nella regione bassa e media. Marzo-Aprile.

279. *Ficus Carica* L. — Alla *Iocca dell'Ovo* (sotto Arpino) ed al Castello (Arpino).

280. *Morus alba* L. — Coltivata nella regione bassa e media.

281. *M. nigra* L. — Come la precedente.

ULMACEAE

282. *Ulmus campestris* L. — In tutta la regione. Marzo-Aprile.
var. *suberosa* Ehrh. — Come la precedente.

283. *Celtis australis* L. — In tutta la regione media. Aprile-Maggio (700^m).

POLYGONACEAE

284. *Polygonum Fagopyrum* L. — Al Monte Tartaro ed a Vado Cavallo (Sora). Luglio (1400^m). Coltivato.

285. *P. Bellardi* All. — Vicino a Santo Padre. Ottobre (700^m).

286. *P. aviculare* L. — In tutta la regione bassa e media. Maggio-Settembre.
var. *monspeliense* Thieb. — Ne' ripiani calcarei. Alla base degli Ernici ed alla Valle della Melfa. Luglio (800^m).

287. *P. lapathifolium* L. — Presso il lago della Posta e sulla rotabile « Cassino-Atina ». Luglio. N. Terr.

288. *P. Convolvulus* L. — Nella Valle della Melfa. Luglio (400^m).

289. *P. Persicaria* L. — Presso le rive del lago della Posta. Maggio.
var. *tenuiflorum* Presl. — Al lago della Posta. Maggio (285^m).

290. *P. Hydropiper* L. — A Sora. Maggio.

291. *Rumex alpinus* L. — A Val Coppella (Picinisco) ed al Monte Amaro (Oppi). Agosto (1600-1700^m). N. Terr.

292. *R. pratensis* M. et K. — Ne' prati e ciglioni. A Valle radice. Luglio.

293. *R. crispus* L. — Al boschetto di San Germano (Arpino) ed a San Domenico (Isola Liri). Maggio (300^m).

294. *R. conglomeratus* Murr. — A Valle radice (Sora). Luglio.

295. *R. pulcher* L. — A S. Domenico (Isola), al Rio Ermuci presso Fontana Liri ed alla valle della Melfa. Maggio (600^m).

var. *divaricatus* L. — Ne' margini della banchina ferroviaria a Rio Ermuci. Maggio (400^m).

296. *R. obtusifolius* DC. — Presso il canale di Revieto (Arpino), a valle radice (Sora), a Picinisco ed a Settefratti. Maggio-Giugno (800^m).

297. *R. Acetosa* L. — Alle Faete ed alle falde del Monte Pizzodetta (sopra Roccaviva). Maggio-Luglio (800^m).

298. *R. Acetosella* L. — Al Monte Ricco (Arpino). Maggio (700^m).

299. *R. scutatus* L. — A Mortalo e Cisterna (Casalatico) alla via di Forca d'Acero (S. Donato), al Monte Meta ed ai Tre confini (Picinisco). Giugno-Agosto (1600^m).

CHENOPODIACEAE

300. *Spinacea oleracea* L. — Coltivata in tutta la regione.

301. *Atriplex hortensis* L. — Coltivata in tutta la regione.

302. *Chenopodium Bonus Henricus* L.— Nell'Appennino, al Monte Cajro ed agli Ernici. Giugno-Agosto (1300^m).

303. *C. olidum* Smith. — Nelle stesse località.

304. *C. urbicum* L.— Alle Fontanelle (Casalatico) e presso la via tra Cassino ed Atina. Giugno-Agosto (800^m).

305. *C. album* L. var. *viride*. — A Valle radice. Luglio.

306. *C. ambrosioides* L.— Alla base degli Ernici ed a Valle radice. Luglio (300^m).

307. *Beta vulgaris* L. — Coltivata in tutta la regione.

AMARANTACEAE

308. *Amarantus deflexus* L. — Nelle strade della regione media. Luglio.

309. *A. viridis* L. — Col precedente.

310. *A. Blitum* L. — Nei campi. A Sora ed Isola Liri. Maggio-Luglio.

311. *A. crispus* Terr. — A Fontana Liri. Settembre-Ottobre.

PARONYCHIACEAE

312. *Herniaria glabra* L. — Nei monti del Cajro. Giugno (1500^m).

313. *H. alpina* Will.—Al Zaffineto (Picinisco) ed al Campo di grano (Pescosolido) (1800^m). N. Terr.

314. *Scleranthus annuus* L. — Presso i faggeti e presso la cima del Monte Cajro. Maggio-Giugno (1600^m). N. Terr.

315. *Paronychia nivea* DC. — Presso la cima del Monte Pizzodetta. Luglio (1900^m).

316. *P. capitata* L. — Nella stessa località ed al campo di grano (Pescosolido). Giugno-Luglio (1900^m).

317. *P. serpyllifolia* DC. — Alla *Brecciosa* (Pescosolido). Giugno (1800m). N. Terr.

318. *Polycarpon tetraphyllum* L. — Nella regione bassa e media. Maggio-Giugno (800m). N. Terr.

DIANTHACEAE

319. *Dianthus prolifer* L. — Al Monte Tartaro ed a Vado Cavallo (Ernici). Luglio (1400m).

320. *D. Armeria* L. — Alla selva di Sora. Luglio.

321. *D. Carthusianorum* L. — Al Monte Tartaro e Vado Cavallo, al Monte Pizzodetta ed al Monte S. Marcello (S. Donato). Luglio (1500m).

322. *D. longicaulis* Ten. — Al Monte Tartaro e Vado Cavallo, alle montagne di Pescosolido e di Balsorano, al Monte S. Marcello (S. Donato) ed in val di Canneto (Picinisco). Luglio (1500m).

323. *D. Caryophyllus* L. B. Arrosti (Presl.) — Nei monti dell'Appennino e degli Ernici. Luglio (1500m).

324. *Tunica saxifraga* Scop. — Ad Arpino, in tutto l'Appennino e nel gruppo del Cajro fino a' 1000m. Aprile-Agosto.

325. *Saponaria officinalis* L. — Nella regione bassa e media. Giugno-Luglio.

326. *S. Vaccaria* L. — Pianura di Sora. Maggio (280m). N. Terr.

327. *Silene acaulis* L. — Sulla vetta del Monte Meta ed a Valcopella (Picinisco). Agosto. N. Terr. (2240m).

328. *S. gallica* L. — A S. Domenico (Isola Liri). Maggio (280m).

329. *S. pendula* L. — Al colle di Civitavecchia (Arpino), a M. Nero (Arpino), a Sora ed a Vicalvi. Maggio (800m).

330. *S. Armeria* L. — Valle di Canneto. Settembre (1300m). N. Terr.

331. *S. muscipula* L. — Al Monte S. Angelo (Sora) a Vicalvi e sopra il Vallone (Arpino). Luglio (800m).

332. *S. conica* L. — Sponde del Liri. Maggio (280m).

333. *S. quadrifida* L. — Presso la grotta al Monte Pizzodetta (1900m). Noi, ed al Monte Meta. Luglio-Agosto (2000m). N. Terr.

334. *S. alpestris* Jacq. — Al Monte S. Marcello (S. Donato) ed alle Pietre Roscelle (S. Donato-Opi). Maggio-Giugno (1850m).

335. *S. saxifraga* L. var. *Notarisii* (Cesati) — Presso la cima del Monte Pizzodetta (Balsorano) (2000m).

var. *multicaulis* Guss. — Ai Tre confini. Luglio (1700m). N. Terr.

336. *S. inaperta* L. — Alla costa cavallara (Monte Meta). Settembre. N. Terr.

337. *S. Otites* Sm. — Nella parte alta del Monte San Marcello (S. Donato) (1790m). Maggio-Giugno.

338. *S. catholica* Ait. — A S. Giuseppe (Atina) e sulla via da Picinisco alla Valle di Canneto. Settembre (900m). N. Terr.

339. *S. inflata* Sm. — In tutta la regione bassa e media. Maggio-Giugno.

340. *S. italica* Pers. — Al colle di Civitavecchia, sulla Torre medioevale (Arpino), alle Faete, a Monte Nero, al Bosco dei Cappuccini (Arpino), a Picinisco ed a San Donato. Maggio (800m).

341. *S. paradoxa* L. — Alle Faete (Arpino), alla valle di Canneto ed al M. Sant'Angelo (Sora). Luglio (1024m).

342. *Lychnis sylvestris* Hoppe. — Alla via d'Arce ed in tutta la regione bassa e media.

343. *L. alba* Mill. — Ad Arpino. Al lago della Posta ed al Monte Tartaro (Sora) (1127^m).

344. *L. Flos-cuculi* L.—Al colle di Civitavecchia (Arpino), alle Faete, a Carnello ed a Pescosolido. Maggio-Luglio.

345. *Agrostemma Githago* L. — Tra le messi in tutta la regione sino a 1000^m. Maggio-Giugno.

346. *Cerastium viscosum* L. — A Cisterna (Jannule), al Monte Cajro ed a Campoli (Appennino). Luglio (1500^m).

347. *C. vulgatum* L. — Al Vallone ed al Colle dei Morroni (Arpino) al lago della Posta ed a Campoli (Appennino). Aprile (400^m).

348. *C. brachypetalum* Pers. — Al Vallone (Arpino), a Laurita (Brocco), a Vicalvi ed a Picinisco. Luglio (700^m).

var. *viscidum* Gren.—A Pescosolido sulle montagne retrostanti. Maggio (1300^m).

349. *C. glutinosum* Fries. — Alla Valle di Canneto (Picinisco) (1400^m).

350. *C. campanulatum* Viv. — Al Monte Nero (Arpino) (800^m).

351. *C. alpinum* L. — Ne' ritagli di terreno e fra le roccie. Alla base degli Ernici in Valle radice, al Monte Coccio, a Monte Nero (Arpino). Al pozzo Corvaro (Pescosolido), a Vicalvi, al Monte S. Marcello, alla *Lugagna* ed alle *Pietre roscelle* (S. Donato), a' Tre confini ed al Monte Meta (Picinisco). Maggio-Luglio (1800^m).

352. *C. arvense* L. — Diffuso come il precedente, sebbene a livelli più bassi. Aprile-Giugno (1000^m).

353. *C. tomentosum* L. — Nel gruppo degli Appennini, del Cajro e degli Ernici. Aprile-Luglio (800^m).

var. *Columnae* Ten. — Al lato N.E. del Monte Pizzodetta (Balsorano) ed alla Lungagna (S. Donato) (1500^m).

354. *Stellaria media* Will. — In tutta la regione bassa e media. Gennaio-Dicembre

355. *S. nemorum* L. — Al Monte Cajro sopra Terelle. Maggio (1300-1600^m). N. Terr.

356. *S. saxifraga* Spr. — Alla valle di Canneto ed alla Forca dei fiori (Zaffineto) (1900^m). N. Terr.

357. *Arenaria serpyllifolia* L.—Alle Faete ed al colle Castelluccio (Arpino), al lago della Posta ed al bosco di S. Croce. Maggio-Giugno (700^m).

358. *Alsine tenuifolia* Wahl. — Alle Faete, all'Anitrella (Arpino), al lago della Posta (Vicalvi) ed a Valle radice (Sora).

359. *A. verna* Barth. — Presso la cima del Monte Pizzodetta (2000^m), al Campo di grano ed a Pozzo corvaro (Pescosolido), al Monte S. Marcello (San Donato). Luglio (2000^m).

360. *Moehringia muscosa* L. — A Pescosolido, alla callaja del Lacerno (Campoli) ed alla valle di Canneto (Picinisco) (1024^m).

361. *Spergula subulata* Rchb. — Al Campo di grano ed alla *Brecciosa* (Pescosolido) (1900^m). N. Terr.

362. *S. saginoides* Rchb. — Al Zaffineto (Picinisco). Luglio (1900^m). N. Terr.

363. *Drypis spinosa* L.—Nelle sabbie del torrente Lacerno presso Campoli (Appennino). Maggio (1200^m). N. Terr.

RANUNCULACEAE

364. *Clematis Vitalba* L. — Diffusa in tutte le siepi sino a 1000^m. Maggio-Giugno.

365. *Thalictrum aquilegifolium* L. — Ne' margini dei fossi. Al lago della Posta, a Picinisco, ad Atina, a Settefratti, sino ai Tre confini. Maggio-Luglio (1900^m). N. Terr.

366. *T. flavum* L. — Presso le sponde del lago della Posta. Maggio (430^m).

367. *T. minus* L. — Ne' monti sopra il lago della Posta. Maggio-Luglio (430^m).

368. *Anemone alpina* L. — Al Zaffineto (Oppi) alle Pietre Roscelle (Settefratti) a Valcopella ed alla Meta (Picinisco). Luglio-Agosto (1900^m). N. Terr.

369. *A. Coronaria* L. — Nella regione Arpinate. Maggio (600^m).

370. *A. apennina* L. — In tutta la regione media. Aprile.

371. *A. hortensis* L. — Nella stessa località. Marzo-Aprile.

372. *A. trifolia* L. — Ne' boschi del pendio settentrionale e occidentale del Monte Cajro. Giugno (1500^m). N. Terr.

373. *A. ranunculoides* L. — Al Monte La Felcia ed alla regione Controversa (S. Donato) (1600^m).

374. *A. narcissiflora* L. — Nella regione Controversa a Forca d'Acero (S. Donato). Aprile (1600^m).

375. *Hepatica triloba* Caix. — Alla Brecciosa (Pescosolido), al Monte S. Marcello (S. Donato), alle Pietre Roscelle (Settefratti), al Monte Amaro (Oppi) ed alla valle di Canneto (Picinisco). Maggio-Luglio (1800^m). N. Terr.

376. *Adonis autumnalis* L. — Al vallone (Arpino). Maggio-Giugno (260^m).

377. *A. microcarpa* Dec. *A. Cupaniana* Guss. — Al lago della Posta. Maggio (300^m).

378. *Ranunculus peltatus* Schrk. — Al vallone (Arpino) (300^m).

var. *submersus* Freyn. — Nelle pozze d'acqua alle cave d'argilla, alle fornaci (Arpino). Maggio (300^m).

379. *R. Ficaria* L. — In tutta la regione sino alle alte montagne (Forca d'Acero). Marzo-Maggio (1600^m).

380. *R. Thora* L. — Al passeggio dell'orso sopra i Tre confini (Picinisco). Agosto (1931^m).

381. *R. hybridus* Br. var. *brevifolius* Ten. — Alla base della Meta (Picinisco). Agosto (1600^m). N. Terr.

382. *R. montanus* Wild. — Diffuso in tutti i prati montani. Maggio-Giugno (1900^m).

383. *R. Villarsii* DC. — A Forca d'Acero (S. Donato). Giugno (1600^m).

384. *R. acris* L. — Al Vallone (Arpino) ed al lago della Posta. Maggio (300^m).

385. *R. lanuginosus* L. — Nella regione bassa sino a Forca d'Acero ed al Monte Cajro (1600^m).

386. *R. umbrosus* Ten. — Al Vallone, alla Frojetta ed a Monte Ricco (Arpino). Maggio (1000^m).

387. *R. velutinus* Ten. — Al Vallone, alla Frojetta ed a Monte Ricco (Arpino). Maggio (700^m).

388. *R. chaerophyllos* L. — Alle Faete, al Monte Nero ed al Monte Ricco (Arpino). Aprile-Maggio (890^m).

389. *R. millefoliatus* Vahl. — A Forca d'Acero (S. Donato) e nel pendio occidentale del Monte Cajro. Maggio (1600^m).

390. *R. illyricus* L. — Presso i faggeti di Raja Pizzutella al Monte Cajro (1300^m). N. Terr.

391. *R. monspeliacus* L. (*R. rotundifolius* DC.) — Al piano delle Rosole (S. Donato). Maggio (1500^m).

392. *R. neapolitanus* Ten. — Al lago della Posta e lungo il Fibreno. Maggio (300^m).

393. *R. bulbosus* L. — In tutta la regione sino a Forca d'Acero (S. Donato) (1600^m).

394. *R. nemorosus* DC. — A Carnello, Revieto, Via d'Arce ed alle Faete (Arpino). Maggio (700^m).

395. *R. repens* L. (var. *Aleae* Willk.) — Diffuso nella regione media. Ad Arpino, Isola, a Sora e Picinisco (sorgenti della Melfa). Maggio-Luglio (1400^m).

396. *R. philonotis* Retz. — Al Revieto, alle Grottelle ed alla via d'Arce (Arpino). Maggio (500^m).

397. *R. muricatus* L. — Alla via d'Arce ed al Colle (Arpino). Maggio (600^m).

398. *R. arvensis* L. — In tutta la regione sino a Pozzo Corvaro. Maggio (1800^m).

399. *Eranthis hyemalis* Salisb. — L'ho trovato soltanto al Colle di Civitavecchia (Arpino) in un praticello vicino alle mura ciclopiche. Marzo (600^m).

400. *Helleborus foetidus* L. — In tutta la regione bassa e media. Gennaio-Aprile.

401. *Nigella damascena* L. — In tutta la regione bassa e media.

402. *Aquilegia pyrenaica* DC. — Al Monte Pizzodetta. Luglio (1600^m).

403. *Delphinium Consolida* L. — Al Vallone (Arpino), a valle Radice (Sora), nella pianura d'Isola ed alle Faete (Arpino). Luglio-Ottobre (700^m).

404. *D. Ajacis* L. — A Colle S. Magno ed a Balsorano. Maggio (500^m).

405. *Aconitum Lycoctonum* L. (var. *pyrenaicum*). — Alla cresta del Monte Pizzodetta (Orto del Centurione). Luglio (2040^m).

406. *Caltha palustris* L. — Sulle sponde del lago della Posta. Maggio.

PAPAVERACEAE

407. *Papaver Rhoeas* L. — In tutta la regione bassa e media. Maggio-Giugno.

408. *P. dubium* L. — Al Monte Ricco (Arpino). Maggio (700^m) (raro).

409. *P. somniferum* L. — Al Colle di S. Amasia (Piedimonte di Cassino) (700^m). N. Terr.

410. *Chelidonium majus* L. — Al Colle dei Morroni (Arpino), a Sora ed a Vicalvi. Maggio (500^m).

FUMARIACEAE

411. *Corydalis lutea* DC. — Al Monte Ricco (versante della Melfa) ed a S. Pietro a Campeo sull'alto vallone del Lacerno. Aprile-Maggio (700^m).

412. *C. cava* Schw. — Alla costa delle *Rosole*, a Serra *Traversa* e nella regione *Controversa* (S. Donato). Maggio (1800^m).

413. *C. solida* Smith. — Al pendio occidentale del Monte Cajro. Giugno (1500^m).

414. *Fumaria officinalis* L. — In tutta la regione media. Maggio.

415. *F. capreolata* L. — Come la precedente.

BRASSICACEAE

416. *Matthiola incana* R. Br. — Al Monte Castello (Arpino). Maggio (400-560^m).

417. *Cheiranthus Cheiri* L. — Nella stessa località. Marzo-Maggio.

418. *Nasturtium officinale* R. Br. — In tutta la regione bassa e media. Marzo-Ottobre (700^m).

419. *N. sylvestre* R. Br. — Alla Selva tra Isola Liri e Sora. Giugno (300^m).

420. *Barbarea vulgaris* B. Br. — Ad Isola, a Carnello, ad Arpino (Vallone). Aprile-Maggio (280^m).

var. *taurica* DC. — A Valle Radice. Maggio (350^m).

421. *B. praecox* R. Br. — Presso il lago della Posta. Marzo-Aprile (185^m).

422. *B. bracteosa* Guss. — A Forca d'Acero (S. Donato). Noi, ed al Monte Amaro (Oppi). Maggio-Luglio (1850^m). N. Terr.

423. *Arabis Turrita* L. — Ai Morroni, al Colle (presso la parata) nella via d'Isola, a Civitavecchia (Arpino). Marzo-Aprile (600^m).

424. *A. perfoliata* Lam. — Al Monte Ricco (Arpino Casalvieri). Maggio (774^m).

425. *A. alpina* L. — A S. Donato, a Pescosolido, alle Pietre Roscelle (Settefratti), al Monte Pizzodetta (Balsorano), Noi, ai Tre confini ed allo Zaffineto (Picinisco). Maggio-Agosto (1850^m). N. Terr.

426. *A. verna* B. Br. — A Colle carino, al Monte Nero (Arpino), al vallone del Lacerno, a Campoli (Appennino). Marzo-Aprile (800^m).

427. *A. auriculata* Lam. — Al Monte Cajro (Raja pizzutella o Pozzacone). Giugno (1130-1300^m).

428. *A. hirsuta* DC. — Alla via d'Arce, alla via d'Isola, al Vallone (Arpino), al Monte Ricco, alla valle Radice ed in tutta la parte bassa degli Appennini e degli Ernici. Aprile-Maggio (800^m).

429. *A. longisiliqua* Presl. — A Civitavecchia (Arpino). Al Monte Tartaro (Sora) ed a S. Donato val di Comino. Maggio-Luglio (1127^m).

430. *A. muralis* Bert. — Al Colle, al Vallone (Arpino) e ad Isola superiore. Marzo-Aprile (550^m).

var. *rosea* DC. (*A. collina* Ten.) — Ad Isola superiore, a' Morroni, alla salita di Campoli (Appennino), alla valle di Canneto (Picinisco) ed alla valle Radice. Maggio-Agosto (1200^m).

431. *A. serpyllifolia* Vill. (*A. nivalis* Ten.) — Alla Pietrosa. N. Terr.

432. *A. surculosa* Ten. — Al Monte Pietroso. Luglio. (N. Terr.). A Forca d'Acero (San Donato) ed al piano di Macchia Arvaja (Oppi). Giugno-Luglio (1600^m) (Noi).

433. *A. pumila* Jacq. (var. *stellulata* Bertol.) — Al Monte Pietroso. Luglio. N. Terr.

434. *Cardamine hirsuta* L. — In tutta la regione bassa e media. Marzo-Aprile (800^m).

435. *C. Chelidonia* L. — Sopra la grotta del Vaccaro, presso i Tre confini (Picinisco). Agosto (1500^m). N. Terr.

436. *C. uliginosa* M. B. — Tra il Fibreno e il lago della Posta. Maggio (300^m).

437. *C. graeca* L. — Alla valle di Lacerno (Campoli). Maggio (500^m).

438. *Dentaria bulbifera* — Nella regione controversa (S. Donato). Maggio-Giugno (1600^m).

439. *D. pinnata* Lam. — Nella stessa località. Maggio-Giugno.
440. *D. enneaphyllos* L. — Nella stessa località (ed al M. Cajro N. Terr.).
441. *Hesperis matronalis* L.—Alla Grotta del Vaccaro (Picinisco). Agosto (1500^{m}).
442. *H. laciniata* Bertol. — Al M. Cajro. Maggio. N. Terr.
443. *Sisymbrium Thalianum* Gay. — Regione Arpinate. Aprile-Maggio (700^{m}).
444. *S. officinale* Scop. — Regione bassa e media. Maggio-Luglio (700^{m}).
445. *S. Alliaria* Scop. — Regione media sino alle Iannule. Maggio (1000^{m}).
446. *S. altissimum* L.—Alla Raja Pizzutella (M. Cajro). Giugno (1300^{m}). N. Terr.
447. *Erysimum lanceolatum* R. Br.— In tutta la regione sino a 1000^{m}. Giug.-Lug.
448. *E. ochroleucum* DC. — Al M. Pizzodetta. Luglio (600^{m}).
449. *E. orientale* R. Br. — Alle Falde del Monte Cajro verso Piedimonte S. Germano. Giugno (500^{m}). N. Terr.
450. *Brassica campestris* L. — All'Anitrella (Arpino), a Fontana Liri. Maggio-Giugno (180^{m}).
451. *B. Sinapistrum* Boiss. — Presso Roccaviva, alla base del Monte Pizzodetta. Luglio (600^{m}).
452. *B. Gravinae* Ten. — Al lato orientale del M. Pizzodetta. Luglio (1600^{m}).
453. *B. Napus* L. — Coltivata e rinselvatichita.
454. *B. oleracea* L. — Coltivata in tutte le sue razze.
455. *B. nigra* Boiss.—Nella regione Arpinate sino al M. Nero. Aprile-Maggio (800^{m}).
456. *Sinapis arvensis* L. — Vicino al Liri ed al Fibreno. Maggio (280^{m}).
457. *Diplotaxis erucoides* DC. — In tutta la regione bassa e media (50-800^{m}).
458. *D. muralis* DC. — Nelle vie, muri ecc. ad Arpino, Isola e Sora (500^{m}).
459. *D. tenuifolia* DC. — Presso Vicalvi. Maggio (500^{m}).
460. *Eruca sativa* Lam. — Dentro la città d'Arpino e nei campi coltivati presso il Liri. Marzo-Maggio (500^{m}).
461. *Raphanus sativus* L. — Coltivato.
462. *Rapistrum rugosum* Berger. — Ad Arpino, a Sora e ad Isola. Aprile-Maggio (500^{m}).
var. *orientale* DC. — In tutta la regione. Aprile-Maggio.
463. *Lunaria annua* L. — Nelle radure del boschetto S. Germano, dentro l'abitato di Arpino. Maggio (500^{m}).
464. *Aubrietia delthoidea* DC. — A pozzo Corvaro (Pescosolido). Luglio (1800^{m}).
465. *Alyssum calicynum* L. — Ad Arpino, a Santo Padre e a Fontana Liri. Maggio (350-700^{m}).
466. *A. montanum* L. —Versante N.O. del M. Pizzodetta. Luglio (1650^{m}) in frutto.
467. *A. campestre* L. — Alla via di Campoli Appennino. Maggio (650^{m}).
468. *A. cuneifolium* Ten. — Sulla vetta sovrastante la valle dei Tre confini (Oppi) (Valle fondillo). Luglio (1600^{m}). N. Terr.
469. *A. diffusum* Ten. — Sulla vetta del M. Cajro. Giugno (1669^{m}). N. Terr.
470. *Draba verna* L. — Al Cauto, al Vallone (Arpino) e sulla via a Forca d'Acero (S. Donato). Febbrajo-Aprile (800^{m}).
471. *D. muralis* L. — In tutta la regione bassa e media sino a 1000^{m}. Febbraio-Maggio.
472. *D. aizoides* L. — A Forca d'Acero (S. Donato), alle pietre Roscelle, alla parte

alta della Lungagna (Settefratti), al M. Meta, al Zaffineto (Picinisco) ed al Campo di grano (Pescosolido). Maggio-Luglio (1900^m).

473. *Thlaspi arvense* L. — Nella regione media ed al M. Tartaro (Sora). Maggio-Luglio (1200^m).

474. *T. perfoliatum* L. — Al M. Castello, al Cauto (Arpino), a Vicalvi ed a Campoli (Appennino). Marzo-Giugno (500^m).

475. *T. alliaceum* L. — Al lágo della Posta. Maggio (280^m).

476. *T. montanum* L.—Alla valle tra Raja Pizzutella (Pozzoccone) e M. Campanello (Cajro). Maggio (1162^m). N. Terr.

477. *T. praecox* Wulf. — A Forca d'Acero. Aprile (1600^m).

478. *Capsella Bursa-pastoris* Moench. — In tutta la regione sino al livello 800^m.

479. *Hutchinsia petraea* R. Br. — Alla via di Forca d'Acero (S. Donato), alla vetta del M. Cajro, a Pescosolido, alla calaja della valle del Lacerno, a Campoli (Appennino). Aprile-Maggio (1669^m).

480. *H. stylosa* DC. — Nelle rupi tra la Forca dei fiori e lo Zaffineto (Picinisco). Luglio-Agosto (1900^m). N. Terr.

481. *Lepidium graminifolium* L. — In tutta la regione bassa e media. Maggio-Novembre.

482. *L. campestre* R. Br. — In tutta la regione bassa e media. Aprile-Maggio.

483. *L. Draba* L. — In tutta la regione campestre. Maggio.

484. *Aethionema saxatile* R. Br.—Al Monte Tartaro (Sora), ad Alvito, a Pescosolido ed a S. Donato. Maggio-Luglio (1200^m).

485. *Iberis saxatilis* L. — Al M. Tartaro. Luglio (1127^m).

486. *I. umbellata* L. — Sulla via da Settefratti a Val di Canneto. Luglio. N. Terr.

487. *Biscutella laevigata* L.— Alle Faete (Arpino), al M. Pizzodetta, alle Jannule, al M. Cajro ed al M. Amaro (Settefratti). Maggio-Luglio (1300^m).

488. *Isatis tinctoria* All. — Nella regione media. Giugno (700^m).

489. *I. canescens* DC. — Villaggio della Posta. Maggio-Giugno (480^m).

490. *Neslia paniculata* Desv. — Sopra Piedimonte di Cassino ed a Campoli (Appennino). Maggio-Giugno.

491. *Bunias Erucago* L. — Nei campi di tutta la regione bassa e media. Maggio-Giugno.

CAPPARIDACEAE

492. *Capparis spinosa* L. — Alla base del colle di Civitavecchia. Maggio-Luglio.

RESEDACEAE

493. *Reseda Phyteuma* L. —All'Anitrella, a Monte Ricco, alla Frojetta (Arpino) ed a S. Donato. Aprile-Maggio (700^m).

494. *R. luteola* L.—A colle Carino (Arpino) ed a Santo Padre. Ottobre (700^m).

495. *R. alba* L. — Al colle S. Amasia (Piedimonte di Cassino). Maggio (400^m). N. Terr.

VIOLACEAE

496. *Viola odorata* L. — In tutta la parte media e bassa della regione. Marzo-Aprile (700^m).

497. *V. hirta* L. — Nella regione media. Marzo (700^m).

498. *V. silvatica* Fr. — A Forca d'Acero. Maggio-Giugno (1600^m).

499. *V. tricolor* L. var. *arvensis* DC. — Sulla riva sinistra del Fibreno e presso il Liri. Maggio (280-285^m).

var. *hortensis* DC. — Coltivata nei giardini.

500. *V. lutea* Smith. — Al Monte Cajro. Maggio (1600^m). N. Terr.

501. *V. calcarata* L. — Sotto Forca d'Acero, alla Meta, ed a Settefratti. Aprile-Maggio (1000^m).

502. *V. gracilis* Sib. et Smith. — In tutta la catena appenninica sino alla Meta ed ai Tre confini (Picinisco) al gruppo degli Ernici sino al Monte Pizzodetta ed al Monte Cajro. Maggio-Luglio (1400^m).

CISTACEAE

503. *Cistus villosus* L. — In tutta la regione media. Maggio (700^m).

504. *C. salvifolius* L. — Come il precedente.

505. *Helianthemum vulgare* Gaert. — In tutta la regione media ed alta sino a 1000^m. Aprile-Ottobre.

var. *grandiflorum* Scop. — Nel versante ovest del Monte Pizzodetta. Luglio (1800^m).

506. *H. Fumana* Mill. — Alla selva di Sora ed a Monte Tartaro. Giugno-Luglio (1200^m).

507. *H. croceum* Pers. — Sulla vetta del Monte Cajro. Maggio (1669^m). N. Terr.

508. *H. marifolium* DC. — Nella stessa località ed al Zaffineto. Maggio. N. Terr.

509. *H. rubellum* Presl. » » » »

510. *H. obscurum* DC. — Nella stessa località ed al Casino di Trezza (1362^m). N. Terr.

511. *H. italicum* Pers. — A Pescosolido, al colle dell'Orso, alle Pietre Roscelle, alla Pietrosa ed al M. Maro (Picinisco) (1900^m). N. Terr.

HYPERICINEAE

512. *Hypericum Androsaemum* L. — Al bosco S. Croce, alle Faete (Arpino) ed alla selva di Sora. Giugno-Luglio (700^m).

513. *H. calycinum* E. — A Civitavecchia (Arpino). Maggio (600^m) (Rinselvatichita?).

514. *H. perforatum* L. — In tutta la regione sino oltre 1000^m. Maggio-Luglio.

515. *H. montanum* L. — Alle Faete (Arpino), a Forca d'Acero (S. Donato). Giugno-Luglio (1600^m).

516. *H. australe* Ten. — Al Monte Pizzodetta. Luglio (1650^m).

517. *H. tomentosum* L. — Al Monte Cajro, alla Gola di Cancello (Atina) ed alla Valle di Canneto. Maggio (1200^m). N. Terr.

518. *H. hircinum* L. — Alla valle della Melfa (Picinisco). Maggio-Luglio (500^m). N. Terr.

MALVACEAE

519. *Malva Alcea* L. — Nell'orlo dei faggeti al Monte Tartaro ed alla base degli Ernici in Valle Radice. Luglio (1200^{m}).

520. *M. moschata* L. — A Balsorano (monti retrostanti) ed alla valle di Canneto. Maggio-Luglio (1500^{m}). N. Terr.

521. *M. sylvestris* L. — In tutta la regione sino al livello di 1000^{m}. Maggio.

522. *M. rotundifolia* L. — Al colle alto presso Picinisco. Luglio (700^{m}). N. Terr.

523. *M. nicaeensis* Alt. — Alle sorgenti della Melfa (Picinisco) ed a Casalitico (1400^{m}). N. Terr.

524. *Lavatera trimestris* L. — Alla via d'Arce, a Fontana Liri, ad Isola, ed alle Faete. Maggio (700^{m}).

525. *L. cretica* L. — Al Monte Pizzodetta (Balsorano). Luglio (1500^{m}).

526. *L. thuringiaca* L. — A Fontana Liri ed al M. Pizzodetta. Luglio (800^{m}).

527. *L. ambigua* — Picinisco alla Cartiera, Atina, gola di Cancello. N. Terr.

528. *Althaea hirsuta* L. — A Laurita, presso le sponde del Fibreno al M. Nero (Arpino) ed a Campoli. Maggio (800^{m}).

529. *A. rosea* Cav. — Sopra il Rio Ermuci, a Fontana Liri. Maggio (350^{m}).

530. *Hibiscus Trionum* L. — A. S. Donato (500^{m}). N. Terr.

GERANIACEAE

531. *Geranium cinereum* Cav. — Alla valle Longa dopo val Coppella (M. Meta), al M. Amaro (Oppi) ed a Pietre Roscelle. Luglio-Agosto (1900^{m}). N. Terr.

532. *G. sanguineum* L. — Al M. Tartaro (Sora), alla base di M. Castello (Arpino) a S. Padre, alla valle della Melfa ed a Pescosolido. Maggio-Luglio (1200^{m}).

b. varietà a foglie tondeggianti, al M. Tartaro. Luglio (1127^{m}).

533. *G. reflexum* L. — Alle Grotte del Vaccaro (Picinisco), al M. Amaro (Oppi) ed al M. Cajro. Luglio-Agosto (1600^{m}). N. Terr.

534. *G. macrorrhyzon* L. — Al M. Pizzodetta (Balsorano).

535. *G. striatum* L. — Alla Gola di Cancello (Atina). Luglio-Agosto (500^{m}). N. Terr.

536. *G. pyrenaicum* L. — Al M. Pizzodetta, alla Serra nichiuta ed alla selva delle Cornacchie (sopra Casalatico) al Monte S. Marcello ed alla Lungagna. Giugno-Agosto (1600^{m}).

537. *G. pusillum* L. — Al M. Nero (Arpino) ed al M. Cajro (raro) (1305^{m}).

538. *G. rotundifolium* L. — In tutta la regione bassa e media. Aprile-Giugno.

539. *G. molle* L. — Diffuso come il precedente.

540. *G. dissectum* L. — Diffuso nella regione bassa e media.

541. *G. columbinum* L. — Alla base del M. Castello (Arpino) a S. Padre al monte Tartaro ed alla valle di Canneto (Picinisco). Aprile-Luglio (1200^{m}).

542. *G. lucidum* L. — Nella regione bassa e media. Aprile-Luglio.

543. *G. Robertianum* L. — Nella regione media, raro nella regione bassa. Maggio-Luglio.

544. *Erodium cicutarium* L'Herit — Al Monte Tartaro (Sora) ed alla Brecciosa (Pescosolido). Maggio-Luglio (1600^m).

545. *E. moschatum* L'Herit — A Carnello, ad Isola e a Sora. Maggio (280^m).

546. *E. malacoides* W. — Al Colle (Arpino), alla via d'Arce, a S. Padre ed in tutta la regione media. Aprile-Maggio (700^m).

547. *E. alnifolium* Guss. — Alquanto raro. Al Colle, via del Torrione (uliveto Mammone) (Arpino). Aprile (500^m).

548. *E. ciconium* W. — Alle Faete (Arpino). Aprile-Giugno (500-700^m).

549. *Impatients Noli-tangere* — Fra Raja Pizzutella e Monte Campanella (M. Cajro). (1162^m). N. Terr.

550. *Oxalis corniculata* L. — Alla via d'Arce, al colle dei Morroni (Arpino) ed a Magnene (Carnello). Aprile-Giugno (450^m).

LINACEAE

551. *Linum nodiflorum* — Al lago della Posta e presso la via tra Roccasecca e colle S. Magno. Maggio-Giugno (500^m).

552. *L. campanulatum* L. — Al vallone (Arpino). Maggio (260^m).

553. *L. gallicum* L. — All'Anitrella ed alle Faete (Arpino) ed a valle Radice (Sora). Maggio (600^m).

554. *L. strictum* L. — A Pescosolido nell'andare al Campo di grano. Giugno (1500^m). N. Terr.

555. *L. tenuifolium* L. — Al M. Tartaro, al lago della Posta, a valle Radice. Maggio-Luglio (1200^m).

556. *L. usitatissimum* L. — Coltivato nella regione bassa e media. Maggio (700^m).

557. *L. angustifolium* Hud. — Ad Isola, al vallone, alle Faete ed all'Anitrella (Arpino). Maggio (600^m).

558. *L. alpinum* L. — Alle Pietre Roscelle (Settefratti), a S. Donato. Luglio-Agosto (1850^m). N. Terr.

559. *L. catharticum* L. — Alle Faete (Arpino) a M. Tartaro ed a Vado Cavallo (Sora) alla valle di Canneto (Picinisco) ed al Monte San Marcello (S. Donato). Luglio (1300^m). N. Terr.

RUTACEAE

560. *Ruta graveolens* L. — Ad Arpino, Isola, alla Valle della Melfa (Picinisco) ed a Colle San Magno. Giugno (1200^m).

561. *R. bracteosa* DC. — Fra Arpino ed Isola. Maggio-Luglio (500^m).

ANACARDIACEAE

562. *Pistacia Lentiscus* L. — Presso il Rio Ermuci (Fontana Liri). Maggio (600^m).

563. *P. Terebinthus* L. — Al M. Castello, Tre panichi, Colle di Civitavecchia, Coste Calle e Morroni (Arpino) a Vicalvi ed al Monte della Posta (600^m).

ACERACEAE

564. *Acer Pseudo-Platanus* L. var. *villosum* Parl. — Alle Faete (Arpino). Noi, ed al *passeggio dell'Orso* (Picinisco). Aprile-Luglio (1700m). N. Terr.
565. *A. Opalus* Mill. — Alle Faete verso Fontechiari. Aprile-Maggio (700m).
566. *A. obtusatum* W. et K. — Nel versante N.E. del M. Pizzodetta. Luglio (1600m).
567. *A. campestre* L. — In tutta la regione bassa e media. Aprile-Maggio (800m).

POLYGALACEAE

568. *Polygala flavescens* DC. — Alle rive del Fibreno, presso i colli di Laurita, al Monte Tartaro, al lago della Posta. Noi, alla valle di Canneto (Picinisco), a Settefratti, a Monte Croce, Monte Cajro. Maggio-Giugno (1500m). N. Terr.
569. *P. vulgaris* L. — Alla Serra quadrelli (Jannule). Maggio-Giugno (1300m).
570. *P. Chamaebuxus* L. — Alla Madonna di Canneto, al Zaffineto presso Forca dei fiori. Luglio (1900m). N. Terr.
571. *P. amara* L. — Alle Pietre Roscelle (Settefratti). Luglio (1850m). N. Terr.

CELASTRACEAE

572. *Evonimus europaeus*. L. — Sulle rupi calcaree a picco del Colle, vicino alla Parata (Arpino), ed alla valle di Canneto. Maggio (500-1200m).

AQUIFOLIACEAE

573. *Ilex aquifolium* L. — Nei boschi di Arpino e di Fontana Liri. Maggio (1500-1700m).

AMPELIDEAE

574. *Vitis vinifera* L. — A Fontana Liri. Coltivata in tutta la regione sino al livello di 700m.

RHAMNACEAE

575. *Rhamnus infectoria* L. — Alle Faete (Arpino). Giugno (700m).
576. *R. alpina* L. — Alla vetta del Monte Cajro. Maggio-Giugno (1669m). N. Terr.

EUPHORBIACEAE

577. *Euphorbia spinosa* L. — A Civitavecchia, al Monte Castello, al Monte delle Grotte (Arpino), al Monte Cajro, a Roccasecca ed al Colle S. Magno. Maggio-Giugno (600m).
578. *E. platyphylla* L. — Sotto Alvito. Maggio (500m).
579. *E. helioscopia* L. — Al Vallone, al Rio Palelle (Arpino), al Monte Nero ed al Monte Coccio. Marzo (600m).
580. *E. Peplus* L. — Nella regione bassa e media. Marzo-Ottobre (600m).
581. *E. peploides* Gouan. — Al Rio Palelle (Arpino-Fontana). Maggio (400m).
582. *E. exigua* L. — A Roccasecca, salendo a Colle S. Magno. Maggio (500m). N. Terr.

583. *E. falcata* L. — Nella valle della Melfa (Picinisco). Luglio (500^m). N. Terr.

584. *E. Myrsinites* L. — Al Monte Panico (S. Donato). Giugno-Luglio (1200^m).

585. *E. Cyparissias* L. — Al Monte Nero, Monte Coccio (Arpino), a Santo Padre, alla Valle Radice (Sora), al Monte Pizzodetta (Balsorano), alle Jannule (regione Mortalo) ed a Roccasecca. Maggio (1200^m).

586. *E. coralloides* L. — A Forca d'Acero. Maggio-Giugno (1600^m).

587. *E. amygdaloides* L. — Al Monte del Castello, alle Faete (Arpino) e in tutta la regione media. Maggio-Agosto.

588. *E. Characias* L. — Al Monte S. Marcello (S. Donato), alla selva di Sora, al Revieto (Arpino) ed a Rocca d'Arce. Marzo-Maggio (1000^m).

589. *E. sylvatica* Jacq. — Nella valle di Canneto. Luglio-Agosto (1490^m). N. Terr.

590. *Mercurialis annua* L. — In tutta la regione sino al livello di 300^m (Jannule).

591. *M. perennis* L. var. *ovata* Sternb. et Hoppe. — Al Monte Meta parte bassa (Picinisco). Luglio (1800^m). N. Terr.

592. *Buxus sempervirens* L. — Presso Vicalvi, dove forma boschetti, sparso qua e là nelle Faete e negli Ernici. Aprile-Maggio (700^m).

CALLITRICHACEAE

593. *Callitriche autumnalis* L. — b. *truncata* Gussone — Al fosso di Sarzana (Arpino). Marzo.

594. *C. verna* Kutz. — Al Rio di Carnello ed alla via d'Arce presso una sorgente.

APIACEAE

595. *Eryngium amethystinum* L. — Ad Arpino, S. Padre, Sora, salendo a Monte Tartaro, ed a Forca d'Acero. Ottobre (700^m).

596. *E. campestre* L. — Ad Isola Liri, a San Donato, a Colle S. Magno ed a Roccasecca. Ottobre (600^m).

597. *Sanicula europaea* L. — Alla via d'Arce (Arpino), al Bosco delle Cornacchie (Jannule) ed alle Faete. Maggio-Giugno (1000^m).

598. *Astrantia minor* L. — b. *pauciflora* Berthol. — Al Monte Pizzodetta presso la cima. Noi, ed al Monte Meta. Luglio (1900^m). N. Terr.

599. *A. major* L. — Al passeggio dell'Orso. Luglio. N. Terr.

600. *Smyrnium Olusatrum* L. — Ad Arpino, Isola, Sora. Marzo-Aprile (600^m).

601. *Bupleurum aristatum* Barth. — Al Monte Tartaro ed a Vado Cavallo (Sora). (1127^m).

602. *B. protractum* Link. — In tutta la regione bassa e media. Maggio.

603. *B. rotundifolium* L. — Come il precedente.

604. *B. sulcatum* — Alla base degli Ernici in Valle Radice. Luglio (300^m).

605. *B falcatum* L. — Al Monte Pizzodetta. Luglio (300^m).

606. *B junceum* L. — A Monte Santangelo (Sora) ed in Val di Canneto. Maggio (1200^m). N. Terr.

607. *B. tenuissinum* — Presso il lago della Posta. Maggio (280^m). N. Terr.

608. *Trinia vulgaris* DC. var. *carniolica* Kerner. — Presso Fontechiari. Noi, al Monte Meta, alla vetta del Cajro ed alla vetta di Pietre Roscelle (1850^m). N. Terr.

609. *Apium graveolens* L. — Coltivato nella pianura di Sora, d'Isola, ecc.

610. *Ammi majus* L. — Nei campi. A Roccasecca. Maggio (140^m).

611. *Carum Carvifolium* DC. — Al Monte Pizzodetta. Luglio (2000^m).

612. *C. bulbocastanum* Kock. — Al Monte Cajro, sui perroni, al Monte Tartaro, al Monte San Marcello ed al Monte della Posta. Maggio-Luglio (1500^m).

613. *C. alpinum* Arch. comp. fl. It. — Alla Meta ed ai Tre confini (Picinisco). Agosto (800^m). N. Terr.

614. *C. ammoides* Arch. l. c. — Alle Faete ed a Vicalvi. Maggio-Giugno (700^m).

615. *Aegopodium Podagraria* L. — A Pescosolido ed a Sora. Maggio-Luglio (800^m).

616. *Sison Amomum* L. — Presso la cartiera Visocchi sotto Picinisco. Agosto (400^m). N. Terr.

617. *Sium nodiflorum* L. — A Sora. Maggio (280^m).

618. *S. angustifolium* L. — Ad Arpino ed a Magnene (Carnello).

619. *Pimpinella Tragium* Pers. — Alla cima del Monte Pizzodetta (Orto del Centurione) ed a Picinisco. Nello scendere alla Melfa. Luglio (2200^m).

620. *P. Saxifraga* L. — A Vicalvi ed in Val di Canneto (Picinisco). Luglio-Settembre (1200^m).

621. *Scandix Pecten-Veneris* L. — In tutta la regione bassa e media. Aprile-Maggio.

622. *Anthriscus sylvestris* Hoffm. — Ai Tre confini (Picinisco), al Zaffineto. Luglio (1500-1900^m). N. Terr.

623. *Chaerophyllum aureum* L. — Presso il boschetto di S. Germano (Arpino) ed al Vallone. Maggio (500^m).

624. *C. temulum* L. — A Pescosolido ed a Vicalvi. Maggio-Giugno (600^m).

625. *C. hyrsutum* L. — Al Monte Pizzodetta (Balsorano). Noi, a Pozzocorvaro (Pescosolido) ed al Monte Amaro (Oppi). Maggio-Agosto (1800^m). N. Terr.

626. *C. magellense* Ten. — Alla Valle di Canneto ed ai Tre confini (Picinisco). Luglio-Agosto (1500^m) N. Terr.

627. *Tinguarra sicula* B. et H. (*Athamanta* L.) — A Monte Ricco. Maggio (774^m).

628. *Seseli montanum* L. — A Vicalvi ed a Val di Canneto (Picinisco). Maggio-Luglio (1200^m).

629. *S. polyphyllum* Ten. — A Villa latina ed a Rocca d'Arce. Maggio (500^m).

630. *Foenicutum officinale* All. — Nella regione media sino al Monte Tartaro e Vado Cavallo (Ernici). Luglio (1300^m).

var. *sativum*. — Coltivato nella regione bassa e media.

631. *F. piperatum* DC. — A colle S. Magno. Maggio (460^m). N. Terr.

632. *Cnidium apioides* Spr. — Al Monte S. Angelo (Sora) e nel sentiero tra la Valle di Canneto e Settefratti. Agosto (800^m). N. Terr.

633. *Oenanthe pimpinelloides* L. — Presso il lago della Posta, a Sora ed a Carnello. Maggio (300^m).

634. *O. fistulosa* L. — A Monte Tartaro e presso Balsorano. Maggio-Luglio (1200^m).

635. *Angelica sylvestris* L. — Alla Val di Canneto (Picinisco) (1500^m). N. Terr.

636. *Ferula Ferulago* L. — Al Monte Santangelo (Sora) (800^m). N. Terr.

637. *Tordylium apulum* L. — Nella regione Arpinate. Aprile-Maggio (700^m).

638. *T. maximum* L. — Al Monte Tartaro ed a Picinisco presso la cartiera Visocchi. Maggio-Luglio (1127^m).

639. *Heracleum cordatum* Presl. — Alla Costa cavallara (Monte Meta). Agosto (1790^m). N. Terr.

640. *H. Panaces* DC. —Nella Valle di Canneto. Agosto (1300^m). N. Terr.

641. *H. Orsinii* Guss. — Nella stessa località.

642. *Daucus grandiflorus* B. et H. — Al Colle di Civitavecchia (Arpino). Maggio (600^m).

643. *D. platycarpos* B. et H. — Al Monte Tartaro ed al Vallone (Arpino). Maggio-Luglio (190-1200^m).

644. *D. setulosus* Guss. — In tutta la regione sino a Monte Tartaro e Vado Cavallo. Maggio (1200^m).

645. *D, Carota* L. — Presso Arpino ed Atina. Maggio (500^m).

var. *sativa* — Coltivata nella regione bassa e media.

646. *D. Gingidium* L. — Presso via d'Arce (Arpino). Maggio (500^m).

647. *D. Broteri* Ten. — Alla Salita di Atina. Maggio (500^m).

648. *Caucalis leptophylla* L. — A Santo Padre, ad Arpino ed a Fontechiari. Maggio (700^m).

649. *C. infesta* B. et H. — A Valle Radice (Sora). Luglio (350^m).

650. *C. latifolia* L. — A Valle Radice ed alle falde del Monte Cajro presso Piedimonte S. Germano. Maggio (500^m). N. Terr.

651. *C, nodosa* Smith. — Sulla via di Santo Padre. Aprile (700^m).

var. *daucoides* L. — Nei Colli aridi a Vicalvi e sul Monte Cajro. Giugno-Luglio (500^m). N. Terr.

652. *C. heterophylla* B. et H. — Al Monte Cajro. Maggio (1000^m). N. Terr.

653. *Laserpitium Siler* L. — Al Monte Pizzodetta (Balsorano), a Picinisco e nel salire allo Zaffineto. Luglio (2000^m).

654. *L. latifolium* L. — Presso la sorgente della Melfa (Picinisco), al Monte San Marcello (S. Donato) ed al Zaffineto. Luglio-Agosto (1600^m). N. Terr.

655. *Elaeoselinum Asclepium* Bertol. — Al Monte Cajro. Giugno (1597^m?).

HEDERACEAE

656. *Hedera Helix* L. — In tutta la regione. Ottobre.

CORNACEAE

657. *Cornus sanguinea* L. — Nella regione bassa e media. Aprile-Luglio.

658. *C. mas* L. — Come la precedente.

CRASSULACEAE

659. *Cotyledon Umbilicus* L. — In tutta la regione sino a 1000^m. Maggio.

660. *Sempervivum tectorum* L. — Dentro la città e nelle vicinanze di Arpino. Giugno-Luglio.

661. *S. montanum* L. — Sopra Balsorano ed al Monte Pizzodetta. Luglio (2000^m).

662. *S. arcnoideum* L. — Alla Pietrosa presso Forca de' fiori. Luglio. N. Terr.

663. *Sedum Cepaea* L. — Ad Arpino (Via d'Arce). Luglio (500ᵐ).

664. *S. dasyphyllum* L. — Ad Arpino, Fontechiari, alla selva di Sora, a Valle Radice ed a Roccasecca. Giugno (500ᵐ).

665. *S. glaucum* Wetk. — In tutta la regione bassa e media. Maggio-Giugno (1127ᵐ).

666. *S. album* L. — Alle Faete ed al Monte Pizzodetta. Giugno (1200ᵐ).

667. *S. magellense* Ten. — Alla Meta, al Zaffineto ed al passeggio dell'Orso (Picinisco), al Monte Amaro, a Pietre Roscelle ed a Val Copelle. Agosto (1900ᵐ). N. Terr.

668. *S. rubens* L. — Ad Arpino. Giugno (600ᵐ).

669. *S. atratum* L. — Al Zaffineto ed in Val Copella (Picinisco). Agosto (1800ᵐ). N. Terr.

670. *S. alpestre* Vill. — Al Monte Pizzodetta (Vers. N.O.). Luglio (2000ᵐ).

671. *S. acre* L. — Alle Faete ed in tutte le colline presso Arpino. Luglio (700ᵐ).

var. *neglectum* Ten. — Al Monte Pizzodetta, alle Faete (Arpino), a Colle S. Magno. Noi, alla Lungagna in Val di Canneto (Picinisco) e al Monte Cajro. Giugno-Luglio (1600ᵐ). N. Terr.

672. *S. mite* Gilib. — Ad Arpino. Giugno (700ᵐ).

673. *S. rupestre* L. — Nei greppi calcarei. Al Colle ed alle Faete (Arpino), al Monte Tartaro, alle Jannule (regione Mortalo) ed al Monte Pizzodetta. Giugno-Luglio (500-1500ᵐ).

674. *S. sexangulare* L. — Tra Roccasecca e Santo Padre. Giugno (600ᵐ).

675. *Crassula Magnolii* DC. — Alla vetta della montagna sovrastante Pescosolido. Luglio (1800ᵐ). N. Terr.

SAXIFRAGACEAE

676. *Saxifraga rotundifolia* L. — Alle Jannule (Selva delle Cornacchie), alle Tre rave sotto Monte Panico (S. Donato) ed al Monte Cajro. Giugno (1800ᵐ).

677. *S. tridactylites* L. — Ad Arpino (Cauto, Civita, Castello), al Monte Castelluccio, al Monte San Marcello, al Monte Panico (S. Donato), alla Meta, a Campoli ed a Casalvieri. Marzo-Giugno (1500ᵐ).

678. *S. granulata* L. — Ai monti di S. Donato. Maggio (1600ᵐ).

679. *S. bulbifera* L. — Al Monte Cajro. Luglio. N. Terr.

680. *S moschata* Wulf. — Alle Pietre Roscelle. Agosto (1800ᵐ). N. Terr.

681. *S. porophylla* Bertol. — Alla Forca dei fiori, alla Meta, ai Tre confini, allo Zaffineto, nella contrada del Tabaccaro (Picinisco). Al Monte S. Marcello ed alle Pietre Roscelle (1900ᵐ). N. Terr.

682. *S. caesia* L. — Tra il Zaffineto e la Forca dei fiori (Picinisco). Agosto (1800ᵐ).

683. *S. oppositifolia* L. — Al Monte Meta ed alle Pietre Roscelle (Settefratti). Agosto (1800ᵐ). N. Terr.

684. *S. lingulata* Bell. — Presso la cima del Monte Pizzodetta (2000ᵐ). Noi, in Val di Canneto ed a Val Copella. Luglio (2000ᵐ). N. Terr.

685. *S. Aizoon* Jacq. — A Forca d'Acero, al Monte S. Marcello. Noi, al Monte Meta, a Pozzocorvaro (Pescosolido) ed al Monte Cajro. Giugno-Luglio (1800ᵐ). N. Terr.

686. *S. adscendens* L. — A Forca d'Acero ed al Monte Panico (S. Donato), Giugno (1600ᵐ).

687. *Adoxa moschatellina* L. — A Forca d' Acero. Aprile (1600ᵐ).

CACTACEAE

688. *Opuntia Ficus indica* Mill. — Ad Arpino, a Carnello, a Roccasecca e ad Isola. Coltivata.

OENOTHERACEAE

689. *Epilobium tetragonum* L. — Ne' luoghi umidi. Ad Arpino ed a Magnene. Maggio (500^m).
690. *E. montanum* L. — Alla selva delle Cornacchie (Jannule). Noi, al Monte Cajro ed ai Tre confini (Picinisco). Giugno-Agosto (1800^m). N. Terr.
691. *E. lanceolatum* Seb. et Maur. — Ne' luoghi umidi. A Sora. Maggio (280^m).
692. *E. parviflorum* Schrb. — Alla via d'Arce (Arpino), a Casalvieri e ad Isola. Aprile-Maggio (700^m).
693. *E. angustifolium* L. — Presso la cima del Monte Pizzodetta. Noi, alle Pietre Roscelle ed a Picinisco. Luglio (2000^m). N. Terr.
694. *E. angustissinum* Bert. — Alla base del Monte Pizzodetta e nell'alveo del Molarino (Picinisco). Luglio (600^m).

HALORAGACEAE

695. *Myriophyllum verticillatum* L. — Nel lago della Posta. N. Terr.
696. *Hippuris vulgaris* L. — Nel lago della Posta. N. Terr.

LYTHRACEAE

697. *Lythrum Salicaria* L. — Nelle sponde del Liri, a Valle Radice e presso il lago della Posta. Luglio (300^m).
698. *L. Graefferi* Ten. — Alle Faete presso Fontechiari. Maggio (500^m).

MYRTACEAE

699. *Myrtus communis* L. — Nella montagna. Sopra le *grotte* (Rio Ermuci) (Arpino). Maggio (400^m).
700. *Punica Granatum* L. — A Roccasecca.

DAPHNACEAE

701. *Daphne Laureola* L. — Alle Faete presso la grotta delle Fate (Arpino) ed a Forca d'Acero. Marzo-Aprile (600-1000^m).
702. *D. Mezereum* L. — A Forca d'Acero, a Serra traversa, alla Controversa, alla Costa delle Rosole, alle Pietre Roscelle, in valle Canneto ed ai Tre confini. Maggio (1600^m).
703. *Passerina annua* Spr. — Alla valle del Molarino sotto Atina ed a S. Donato. (600^m). N. Terr.

ROSACEAE

704. *Prunus spinosa* L. — Regione media e bassa. Maggio.
705. *P. communis* L. — Coltivata in tutta la regione.
706. *P. Persica* Celak. » » »
707. *P. Armeniaca* L. » » »
708. *P. domestica* L. » » »
709. *P. avium* L. » » »
710. *P. Cerasus* L. » » »
711. *Rubus tomentosus* Brok. — In tutta la regione. Giugno-Luglio.
712. *R. caesius* L. — Alle Faete, sulla via di Fontechiari, sulla via d'Arce ed a S. Donato (700^m).
713. *R. glandulosus* Bell. — Alla via di Fontechiari. Giugno-Luglio (600^m).
714. *R. idaeus* L. — Nei boschi e luoghi scoperti. Ai Tre confini (Picinisco) ed al Monte Cajro (1600^m). N. Terr.
715. *Geum urbanum* L. — Alla via d'Arce ed alle Faete (Arpino), alla selva delle Cornacchie (Jannule) ed al Rio Sarzana. Maggio (1200^m).
716. *Fragaria vesca* L. — Ad Arce, ad Arpino, al Monte Tartaro ed a Vado Cavallo. Maggio-Luglio (1200^m).
717. *F. collina* L. — Alla via d'Arce, al Monte Tartaro ed a Vado Cavallo. Maggio-Luglio (1200^m).
718. *Potentilla Fragariastrum* Echrh. — Ai Tre confini. Agosto (1600^m). N. Terr.
719. *P. apennina* Ten. — Alla vetta del Monte Meta. Agosto-Settembre (2241^m). N. Terr.
720. *P. caulescens* L. — Alla valle di Canneto. (Picinisco) (1300^m). N. Terr.
721. *P. opaca* L. — Alla Brecciosa (Pescosolido) (1600^m).
722. *P. verna* L. — A Forca d'Acero (San Donato), sopra Pescosolido (Brecciosa) ed alla Meta. Maggio-Luglio (1800^m).
723. *Potentilla reptans* L. — In quasi tutta la regione bassa e media. Maggio.
724. *P. canescens* Bess. — Tra le Portelle e le Baghelle (Jannule) ed al Monte Tartaro. Luglio (1127^m).
725. *P. recta* L. — Al Monte Tartaro. Luglio (1127^m).
   var. *hirta* L. — Ne' prati montani. A Pozzo Corvaro (Pescosolido). Luglio (1800^m). N. Terr.
726. *Dryas octopectala* L. — Nelle rupi allo Zaffineto (1900^m). N. Terr.
727. *Alchemilla vulgaris* L. — A Pescosolido, alla Forca d'Acero (S. Donato), al Monte Pizzodetta (Balsorano), al Monte Meta (Picinisco) e al Monte Cajro. Giugno-Agosto (1600^m).
728. *A. alpina* L. — Presso la vetta del Monte Pizzodetta. Noi, ai Tre confini, al Monte Maro, alle Pietre Roscelle ed al Monte Meta. Luglio-Agosto (2000^m). N. Terr.
729. *Agrimonia Eupatoria* L. — Alla via d'Arce (Arpino), al Vallone ed al Monte Cajro. Giugno-Ottobre (1000^m).
730. *A. odorata* Mill. — Ad Isola Liri (via del Cavone). Agosto (280^m).
731. *Poterium Sanguisorba* L. — Al Campo di grano (Pescosolido) ed al Monte Cajro. Maggio-Luglio (1800^m). N. Terr.

732. *P. muricatum* Sp. — In tutto l'agro Arpinate. Agosto-Ottobre (600^m).

733. *Rosa rubiginosa* L. — Alla selva di Sora, a Campoli, Appennino, a Picinisco ed a Villa Latina. Maggio (700^m). N. Terr.

734. *R. canina* L. — In tutta la regione bassa e media. Maggio.

var. *dumalis* Bechst. — Nelle siepi. Presso il Rio di Carnello (300^m).

735. *R. arvensis* Huds. — Nelle macchie. Alla selva di Sora, al M. Tartaro, a Fontechiari, a Settefratti. Maggio-Giugno (1200^m).

736. *R. sempervirens* L. — Alla via d'Isola, a Civitavecchia, alla Via d'Arce (Arpino). Maggio (600^m).

var. *floribunda* Guss. — Alle Faete ed alla selva di Sora. Maggio (600^m).

var. *microphylla* Kock. — Al Monte Pizzodetta ed a Pescosolido. Giugno (1500^m).

737. *R. alpina* L. var. *pyrenaica*. — Al Monte Pizzodetta ed al Zaffineto. Luglio (2000^m).

738. *R. collina* Wild. — Alle Faete. Giugno (700^m).

739 *R. Pouzini* Tratt. — Valle della Melfa (Picinisco). Maggio (800^m). N. Terr.

740. *R. pumila* L. — A Roccasecca ed al lago della Posta. Maggio (280-400^m). N. Terr.

741. *Pyrus Aria* Rhrh. — A Pescosolido, al Monte Panico, al Monte S. Marcello (S. Donato), a Val di Canneto ed al Monte Cajro sopra il villaggio della Posta. Maggio-Luglio (1600^m).

742. *Sorbus domestica* L. — Ne' boschi della regione media.

743. *S. Aucuparia* L. — Allo Zaffineto (Picinisco). Agosto (1700^m). N. Terr.

744. *S. torminalis* Crantz. — Alle Faete, alle rupi presso il lago della Posta ed al Monte Cajro. Maggio (700^m).

745. *Amelanchier vulgaris* Moench. — Alla cima del Monte Pizzodetta, alla Meta, alla Valle di Canneto. Luglio-Settembre (2000^m).

746. *Mespilus pyracantha* L. — Nella regione media. Maggio.

747. *Crataegus Oxyacantha* L. — Come la precedente.

var. *monogyna* Jacq. — Al Monte Cajro. N. Terr.

748. *Cotoneaster tomentosa* Lind. — Nella Valle di Canneto. Agosto (1000-1300^m).

PHASEOLACEAE

749. *Spartium junceum* L. — In tutta la regione media sino a 800^m di altezza. Maggio.

750. *Genista tinctoria* L. — Alle Faete (Arpino), alla pianura d'Isola, alla selva di Sora, a Vicalvi, a Picinisco, a Villa latina ed alla valle del Molarino. Maggio-Giugno.

751. *Cytisus Laburnum* L. — Ad Arpino (Faete), al colle dei Morroni, ad Isola superiore, alla selva di Sora, a Villa latina, a' Tre confini, alla valle di Canneto, a Campoli e ad Arce. Aprile Maggio (1200^m).

752. *C. sessilifolius* L. — Alle Faete (Arpino), a Fontana Liri, alla base degli Ernici (Sora), a Colle S. Magno ed alla valle di Sora (800^m).

753. *C. hirsutus* L. — Alla selva di Sora ed in tutta la base degli Ernici sino a' dirupi di Colle piano. Maggio-Luglio (600^m).

754. *C. spinescens* Sieber. — In quasi tutto il versante sud-ovest delle montagne di S. Donato. Aprile (1200^m).

784. *T. medium* L. — Al Monte Tartaro, alle Faete ed al Monte Santangelo (Sora). Giugno-Luglio (1200^m).

785. *T. pratense* L. — Al Vallone (Arpino), alla pianura d'Isola, alla Lungagna ed a San Donato. Maggio-Agosto (1300^m).

786. *T. ochroleucum* L. — Alla Selva di Sora, alle Faete, al Monte San Marcello (San Donato), ed al Monte Tartaro. Aprile-Giugno (1600^m).

787. *T. praetutianum* Guss. — Al Monte Pizzodetta verso la cima, ed all'Orto del Centurione. Luglio (2000^m).

788. *T. stellatum* L. — Alle Grottelle (Arpino), alle Faete ed ai Colli di Laurita. Maggio (700^m).

789. *T. resupinatum* L. — Presso la stazione di Arpino, a S. Domenico (Isola) ed alle Faete. Maggio (700^m).

790. *T. tomentosum* L. — Al Monte Nero e al Monte Coccio (Arpino). Maggio-Giugno (800^m).

791. *T. vesciculosum* Savi. — Al Vallone (Arpino). Maggio (280^m).

792. *T. spumosum* L. — Nella stessá località.

793. *T. nigrescens* Vill. — A Monte Ricco, alla Frojetta, a S. Donato ed al Monte Tartaro. Maggio-Luglio (1200^m).

794. *T. repens* L. — Lungo i corsi d'acqua. Al Revieto (Arpino), al Fibreno, al Liri ed alla Melfa. Maggio.

795. *T. pallescens* Schreb. — Alle Faete (Arpino). Giugno (700^m).

796. *T. procumbens* L. — A Carnello, al Monte Tartaro ed a S. Domenico (Isola). Giugno (1200^m).

797. *Anthyllis vulneraria* L. — Al Monte Tartaro. Luglio (1127^m).

798. *A. tetraphylla* L. — Tra l'Anitrella e Fontana Liri, a Roccasecca ed a Colle S. Magno. Maggio (500^m).

799. *Dorycnium herbaceum* Vill. — Sulla strada d'Isola ed alla valle della Melfa. Maggio (500^m).

800. *D. suffruticosum* Vill. — Al Monte Cajro (1000^m). N. Terr.

801. *Lotus corniculatus* L. — Nella regione media ed alta sino a 1500^m (Lungagna). Aprile-Maggio.

802. *L. ornithopodioides* L. — Al Colle (Arpino), ad Isola ed a Carnello. Aprile-Giugno (600^m).

803. *L. tenuis* Waldst. — Al Monte Nero (Arpino) ed al lago della Posta. Maggio (800^m).

804. *Galega officinalis* L. — In tutta la regione, coltivata come pianta da rovescio. (volg. Trina). Maggio-Giugno.

805. *Colutea arborescens* L. — Alla pianura d'Isola (sotto la Madonna di Schito), alla selva di Sora ed a Campoli. Maggio-Giugno.

806. *Astragalus monspessulanus* L. — Alla salita del torrente Molarino (Picinisco). Settembre. N. Terr.

807. *A. aristatus* L'Herit. — Al piano de' Monaci (M. Meta). Maggio-Giugno (1800^m). N. Terr.

808. *A. depressus* L. — Al Monte Cajro ed alla Brecciosa (Pescosolido). Maggio-Luglio (1800^m). N. Terr.

809. *A. hamosus* L. — Al Monte Cajro. Maggio (1200^m). N. Terr.

810. *Scorpiurus subvillosa* L. — Nella regione media. Aprile-Maggio (700^m).

811. *Coronilla Emerus* L. — A Colle Menghito (Isola), in tutti i colli tra Isola superiore e l'Anitrella, alla base degli Ernici, a Monte Coccio ed a Roccasecca. Aprile-Maggio (600^m).

812. *C. varia* L. — Ad Isola Liri, all'Anitrella, a Sora, a Vicalvi, al Monte Santangelo (Sora), ad Alvito ed a S. Donato (val di Comino). Maggio-Giugno (800^m).

813. *C. scorpioides* Kock. — Alla via d'Arce, al Revieto ed al boschetto S. Germano (Arpino). Maggio (500^m).

814. *Securigera Coronilla* DC. — Nella regione bassa e media. Maggio.

815. *Hippocrepis unisiliquosa* L. — Alla base degli Ernici (valle Radice). Luglio.

816. *H. glauca* Ten. — Al Monte S. Marcello (S. Donato) ed al Monte Cajro. Maggio (1500^m).

817. *H. comosa* L. — Alle Pietre Roscelle (Settefratti), a' Tre confini (Picinisco) ed al Monte Amaro (Oppi). Luglio-Agosto (1800^m).

818. *Hedysarum coronarium* L. — Nella regione media (coltivata). Maggio (700^m).

819. *Onobrychis sativa* Lam. — Coltivata.

820. *Lathyrus Aphaca* L. — A Monte Nero, a Revieto, a Civitavecchia (Arpino) (800^m).

821. *L. Ochrus* DC. — Alla via d'Arce. Giugno (500^m).

822. *L. Clymenum* L. var. *auriculatus* (Bert.) — Al Monte Ricco. Maggio (700^m).

823. *L. angulatus* L. — A Civitavecchia ed al Bosco di S.^{a} Croce (Arpino). Maggio (700^m).

824. *L. sphaericus* Retz. — Presso il lago della Posta. Maggio (300^m).

825. *L. setifolius* L. — Al Monte Ricco. Maggio (700^m).

826. *L. Cicera* L. — A Civitavecchia ed al Bosco di S.^{a} Croce (Arpino). Maggio (700^m).

827. *L. sativus* L. — A Civitavecchia (lato Nord). Maggio (600^m).

828. *L. annuus* L. — Ad Arce, al Ponte della Scaffa (Arpino) e lungo la riva sinistra del Fibreno. Maggio (500^m).

829. *L. sylvestris* L. — Alla via d'Arce. Maggio (500^m).

var. *ensifolius* Bad. — A valle Radice ed alla via d'Arce (500^m).

830. *L. pratensis* L. — Ne' prati. A Civitavecchia, alle Faete (Arpino) ed al lago della Posta. Maggio-Giugno.

831. *Vicia Faba* L. — Coltivata in parecchie varietà.

832. *V. sepium* L. — Alla regione Prato (Pescosolido), al Monte S. Marcello (San Donato) ed alle Faete. Maggio-Giugno (1300^m).

833. *V. grandiflora* Scop. — Al Vallone ed al Monte Cajro. Maggio.

834. *V. lutea* L. var. *hirta* (Balb.) — Al Vallone ed all'aia della Comune (Arpino). Maggio (400^m).

835. *V. hybrida* L. — Nelle stesse località.

836. *V. sativa* L. var. *macrocarpa* (Moris) — Spontanea e coltivata in tutta la regione. Maggio.

837. *V. cuneata* Guss. — Id. id.

838. *V. peregrina* L. — Al Castello, al Vallone (Arpino) e nella regione Prato (Pescosolido) (500^m).

839. *V. Gerardi* Vill. — Al Monte Cajro. Maggio (1000ᵐ). N. Terr.

840. *V. varia* Host. — Al Vallone (Arpino), al Colle di Laurita, a valle Radice (Sora) ed a Santo Padre. Maggio (750ᵐ).

841. *V. pseudo-cracca* Bert. — Alla via d'Arce ed alla via d'Isola (Arpino) (450ᵐ).

842. *V. bithynica* L. — Alle Grottelle, al Vallone ed alla via d'Arce (Arpino) Maggio (450ᵐ).

843. *V. pubescens* B. et H. (Ervum) — Al lago della Posta. Maggio (300ᵐ).

844. *V. disperma* DC. — Nella stessa località.

845. *V. Lenticula* Schreb. (Ervum) — Alle falde del Monte Castello (Arpino) e presso il lago della Posta. Maggio (300ᵐ).

846. *V. Ervilia* Wild. (Ervum) — Alle falde del Monte Castello (Arpino) ed a Roccasecca. Maggio.

847. *V. Lens* L. (Ervum) — Coltivata. Maggio.

ARISTOLOCHIACEAE

848. *Aristolochia rotunda* L. — Presso Fontechiari. Luglio (400ᵐ).

849. *A. longa* L. — Presso le selve al Monte Cajro. Maggio (1500ᵐ). N. Terr.

SANTALACEAE

850. *Osyris alba* L. — Al colle di Civitavecchia presso la chiesa di S. Girolamo (Arpino). Maggio (600ᵐ).

851. *Thesium montanum* Ehrh. — Alla collina di Vicalvi sopra la strada rotabile. Giugno (400ᵐ). N. Terr.

LORANTHACEAE

852. *Viscum album* L. — Sui peri. Presso S. Padre. Aprile-Maggio.

ERICACEAE

853. *Arbutus Unedo* L. — Alle Grotte presso Rio Ermuci (Fontana Liri). Coltivato in altri punti. Ottobre-Novembre (400ᵐ).

854. *A. Uva ursi* L. — Al Zaffineto (Oppi-Picinisco). Agosto (1900ᵐ). N. Terr.

855. *Pyrola secunda* L. — Al Zaffineto. Luglio-Agosto (1900ᵐ). N. Terr.

856. *Monotropa Hypopitys* L. — Al passeggio dell'Orso (Picinisco). Agosto-Settembre (1700ᵐ). N. Terr.

857. *Erica arborea* L. — Alle Grotte, a Fontana, ad Arpino ed a Fontechiari. Maggio (500ᵐ).

PRIMULACEAE

858. *Primula vulgaris* Huds. — In tutta la regione bassa e media. Gennajo-Marzo.

859. *P. auricola* L. var. *Balbisi* Lechm. — Al Monte Pizzodetta (1000ᵐ), a Valcopella ed alle Pietre Roscelle (Picinisco). Giugno-Agosto (1900ᵐ).

860. *P. suaveolens* Bertol. var. *Tomasini*, G. et Godr., o *P. Columnae* Ten.— Presso la cima del Monte Pizzodetta. Luglio (2000ᵐ).

861. *Cyclamen repandum* Sibth. et Smith. — In tutta la regione media, raro nella bassa. Primavera ed autunno.

862. *C. hederaefolium* Ait. Kew. *C. Neapolitanum* Ten. — Nelle stesse località.

863. *Lysimachia nummularia* L. — Lungo la riva sinistra del Fibreno. Maggio (280^m).

864. *Anagallis arvensis* L. — Nella regione bassa e media. Maggio.

var. *Monelli* L. — Come la precedente ma meno diffusa.

865. *Samolus Valerandi* L. — Al Vallone (Arpino). Maggio.

PLUMBAGINACEAE

866. *Plumbago europaea* L. — In tutta la regione media. Ottobre (600^m).

867. *Armeria magellensis* Boiss. (*A. gracilis* Ten.) — Al Monte Tartaro (Sora), a Forca d'Acero (S. Donato), al Monte Pizzodetta (Balsorano), al Monte Meta ed al Monte Cajro. Luglio (1800^m).

868. *A. denticulata* Bert. — Ai Tre confini (Picinisco). Agosto (1800^m). N. Terr.

869. *A. alpina* W. — Alle Pietre Roscelle (Settefratti). Agosto (1850^m). N. Terr.

OLEACEAE

870. *Olea europaea* L. — Ne' greppi calcarei. Al Monte Castello ed alla *Jocca dell'Ovo* (Arpino). Coltivata sino a 600^m sul mare.

871. *Phyllirea variabilis* Timb. — Alla regione Grotte presso Rio Ermuci (Fontana) (400^m).

872. *Ligustrum vulgare* L. — Nella regione media, rara nella regione alta. Maggio.

873. *Jasminum officinale* L. — A Fontechiari (presso l'Icona). Noi, ed a Colle S. Magno presso la grotta Tomasina (600^m). N. Terr.

874. *Fraxinus Ornus* L. — Nella regione Arpinate. Maggio (700^m).

GENTIANACEAE

875. *Gentiana lutea* L. — Presso la cima del Monte Pizzodetta ed all'Orto del Centurione (Balsorano), Noi, alle Pietre Roscelle (Settefratti), alla *Costa Cavallara* ed ai Biscurri (Monte Meta). Luglio-Agosto (2000^m). N. Terr.

876. *G. cruciata* L. — Al Monte Tartaro ed a Vado Cavallo, Noi, in Val di Canneto ed al Monte Cajro. Luglio (1600^m). N. Terr.

877. *G. acaulis* L. — Alla costa Cavallara (M. Meta) (1600^m). N. Terr.

878. *G. amarella* L. — Alla Piana dei Monaci (M. Meta). N. Terr.

879. *G. campestris* L. — Nella stessa località (1600^m). N. Terr.

880. *G. ciliata* L. — Alle sorgenti della Melfa (1300^m). N. Terr.

881. *G. nivalis* L. — Alle Pietre Roscelle (Settefratti). Luglio (1850^m). N. Terr.

882. *Chlora perfoliata* L. — In tutta la regione sino a 600^m. Maggio.

883. *Erythraea Centaurium* Pers. — Nella regione bassa e media. Maggio.

884. *E. pulchella* Fr. — Come la precedente, ma meno diffusa. Maggio.

APOCYNACEAE

885. *Vinca major* L. — Ad Arpino, Isola, Sora e Carnello. Maggio (500^m).
886. *V. media* Hfm. et Lk. — A Colle carino (Arpino). Marzo (483^m).
887. *V. minor* L. — Ad Arpino. Marzo-Maggio.
888. *Nerium Oleander* L. — Alla base degli Ernici presso Valle Francesca. Luglio (inselvatichito).

ASCLEPIADACEAE

889. *Cynanchum Vincetoxicum* Br. — Al colle di Civitavecchia presso S. Gerolamo ed alla Parata (Arpino), a Colle S. Magno, ed alla via di Forca d'Acero (S. Donato). Aprile-Settembre (800^m).

CONVOLVULACEAE

890. *Convolvulus Cantabrica* L. — Ad Arpino, Sora, Vicalvi e Monte Cajro. Maggio (700^m).
891. *C. arvensis* L. — In tutta la regione bassa e media. Maggio.
892. *C. sepium* L. — Alle Faete, ai Tre Panichi (Arpino), al Monte Tartaro, a Fontechiari ed a Cassino. Maggio (1127^m).
893. *C. sylvaticus* W. K. — Alla via d'Arce ed alla via d'Isola (Arpino) (450^m).

CUSCUTEAE

894. *Cuscuta Epithymum* Murr. — Sul *Thymus montanus* ed altre labiate lungo la salita del Monte Pizzodetta ed alla valle di Canneto sul *Gallium lucidum* All. Luglio-Agosto (1300^m).
895. *C. europaea* L. — Parassita dell'Urtica a Picinisco. Agosto (700^m). N. Terr.
896. *C. planiflora* Ten. — Nella valle della Melfa. Agosto (1200^m). N. Terr.
897. *C. Epilinum* Weihe. — Nell'isola galleggiante. Al lago della Posta (280^m). N. Terr.

BORAGINACEAE

898. *Echium italicum* L. — Lungo la via di Santo Padre (Arpino). Giugno (700^m).
899. *E. vulgare* L. — In tutta la regione. Maggio-Giugno.
900. *E. plantagineum* L. — Al Monte Tartaro, Santo Padre, al Monte Nero ed a Vado Cavallo. Giugno-Luglio (1400^m).
901. *Lithospermum purpureo-coeruleum* L. — Alla via d'Arce ed alla via d'Isola (Arpino), a Sora, Vicalvi, Alvito e S. Donato. Maggio (800^m).
902. *L. officinale* L. — Presso il lago della Posta. Maggio (380^m).
903. *L. apulum* Vahl. — Al Monte S. Marcello (S. Donato). Luglio (1600^m). N. Terr.
904. *L. arvense* L. — Ne' campi. A Valle fredda, ne' colli aridi, alle Faete ed a Monte Ricco (Arpino). Marzo-Maggio (700^m).

905. *Pulmonaria officinalis* L. — Al Monte S. Marcello (S. Donato). Maggio-Giugno (1650m).

906. *Myosotis palustris* With. — Lungo le sponde del Fibreno ed al torrente Revieto (Arpino). Maggio (400m).

907. *M. sylvatica* Hoffm. — Alla via d'Arce ed al Monte Santangelo (Sora). Maggio (700m).

908. *M. alpestris* Schmdt. — Nella regione delle Faete sino alla Madonna delle osse (Santo Padre) ed alla Frojetta. Maggio (700m).

909. *M. intermedia* Lk. — Nelle stesse località.

910. *M. hispida* Schlecht. — In tutta la regione bassa e media. Maggio.

911. *M. pyrenaica* Pourr. var. *sylvatica*. — In tutto il gruppo degli Appennini, degli Ernici e di Monte Cajro. Aprile-Luglio (1800m).

912. *Borago officinalis* L. — In tutta la regione bassa e media. Marzo Giugno.

913. *Anchusa italica* Retz. — Nella regione Arpinate, a valle Radice, Casalvieri e Monte Ricco. Maggio (700m)..

914. *A. Barrelieri* DC. — Nel versante N.Æ. del Monte Pizzodetta, al Monte Cajro ed a Pozzocorvaro (Pescosolido). Maggio-Luglio (1800m).

915. *Symphytum bulbosum* Schimp.—Al Vallone (Arpino) ed a Magnene (Carnello). (280m).

916. *S. tuberosum* L. — Nelle stesse località.

917. *Cynoglossum pictum* Ait. — In tutta la regione sino a 1000m. Maggio-Luglio.

918. *C. officinale* L. — Come il precedente ma più scarso.

919. *C. magellense* Ten. — Al Monte Pizzodetta (Balsorano). Luglio (1600m).

920. *C. apenninum* L. — Al Monte Amaro (Oppi) ed in aal di Canneto (Picinisco). Maggio-Luglio (1600m) N. Terr.

921. *C. Columnae* Ten. — In val di Canneto (Picinisco). N. Terr.

922. *Echinospermum Lappula* Lehm. — Al Monte S. Marcello (S. Donato). Maggio-Luglio. N. Terr.

923. *Heliotropium europaeum* L. — Nella bassa pianura del Liri. Luglio-Agosto.

SOLANACEAE

924. *Solanum Dulcamara* L. — Alla riva sinistra del Fibreno, a valle Radice (Sora). al Vallone (Arpino) ed alla valle della Melfa. Giugno-Ottobre (300m).

925. *S. nigrum* L. — In tutta la regione bassa e media. Aprile-Ottobre.

926. *S. moschatum* Presl. — Presso Rocca d'Arce. Luglio (556m). N. Terr.

927. *S. tuberosum* L. — Coltivato in tutta la regione sino a 1200m.

928. *S. Lycopersicum* L. — Coltivato nella regione bassa e media.

929. *S. Melongena* L. — » » » »

930. *Atropa Belladonna* L. — Nella valle di Canneto (Picinisco) ed al Monte Cajro. Maggio-Luglio (1500m). N. Terr.

931. *Hyoscyamus niger* L. — A Vicalvi e ad Isola superiore. Maggio-Luglio (400m).

932. *Stramonium foetidum* Scop. — Nella regione bassa. Luglio-Ottobre..

SCROPHULARIACEAE

933. *Pedicularis comosa* L. — Presso la cima del Monte Pizzodetta. (1900^m).

934. *P. giroflexa* Vill. — Al Zaffineto (Oppi), ed al Monte Meta (Picinisco). Luglio-Settembre. N. Terr.

935. *Alectorolophus maior* Rochb. — Ad Arpino, su' colli di Laurita, all'Anitrella, alla Selva delle Cornacchie (Casalatico) ed a' Tre confini (1600^m). N. Terr.

936. *Odontites lutea* Stev. — A Santo Padre, al Monte Cajro ed a Picinisco presso la cartiera di Visocchi. Agosto-Ottobre (800^m). N. Terr.

937. *O. serotina* Reich. — Alle vigne piane (Arpino), a Santo Padre al Monte Cajro. Agosto-Ottobre (800^m).

938. *Parentucellia* (Bartsia) *viscosa* Parl. — Sulle rive del lago della Posta. Maggio-Giugno.

939. *Melampyrum arvense* L. — Al Monte Cajro. Maggio-Giugno (1300^m).

940. *Euphrasia officinalis* L. — Al Monte Tartaro ed al Monte Cajro. Maggio-Luglio (1300^m).

941. *E. pectinata* Ten. — Nella valle di Canneto. Luglio-Agosto (1200^m). N. Terr.

942. *E. minina* Schlch. — Nelle radure del bosco di Santa Croce (Arpino). Luglio (600^m).

943. *E. salisburgensis* Funk. — A Vicalvi ed a Monte Cajro. Maggio-Luglio. N. Terr.

944. *E. micrantha*—Alla Piana de' Monaci (Monte Meta). Luglio (1600^m). N. Terr.

945. *Digitalis lutea* L. — Alle Faete, Isola, Sora e Monte Tartaro. Giugno-Luglio.

946. *D. ferruginea* L. — Nella via tra Picinisco ed Atina. Giugno-Luglio (500^m). N. Terr.

947. *Veronica prostrata* — Al Monte Cajro. Maggio. N. Terr.

948. *V. Beccabunga* L. — Ne' fossi di tutta la regione. Maggio.

949. *V. Anagallis* L. — Al Revieto, a via d'Arce (Arpino), ad Isola ed a Sora. Aprile-Maggio (400^m).

950. *V. Chamaedrys* L. — Al Vallone, alla via d'Arce (Arpino). Noi, ed ai Tre con fini. Maggio-Luglio (1500^m). N. Terr.

951. *V. officinalis* L. — Nelle radure del bosco di Santa Croce (Arpino), e nei ripiani ombrosi, a S. Donato ed al Monte Cajro. Maggio-Giugno (700^m).

952. *V. montana* L. — Ai Tre confini (Picinisco). Maggio-Luglio (1500^m).

953. *V. aphylla* L. — Al Zaffineto ed a Settefratti. Agosto-Settembre (1800^m). N. Terr.

954. *V. repens* Clar. — A Settefratti. Luglio (784^m). N. Terr.

955. *V. fruticulosa* L. var. *saxatilis* Jacq. — Al Monte Meta. Agosto-Settembre (2000^m). N. Terr.

956. *V. serpyllifolia* L. — Al Vallone ed alle Faete (Arpino), a Campoli (Appennino) ed al Monte Cajro. Maggio (700^m).

957. *V. alpina* L. — Al Zaffineto ed a' Tre confini (Picinisco). Luglio-Agosto (1800^m). N. Terr.

958. *V. arvensis* L. — Ne' campi. Maggio.

959. *V. praecox* All. — A Forca d'Acero. Aprile (1600m).

960. *V. Tournefortii* Gm. — Al Vallone (Arpino). Aprile (260m).

961. *V. agrestis* L.—Alla base del Monte S. Marcello (S. Donato). Maggio (1200m).

962. *V. didyma* Ten. — In tutta la regione bassa e media.

963. *V. hederaefolia* L. — Ad Arpino. Febbraio-Marzo.

964. *Scrophularia vernalis* L. —Nella regione controversa ed a Forca d'Acero (San Donato), alle Jannule (regione Fontanelle), al Monte Pizzodetta presso la cima, ed alla valle di Canneto. Maggio-Luglio (1900m).

965. *S. peregrina* L. — Ad Arpino, Isola e Sora. Maggio-Luglio (500m).

966. *S. aquatica* L. — Nella valle del Liri (Isola-Sora). Maggio-Giugno (180m).

967. *S. canina* L. — A Civitavecchia (Arpino), a Monte Tartaro e nella valle di Sora e d'Isola. Maggio-Luglio (1127m).

968. *S. Scopolii* Hopp. — Alle Jannule (regione Cisterna) ed al Monte Meta. Giugno-Agosto (1600m).

969. *S. Hoppi* Koch. — A Forca d'Acero presso la rotabile di S. Donato (Pescaseroli). Noi, ed alle Pietre Roscelle. Giugno-Agosto (1850m). N. Terr.

970. *S. grandidentata* Ten.—Alla Lungagna presso le Tre rave (S. Donato). Giugno (1400m).

971. *Verbascum Thapsus* L. — A Santo Padre. Giugno-Luglio (700m).

972. *V. montanum* Schrad. — Presso la Brecciosa (Pescosolido) (1700m).

973. *V. thapsiforme* Schrad.—Nella regione Cisterna (Casalatico). Giugno (1300m).

974. *V. macrurum* Ten. — A S. Donato ed al Monte Cajro. Luglio (800m).

975. *V. phlomoides* L. — Presso la cima del Monte Pizzodetta (Balsorano). Luglio (1900m).

976. *V. longifolium* Ten. — Al Monte Pizzodetta, presso la cima. Noi, alla Piana dei Monaci (Monte Meta), al passeggio dell'Orso (Picinisco) ed alla Lungagna (S. Donato). Luglio-Agosto (1900m). N. Terr.

977. *V. Blattaria* L. — Alla strada d'Arce ed a valle Radice (Sora). Giugno-Luglio (400m).

978. *V. pulverulentum* Wil. — Presso il borgo di Vicalvi ed alla via di Forca d'Acero sotto il Monte S. Marcello. Giugno-Luglio (1000m).

979. *V. Lychnitis* L. — Al Monte Tartaro, a valle Radice (Sora) ed al lago della Posta. Maggio-Luglio (1200m).

980. *V. sinuatum* L. — Nella regione bassa e media.

981. *Linaria Cymbalaria* L. — Nella regione bassa e media. Aprile-Settembre.

982. *L. pallida* Ten. —Al Monte Pizzodetta, al Monte Ricco (versante della Melfa). Noi, a' Tre confini ed al Zaffineto. Maggio (1900m). N. Terr.

983. *L. pilosa* DC. — Al Monte Cajro. Maggio. N. Terr.

984. *L. spuria* Mill. — Nella regione Arpinate. Giugno-Ottobre.

985. *L. vulgaris* Mill. — Nell'aja della comune ed alla valle della Melfa. Maggio-Giugno (600m).

986. *L. Pelisseriana* DC. — A Sora ed a Colle S. Magno. Maggio-Giugno (560m).

987. *L. purpurea* Mill. —Nella regione media. Luglio-Ottobre.

var. *albiflora* N. Terr. — Ad Atina. Luglio. N. Terr.

988. *L. chalepensis* Mill. — A Colle S. Magno. Maggio-Giugno. N. Terr.

989. *L. striata* DC. — Alla via d'Isola presso i Tre panichi (Arpino) (400^m).

990. *L. minor* Desf. — A Forca d'Acero e presso il sentiero che conduce da Valle Latina a Picinisco. Maggio-Settembre (1600^m).

991. *Antirrhinum Orontium* L. — Nella regione bassa e media.

992. *A. majus* L. — Presso S. Michele (Arpino). Maggio (500^m).

993. *A. tortuosum* Bosc. — Al Monte Cajro. Maggio (600^m). N. Terr.

OROBANCHACEAE

994. *Orobanche speciosa* DC. — Parassita ne' campi di fave. Maggio.

995. *O. Epithymum* DC. — Nel bosco dei Cappuccini, presso Arpino, Noi, a val Copella ed al Monte Cajro. Maggio-Luglio (1700^m). N. Terr.

996. *O. minor* Sutt. — Nel bosco de' Cappuccini, Noi, e a val Copella. Maggio-Luglio (1700^m). N. Terr.

997. *O. major* L. — Alla Pietrosa ed al Monte Meta (Picinisco). Luglio (1700^m). N. Terr.

LAMIACEAE

998. *Ocymum Basilicum* L. — Coltivata in tutta la regione.

999. *Lavandula officinalis* L. — A Santo Padre ed a valle Radice. Luglio-Ottobre (700^m).

1000. *Mentha sylvestris* L. — A Santo Padre ed a valle Radice. Luglio-Ottobre (700^m).

var. *eriostachya* — A Picinisco (700^m). N. Terr.

1001. *M. serotina* L. — A Santo Padre, Vicalvi, via d'Arce (Arpino). Ottobre (700^m).

1002. *M. Pulegium* L. — In tutta la regione bassa e media. Maggio.

1003. *M. aquatica* L. — Presso il Fibreno. Maggio.

1004. *M. pyramidalis* Ten. — Presso il lago della Posta al Ponte Tapino. Maggio.

1005. *Origanum vulgare* L. — In tutta la regione sino a 1300^m. Luglio-Settembre.

1006. *O. virens* Link. — Nelle siepi. Presso Picinisco. Agosto (700^m). N. Terr.

1007. *O. Majorana* L. — Coltivata nella regione bassa e media.

1008. *Thymus Serpyllum* L. — In tutta la regione media. Maggio-Luglio.

var. *glabratus* H. et L. — Al Monte Pizzodetta sino all'Orto del Centurione. Luglio (2000^m).

var. *montanus* W. et K. — Al Monte Nero ed al Monte Coccio (Arpino). Maggio-Luglio (800^m).

1009. *Satureja montana* L. — Al Monte Tartaro e Vado Cavallo (Ernici) ed a Montatico (sopra Casalatico). Maggio-Luglio (1300^m).

1010. *S. graeca* L. — In quasi tutta la regione sino a 1300^m. Maggio-Settembre.

var. *tenuifolia* Rchb. — Al Monte Cajro. N. Terr.

1011. *Calamintha Clinopodium* Benth. — Nella regione bassa e media. Maggio-Ottobre.

1012. *C. parviflora* Lamck. — Alla via d'Arce, a Fontechiari, a Picinisco ed in tutta la regione media. Maggio-Ottobre (800^m).

1013. *C. officinalis* Moench. — Nelle siepi, alla via d'Arce, a Fontechiari, alle Faete ed a Picinisco. Giugno-Ottobre (800^m).

var. *Nepeta* Link. — Alla via d'Arce, alle Faete, a Fontechiari ed alla Selva di Sora. Giugno-Ottobre (800^m).

1014. *C. Acinos* Clairv. — In tutta la regione media. Maggio-Settembre.

1015. *C. alpina* Lam. — Lungo l'ultima rampa del Monte Pizzodeltta dai 1600 ai 1800^m.

1016. *Melissa officinalis* L. — Alla via d'Arce, a Carnello, Vicalvi, Santo Padre e Picinisco. Luglio-Settembre (700^m).

1017. *Salvia officinalis* L. — In tutta la regione media. Maggio (rinselvatichita?).

1018. *S. Sclarea* L. — Comune negli orli delle vie, nei ciglioni ecc. di tutta la regione media. Luglio.

1019. *S. pratensis* L. — Nella regione bassa e media. Maggio.

1020. *S. glutinosa* L. — Nella regione media. Maggio.

1021. *S. Verbenaca* L. — Nella regione bassa e media. Aprile-Ottobre.

var. *horminoides* Pourr. (*S. multifida* Sibth. et Sm.)—Presso Campoli (Appennino). Maggio.

1022. *Rosmarinus officinalis* L. — Nella regione bassa e media (coltivato). Marzo-Ottobre.

1023. *Nepeta Cataria* L.—Nella regione media ed in val di Canneto. Luglio-Agosto.

1024. *N. Glechoma* Benth.—Al Vallone, a' Morroni ed alle Faete (Arpino). Marzo-Maggio.

1025. *Scutellaria Columnae* All. — Ai Tre panichi (Arpino), a Fontechiari ed al Monte Tartaro (Ernici). Maggio-Luglio (1127^m).

1026. *S. altissima* L. — Alla selva di Sora. Maggio-Luglio (700^m).

1027. *S. alpina* L. — Al Monte Pizzodetta (Orto del Centurione). Luglio (2041^m).

1028. *Brunella vulgaris* L. — In tutta la regione media ed al Monte Tartaro. Maggio-Luglio (1127^m).

1029. *Melittis Melissophyllum* L. — In tutta la regione sino al livello di 2041^m. (Monte Pizzodetta, Orto del Centurione). Maggio-Luglio.

1030. *Sideritis romana* L. — Tra Fontechiari ed il lago della Posta, ed alle Faete (Arpino). Maggio (700^m).

1031. *Marrubium vulgare* L. — In tutta la regione bassa e media. Maggio.

1032. *Betonica officinalis* L. — Alla Selva d'Isola Liri, al Monte Tartaro ed al Monte Cajro. Maggio-Luglio (1200^m).

1033. *B. Alopecuros* L. — Al Monte Pizzodetta presso la cima, Noi, al passeggio dell'Orso ed al Monte Meta (Picinisco). Giugno-Settembre (2000^m). N. Terr.

1034. *B. hirsuta* L. — Al Monte Meta presso la cima. Luglio-Settembre (2000^m). N. Terr.

1035. *Stachys annua* L. — Nella regione media, e nel Monte Tartaro (Ernici). Giugno-Ottobre (1127^m).

1036. *S. italica* Mill. — A valle Radice (Sora), alla val di Comino e ad Arpino. Giugno Luglio.

1037. *S. germanica* L. — Nella regione media: Faete, Roccasecca, Civitavecchia (Arpino). Maggio-Settembre (800^m).

1038. *S. alpina* L. — Nell'ultimo tratto del Monte Pizzodetta (1800-2000^m) ed al passeggio dell'Orso (Picinisco). Luglio-Settembre (2000^m).

1039. *S. sylvatica* L. — Tra le selve, ai Tre confini (Picinisco) (1700^m). N. Terr.

1040. *S. palustris* — A Sora. Maggio.

1041. *S. hirta* L. — A Vicalvi ed a Casalatico. Maggio-Giugno (500-700^m).

1042. *S. recta* L. — Al Monte Cajro ed a Settefratti. Luglio (1000^m).

1043. *Galeopsis Ladanum* L. — Nella regione bassa e media. Luglio-Agosto.

1044. *G. Tetrahit* L. — Al Fravoleto (Picinisco). Luglio (1800^m). N. Terr.

1045. *Lamium amplexicaule* L.—In tutta la regione bassa e media. Aprile-Maggio.

1046. *L. purpureum* L.—Alla via d'Arce ed ai colli di Laurita. Aprile-Maggio (350^m).

1047. *L. album.* L. —Alla via d'Arce e presso Magnene (Carnello). Maggio-Giugno (500^m).

1048. *L. maculatum* L. —Nella regione media. Marzo-Giugno (800^m).

1049. *L. garganicum* L. — Al Monte Pizzodetta, sin presso la cima, al Monte Ricco (Arpino), ne' versanti aridi e scoscesi della Melfa ed alle Jannule (regione Cisterna). Maggio-Luglio (1800^m).

1050. *L. longiflorum.* Ten. — Al Monte Cajro. N. Terr.

1051. *L. flexuosum* Ten. — Presso Sora. Maggio Giugno.

1052. *L. tomentosum* W. — Al Monte S. Marcello, alla Lungagna (S. Donato) ed a Casalatico. Maggio-Giugno (1300^m).

1053. *Ballota nigra* L. — Nella regione media. Maggio-Ottobre.

1054. *Teucrium Chamaedrys.* L. — Alla via d'Isola ed al Monte Tartaro (Sora). Giugno-Agosto (1200^m).

1055. *T. Scorodonia* L. b. *crenatifolium* Guss. — Al Monte Pizzodetta. Luglio (1000^m).

1056. *T. Polium* L. — Tra le Faete e Fontechiari, a Vicalvi ed al Monte Cajro. Giugno-Luglio (700^m).

1057. *T. montanum* L. — Al Monte Tartaro, alla grotta del Monte Pizzodetta (Balsorano), Noi, al Zaffineto ed a' Tre confini. Luglio-Agosto (1900^m). N. Terr.

1058. *T. flavum* L. — Nell'orlo de' boschi. Alle Faete presso Casalvieri. Giugno (500^m).

1059. *Ajuga reptans* L. — Nella regione bassa e media. Aprile-Maggio.

1060. *A. pyramidalis* L. — Alla valle di Carnello, presso Magnene. Maggio.

1061. *A. Chamaepitys* Schreb. — Alle Vigne piane ed all'Anitrella. Maggio-Ottobre (400^m).

1062. *A. acaulis* Brocch. — Nella catena appenninica da Balsorano a Settefratti Maggio-Giugno (1600^m).

ACANTHACEAE

1063. *Acanthus mollis.* L. — Nella regione Arpinate e ad Isola Liri. Maggio-Giugno.
var. *spinulosus* Host. — Nelle stesse località.

GLOBULARIACEAE

1064. *Globularia vulgaris* L. — All'Anitrella, al Monte Nero e al Fosso Sarzana (Arpino, sulle colline di Laurita (Brocco), alla valle Radice ed a Campoli. Maggio (800^m).

1065. *G. cordifolia* L. — Al Monte Pizzodetta (Balsorano), alla regione Prato al Campo di Grano (Pescosolido) ed a Picinisco. Maggio (1800^m).

VERBENACEAE

1066. *Verbena officinalis* L. — Nella regione bassa e media. Marzo-Ottobre.

PLANTAGINACEAE

1067. *Plantago major* L. — All'Anitrella ed alle Faete (Arpino). Giugno-Ottobre (700^m).

1068. *P. media* L. — Alla via di Forca d'Acero (S. Donato). (1000^m). Maggio.

1069. *P. lanceolata* L. — Al lago della Posta, a Vicalvi, Arpino e Sora. Aprile-Ottobre (500^m).

var. *altissima* L. — Al boschetto di San Germano, dentro Arpino. Maggio.

1070. *P. Cynops* L. — Al Monte Tartaro, a Vicalvi, Alvito, Sora, Campoli, Arpino. Aprile-Luglio (1127^m).

1071. *P. montana* Lam. — A Pescosolido (sotto la Brecciosa), alle Pietre Roscelle (Settefratti) ed al Monte Meta (Picinisco). Luglio-Settembre (1800^m).

1072. *P. subulata* L. — Al piano de' Monaci (Monte Meta) ed al Campo di Grano (Pescosolido). Maggio-Luglio (1800^m). N. Terr.

1073. *P. argentea* Chaix. — Al Monte Cajro. Giugno (1600^m). N. Terr.

CAMPANULACEAE

1074. *Phyteuma orbiculare* L. — Al Monte Pizzodetta, Noi, al Zaffineto, alle Pietre Roscelle ed al Monte Meta. Luglio-Agosto (2000^m). N. Terr.

1075. *P. Michelii* All. — Ai Tre confini (Picinisco). Luglio-Agosto (1700^m). N. Terr.

1076. *Campanula persicifolia* L. — A Monte Tartaro e Vado Cavallo, alla parte N.E. del Monte Pizzodetta ed alla valle di Canneto. Luglio (1500^m).

1077. *C. Rapunculus* L. — All'Anitrella (Arpino), al Monte Tartaro, alle Faete ed alle Jannule. Maggio-Giugno (1200^m).

1078. *C. fragilis* Cyr. — A Rocca d'Arce. Giugno (556^m).

1079. *C. pusilla* Heanke, *C. caespitosa* Scop. — Al Monte Meta. Agosto-Settembre (1900^m). N. Terr.

1080. *C. rotundifolia* L. — Nella valle di Canneto. Agosto (1300^m). N. Terr.

1081. *C. Scheuchzerii* Lois. b. *linifolia* Lam. — Sopra la grotta del Monte Pizzodetta (Balsorano). Luglio (2000^m).

1082. *C. Erinus* L. — All'Anitrella, alle Faete e sui colli brecciosi tra Arpino ed il fiume Liri. Maggio-Giugno (700^m).

1083. *C. Trachelium* L. — Alla via d'Arce (Arpino), in tutti i Monti Ernici, nel gruppo del Cajro e nell'Appennino. Maggio-Ottobre (1000^m).

1084. *C. latifolia* L. — Al Monte Pizzodetta (versante N.E.). Luglio (1800^m).

1085. *C. glomerata* L. — A Monte Tartaro e Vado Cavallo, ed al Monte S. Angelo sopra Sora. Giugno-Luglio (1300^m).

var. *aggregata* W. A. — Nelle Faggete al lato N.E. del Monte Pizzodetta. Luglio (1650^m).

1086. *C. foliosa* R. et Sch. — Al Monte Pizzodetta. Luglio (1650ᵐ).

1087. *Wahlenbergia graminifolia* DC. — Ne' ripiani calcarei. Presso la cima del Monte Pizzodetta. Luglio (2000ᵐ).

1088. *Specularia Speculum* DC. — Diffusa ne' seminati. Maggio-Luglio.

CUCURBITACEAE

1089. *Bryonia dioica* Jacq. — Alla via d'Isola (Arpino), a Sora ed a Vicalvi. Giugno-Luglio.

1090. *Ecballion Elaterium* Rich. — A Rocca d'Arce ed a Roccasecca. Maggio-Giugno (650ᵐ).

RUBIACEAE

1091. *Rubia peregrina* L. — Nella regione media. Maggio.

1092. *Galium verum* Scop. — A Fontana Liri, Carnello, Isola, Sora ed Arpino. Maggio-Giugno (700ᵐ).

1093. *G. cruciata* Scop. — All'Anitrella, al Vallone (Arpino) ed a Fontana Liri. Aprile (260ᵐ).

1094. *G. Mollugo* L. — A Vicalvi, all'Anitrella ed al Vallone (Arpino), a valle Radice (Sora), ed al Monte Cajro. Maggio-Giugno (600ᵐ).

var. *erectum* Huds. — Ai Tre confini (Picinisco). Luglio (1600ᵐ). N. Terr.

1095. *G. lucidum* All. — Alla base degli Ernici, in valle Radice ed a Roccasecca. Luglio (350ᵐ).

1096. *G. palustre* L. — Nell'orlo de' fossi. Al lago della Posta (300ᵐ). Maggio.

1097. *G. sylvestre* Poll. — Alla valle Radice ed agli Ernici. Giugno.

1098. *G. helveticum* Weig. (*G. magellense* Ten.) — Alla brecciosa (Pescosolido), alla Lungagna, Monte Panico e Monte San Marcello (S. Donato), a Pizzodetta, Val di Canneto, Zaffineto (Picinisco) ed alle Pietre Roscelle. Luglio-Settembre (1800ᵐ).

1099. *G. purpureum* L. — Al Monte Tartaro, Vado Cavallo, Pizzodetta e Monte S. Angelo. Luglio (1600ᵐ).

1100. *G. verum* L. — Tra Sora e Vicalvi, a valle Radice ed a Roccasecca. Giugno (300ᵐ).

1101. *G. Aparine* L. — Comune sino a 1000ᵐ. Aprile-Settembre.

1102. *G. parisiense* L. — Al Monte Cajro. N. Terr.

1103. *G. murale* All. — Presso Arpino. Maggio.

1104. *Sherardia arvensis* L. — Nella regione bassa e media. Maggio-Giugno.

1105. *Asperula arvensis* L. — A via d'Arce, alle Faete, a Roccasecca ed al Monte Cajro. Maggio-Giugno (700ᵐ).

1106. *A. laevigata* L. — Al Colle di Civitavecchia (Arpino) ed alla selva Nicchiuta (Jannule). Maggio-Giugno (1200ᵐ).

1107. *A. aristata* L. — Alla via d'Arce ed al Monte Tartaro. Maggio-Giugno (1200ᵐ).

1108. *A. cynanchica* L. — Alle Faete (Arpino) ed alla valle della Melfa. Giugno.

var. *neglecta* Guss. — Allo Zaffineto (Picinisco Opi). Agosto (1800ᵐ). N. Terr.

1109. *A. odorata* L. — Ai Tre confini ed al Monte Cajro. Maggio-Luglio.

1110. *Crucianella angustifolia* L. — A Colle S. Magno. Giugno (561ᵐ). N. Terr.

CAPRIFOLIACEAE

1111. *Sambucus Ebulus* L. — Al Vallone (Arpino) ed in quasi tutta la regione media. Maggio-Giugno.

1112. *S. nigra* L. — Nella regione bassa e media. Maggio.

1113. *Viburnum Tinus* L. — Ai Tre panichi (Arpino) e nei colli calcarei della regione Grotte presso Rio Ermuci (Fontana Liri). Maggio.

1114. *V. Opulus* L. — Presso il lago della Posta. Maggio.

1115. *V. Lantana* L. — Presso la grotta del Vaccaro (Picinisco). Luglio (1500^{m}). N. Terr.

1116. *Lonicera Caprifolium* L. — Alle Faete (Arpino) e presso Balsorano.

1117. *L. etrusca* Savi. — Alla base de' Monti Ernici ed al bosco Santa Croce (Arpino). Giugno-Luglio.

1118 *L. Xylosteum* L. — Nella valle di Canneto. Maggio-Giugno (1300^{m}). N. Terr.

1119. *L. alpigena* L.—Nei boschi. Alla valle di Canneto (Picinisco). Giugno-Luglio.

VALERIANACEAE

1120. *Valeriana officinalis* L. — Negli argini del Fibreno e del Liri, e nei fossi presso la via rotabile, a Sora, a Pescosolido ed alla valle Radice. Maggio-Giugno.

1121. *V. montana* (*rotundifolia*) L. — Al Monte Pizzodetta, Noi, alla Meta ed al Monte Cajro. Luglio-Agosto (1800^{m}). N. Terr.

1122. *V. tripteris* L. — Alla valle di Canneto ed al passeggio dell'Orso. Luglio (1650^{m}). N. Terr.

1123. *Centranthus ruber* DC. — In tutta la regione media. Maggio-Ottobre.
var. *albiflorus* (*nobis*). — Alla *Parata* (Arpino). Maggio (500^{m}).

1124. *Valerianella Auricula* DC. — Nella regione bassa e media. Aprile-Giugno.

1125. *V. echinata* DC. — Nelle stesse località.

1126. *V. coronata* DC. — Come la precedente, ma meno diffusa.

1127. *V. olitoria* Pollich. — Nei luoghi alti. A Forca d'Acero e altrove. Maggio-Giugno (1600^{m}).

1128. *V. pumila* DC. — Ad Arpino e ad Alvito. Aprile-Giugno (700^{m}).

1129. *V. mixta* DC. (*microcarpa* Lois). — Al Monte Cajro. Maggio-Giugno. N. Terr.

DIPSACEAE

1130. *Dipsacus sylvestris* Mill. — Nella regione bassa e media. Giugno-Luglio.

1131. *D. fullonum* L. — Coltivato ad Isola ed a Sora. Luglio-Agosto.

1132. *Scabiosa integrifolia* L. — Nella strada d'Isola, a Sora ed a Vicalvi. Giugno-Luglio (500^{m}).

1133. *S. arvensis* L. — Al Monte Tartaro, alle Faete ed al Monte Cajro. Giugno-Luglio (1300^{m}).

1134. *S. Columbaria* L. — Al Monte Tartaro, Isola, Balsorano, valle Radice e S. Donato. Giugno-Ottobre (1300^{m}).

1135. *S. pyrenaica* All. — Nei monti Ernici ed al Monte Cajro (1500^m). Maggio-Luglio.

1136. *S. grandiflora* Scop. — A Roccasecca ed a Colle S. Magno. Maggio-Agosto.

1137. *Cephalaria leucantha* Schrad. — Al Colle di Civitavecchia (Arpino), alle Faete ed al Monte Cajro. Luglio-Settembre (700^m).

1138. *C. transylvanica* Schrad. — A Sora ed a Roccasecca. Luglio-Settembre.

ASTERACEAE

1139. *Eupatorium cannabinum* L. — Nei luoghi umidi. Alla via d'Arce (Arpino). Ottobre (500^m).

1140. *Adenostyles viridis* Cass. — Nel versante N.E. del Monte Pizzodetta. Luglio (1900^m).

1141. *A. alpina* Bluff. — Ne' luoghi ombrosi. Ai Tre confini (Picinisco) ed alle Pietre Roscelle (Settefratti). Agosto (1850^m). N. Terr.

1142. *A. petasites* B. et F. — Ne' pascoli elevati. Al Monte Cajro (1600^m). N. Terr.

var. *hybrida* DC. — Nella valle di Canneto (Picinisco) ed a Pozzocorvaro (Pescosolido). Agosto-Settembre (1800^m). N. Terr.

1143. *Solidago Virga-aurea* — Ne' luoghi ombrosi alpestri. Alla valle di Canneto ed ai Tre confini (Picinisco). Agosto (1500^m). N. Terr.

1144. *Erigeron canadensis* L. — A valle Radice, alla via della Selva (Sora), ad Arpino, Isola e Fontana. Luglio-Ottobre (700^m).

1145. *E. linifolius* Wild. — Nella regione bassa e media. Luglio-Ottobre.

1146 *E. acris* L. — Alle Faete (Arpino) ed alla valle di Canneto. Luglio-Ottobre (1200^m).

1147. *E. alpinus* L. — A Forca d'Acero (S. Donato), Noi, ed alla Meta. Luglio (1800^m). N. Terr.

1148. *Bellis perennis* L. — In tutta la regione sino al livello de' prati montani. Gennaio-Giugno (1600^m).

1149. *B. hybrida* Ten. — Ad Arpino, Isola, Sora e Fontechiari. Maggio (700^m).

1150. *Bellidiastrum Michelii* Cass. — Alle Pietre Roscelle (Settefratti). Agosto (1850^m). N. Terr.

1151. *Filago germanica* L. — Al Monte Tartaro ed a Vicalvi. Luglio (1127^m).

1152. *Micropus erectus* L. — Al Monte Tartaro. Luglio (1127^m).

1153. *Gnaphalium rectum* Sm. (*G. sylvaticum* L.) — Nei prati e nei boschi al Monte Cajro. Luglio (1600^m). N. Terr.

1154. *G. supinum* L. — Alla vetta della Brecciosa (Pescosolido) ed al Monte Meta Luglio-Agosto (2000^m). N. Terr.

1155. *Helichrysum Stoechas* Gaertn. — Nella regione media. Giugno-Settembre

1156. *Inula squarrosa* L. — Al Monte Pizzodetta (versante N.E.) Luglio. (1600^m).

1157. *I. hirta* L. — Al Monte Tartaro e Vado Cavallo (Ernici) ed al Monte San Marcello (S. Donato). Luglio (1700^m).

1158. *I. montana* — Al Monte Tartaro, alle Faete (Arpino) ed al Monte Santangelo (Sora). Giugno-Luglio (1127^m).

1159. *I. Conyza* DC. — Lungo la via di Santo Padre e nella via d'Isola superiore, a Casalvieri ed a Vicalvi. Luglio-Ottobre (700^m).

1160. *I. viscosa* Ait-Kew. — Nella regione media. Luglio-Ottobre.

1161. *Pulicaria dysenterica* Gaertn. — Nella regione bassa e media. Luglio-Ottobre.

1162. *Pallenis spinosa* DC. — Alla via d'Isola, alle Faete, al Vallone (Arpino) ed a Vicalvi. Maggio-Agosto.

1163. *Xanhium spinosum* L. — Nella regione bassa e media. Maggio-Novembre.

1164. *X. strumarium* L. — Come il precedente.

1165· *Bidens tripartita* L. — A S. Donato, Alvito ed Atina. Giugno-Ottobre (800^m).

1166. *Helianthus annuus* — Coltivato. Luglio Ottobre.

1167. *H. tuberosus* L. — Coltivato. Luglio-Ottobre.

1168. *Achillea Millefolium* L. — Al Monte Tartaro, a Vado Cavallo ed a Picinisco. Maggio-Settembre (1300^m).

var. *lanata* Spr. — Alle Baghelle (Jannule) (rara). Giugno (1300^m).

1169. *A. ligustica* All. — Nella regione bassa e media. Giugno-Novembre.

1170. *A. punctata* Ten. (*A. ochroleuca* Ehrh.) — Ai Tre confini (Picinisco). Luglio-Agosto (1600^m). N. Terr.

1171. *Tenacetum vulgare* L. — A Colle S. Magno ed a Roccasecca. Luglio-Settembre.

1172. *Anthemis Cotula*. — Alle Grottelle (Arpino), alla riva sinistra del Fibreno ed a S. Domenico (Isola Liri). Maggio (350^m).

1173. *A. Cota* L. — Nella pianura di Sora, all'Anitrella ed alle Faete presso San Pietro (Casalvieri). Maggio-Giugno (350^m).

1174. *A. tinctoria* L. — Ad Arpino, Santo Padre, Monte Tartaro, Isola e Sora. Maggio Luglio (1127^m).

1175. *A. austriaca* Jacq. — Nei campi a Picinisco ed al Monte Cajro. Luglio (1127^m). N. Terr.

1176. *A. montana* L. — Nei pascoli elevati al Monte Pizzodetta ed al Monte Meta. Luglio-Settembre (2000^m).

1177. *A. arvensis* L. — Nella pianura d'Isola e di Sora.

1178. *Matricaria Chamomilla* L. — Nella regione media. Maggio-Giugno.

1189. *M. inodora* L. — Lungo la via d'Arce.

1180. *Chrysanthemum Myconis* L. — Nella pianura d'Isola. Maggio-Luglio.

1181. *C. segetum* L. — Presso il lago della Posta, a Casalvieri ed a Monte Ricco. Maggio-Luglio.

1182. *Leucanthemum vulgare* Lamck. — Nella regione sino al livello di 1127^m. (Monte Tartaro). Maggio-Luglio.

1183. *L. ceratophylloides* Nym. — Al Monte Meta ed alle Pietre Roscelle (Settefratti). Luglio-Settembre (1800^m).

1184. *Pyretrum Parthenium* Smith. — Al versante N.E. del Monte Pizzodetta. Luglio (1800^m).

1185. *P. Achilleae* D.C. — Sul Monte della Posta sopra il lago. Luglio (480^m). N. Terr.

1186. *P. alpinum* W. — Al Monte Meta. Luglio-Settembre (1800^m). N. Terr.

1187. *Artemisia vulgaris* L. — Alla base degli Ernici in valle Radice ed a Santo Padre. Luglio-Ottobre.

1188 *A. Absinthium* L. — Al Monte Pizzodetta. Luglio (800^m).

1189. *A. camphorata* L. — A Vicalvi ed a Campoli. Agosto (600m). N. Terr.

1190. *Tussilago Farfara* L. — Nella regione bassa e media. Aprile-Maggio.

1191. *Petasites officinalis* Moench. — Al fiume Liri presso Isola e Carnello; e nei corsi d'acqua della regione bassa e media. Aprile-Maggio.

1192. *Doronicum caucasicum* M. B. — Al Rio Palelle (Arpino-Fontana Liri). Maggio (400m) (rara).

1193. *D. Columnae* Ten. — A Campoli ed alla valle di Canneto (Picinisco). Maggio-Luglio (1300m). N. Terr.

1194. *D. Pardalianches* L. — Alle Pietre Roscelle (Settefratti). Luglio (1850m). N. Terr.

1195. *Senecio vulgaris* L. — In tutta la regione. Maggio-Ottobre.

1196. *S. leucanthemifolius* Poir.—Alle Jannule (Selva delle Cornacchie e Baghelle). Luglio (1300m).

1197. *S. nebrodensis* L.—Lungo il versante N.E. del Monte Pizzodetta (1650m). Noi, al Monte Cajro ed alle Pietre Roscelle. Luglio-Agosto (1850m). N. Terr.

1198. *S. Jacobaea* L. — Presso Santo Padre. Ottobre (700m).

1199. *S. erucifolius* L. *S. tenuifolius* Jacq. — Nelle siepi. A Vicalvi ed a S. Donato. Luglio (800m).

1200. *S. lanatus* Scop. — Al Monte Pizzodetta (rarissimo). Luglio (2000m).

1201. *S. cordatus* Koch. — Ne' pascoli elevati. Alla valle di Canneto (Picinisco). Luglio-Agosto (1400m).

1202. *Calendula arvensis* L. — Nella regione bassa e media. Marzo-Novembre.

1203. *Carlina vulgaris* L. — A Vicalvi. Luglio (600m).

1204. *C. corymbosa* L. — In tutta la regione. Giugno-Ottobre.

1205. *C. gummifera* Less. — Al Monte Pizzodetta. Luglio (2000m).

1206. *C. acanthifolia* All. — Al Monte Meta ed alla valle di Canneto (Picinisco). Luglio-Agosto (1800m). N. Terr.

1207. *C. acaulis* L. — Al Monte Panico e Forca d'Acero (S. Donato) ed al Monte Meta. Maggio-Settembre (1700m). N. Terr.

1208. *Arctium maius* Schk. — Al Monte Tartaro (Ernici). Luglio (1127m).

1209. *Carduus nutans* L. — In tutta la regione sino a 1200m. Maggio-Ottobre.

1210. *C. pycnocephalus* L. — Nella regione bassa e media.

1211. *C. carlinaefolius* Lamck. — Al Monte Pizzodetta ed al Monte Meta. Luglio-Agosto (1800m).

1212. *Cnicus strictus* Ten. — Alla via d'Isola, via d'Arce e Monte Tartaro. Luglio. (1127m).

1213. *C. eriophorus* W. — A Santo Padre, alla Lungagna (S. Donato) ed alla valle di Canneto. Luglio (1200m).

1214. *C. arvensis* Smit. — Ad Arpino, Isola, Sora, valle Radice e Monte Tartaro. Luglio (1200m).

1215. *C. lanceolatus* W. — In tutta la regione media. Luglio.

1216. *C. palustre* W. — A Carnello, Isola e Sora. Luglio.

1217. *Onopordon Acanthium* L. — Al Monte Tartaro (Sora). Luglio (1127m).

1218. *Cynara Scolymus* L. — Coltivata.

1219. *C. Cardunculus* L. — Coltivata.

1220. *Galactites tomentosa* Moench. — Nella regione bassa e media.

1221. *Crupina vulgaris* Cass. — Al Monte Tartaro, a Vado Cavallo, al Monte S. Angelo (Sora), alle Faete ed al Monte Ricco (Arpino). Maggio-Luglio (1400^m).

1222. *Centaurea alba* L. var. *deusta* Ten. — Al Moute Tartaro, Monte Santangelo, Faete, Vicalvi ed Alvito (1227^m).

var. *splendens* L. — Al Monte Tartaro (Sora). Luglio.

1223. *C. amara* L. — Alla via d'Arce (Arpino). Ottobre (400-500^m).

1224. *C. nigrescens* Willd. — Alla base degli Ernici in valle Radice, alla via d'Arce (Arpino) ed alle Faete. Luglio-Ottobre (700^m).

1225. *C. Cyanus* L. — Nella regione bassa e media. Maggio-Luglio.

1226. *C. montana* L. — Nelle rocce calcaree. Al Monte Tartaro ed al Monte S. Marcello (S. Donato). Luglio (1700^m).

1227. *C. solstitialis* L. — Nella regione bassa e media. Maggio-Ottobre.

1228. *C. Calcitrapa* L. — Come la precedente.

1229. *Carthamus lanatus* L. — A valle Radice. Luglio.

1230. *Scolymus hispanicus* L. — Nella regione bassa e media. Luglio.

1231. *Cichorium Intybus* L. — Nella regione sino all'altezza di 1500^m. Maggio-Ottobre.

1232. *Lapsana communis* L. — Alla selva di Sora, alle Faete, a S. Leonardo ed a Monte Santangelo (Sora). Maggio-Luglio.

1233. *Hedypnois polymorpha* DC. — Alla via d'Arce, Isola e Sora. Aprile-Maggio.

1234. *Rhagadiolus stellatus* Gaert. — Nella regione bassa e media. Maggio-Luglio.

1235. *Zacintha verrucosa* Gaert. — Al Monte Cajro. Maggio. (N. Terr.).

1236. *Picris hieracioides* L. — Nella regione bassa e media. Luglio-Ottobre.

1237. *P. grandiflora* Ten. — Al Zaffineto ed alle Pietre Roscelle (Settefratti). Agosto (1900^m). N. Terr.

1238. *Helminthia echioides* Gaert. — Alla via d'Arce. Ottobre.

1239. *Crepis lacera* Ten. — Al Monte Tartaro, al Monte Pizzodetta ed in tutto il versante appenninico. Luglio (1500^m).

1240. *C. virens* L. — A S. Donato. Giugno-Ottobre (700^m).

1241. *C. aurea* Cass. — Al Rio Palelle (Fontana), alla Meta ed a Settefratti. Maggio-Settembre.

1242. *C. pulchra* L. — Alla valle Latina presso la stazione di Roccasecca. Maggio-Luglio.

1243. *C. taraxacifolia* Thuil. — Alla via d'Arce (Arpino). Maggio-Giugno.

1244. *Hieracium Pilosella* L. — Ne' terreni calcarei aridi. Alle Faete ed al Monte Tartaro. Maggio-Luglio (1127^m).

var. *macranthum* Ten. — Al Monte Meta. Agosto N. Terr.

1245. *H. brachiatum* Bert. — Alle Faete (Arpino). Maggio (700^m).

1246. *H. Auricola* L. — A val Copella (1734^m). N. Terr.

1247. *H. praealtum* Vill. — A val di Canneto. Giugno. N. Terr.

1248. *H. sabinum* Seb. et Mauri. — Alle Pietre Roscelle (Settefratti). Agosto (1850^m). N. Terr.

1249. *H. amplexicaule* L. — Nel versante N.E. del Monte Pizzodetta, Noi, a val Copella. Agosto (1380^m). N. Terr.

1250. *H. villosum* L. — A val Copella (Picinisco). Agosto (1734^m). N. Terr.

1251. *H. glaucum* All. — Al Zaffineto. Agosto (1900m?). N. Terr.

1252. *H. murorum* L. — Alle Pietre Roscelle, a Val di Canneto ed a Pozzocorvaro (Pescosolido). Maggio-Luglio (1850m). N. Terr.

1253. *H. crinitum* Sbth. et Smith. — A Santo Padre. Ottobre (700m).

1254. *H. boreale* Fr. — Ad Atina. Agosto-Settembre (500m). N. Terr.

1255. *Hypochaeris pinnatifida* Cyr. — Alla valle di Canneto (Picinisco). Maggio-Giugno (1400m). N. Terr.

1256. *H. aetnensis* B. et H. — Nella regione media. Maggio.

1257. *Robertia taraxacoides* DC. — Al Monte Meta, ai Tre confini (Picinisco) ed alle Pietre Roscelle (Settefratti). Maggio-Agosto (1850m). N. Terr.

1258. *Leontodon fasciculatus* Nym. — Nella valle di Canneto. Giugno (1400m).

1259. *L. Villarsi* Lois. — Alle Pietre Roscelle (Settefratti) ed al Monte Amaro. (Oppi) (1800m).

1260. *Taraxacum vulgare* Lamck. — Ad Arpino, Carnello, Laurita (Brocco) ed a Santo Padre. Marzo-Ottobre.

1261. *T. apenninum* DC. — A Forca d'Acero, alla Brecciosa (Pescosolido), al Monte Meta ed alle Pietre Roscelle. Giugno-Luglio (1800m).

1262. *Chondrilla juncea* L. — Alla via d'Arce ed a Santo Padre. Ottobre (350-700m).

1263. *Lactuca viminea* Linck. (*Phoenopus*) — Al Colle (Arpino) e ad Atina. Luglio.

1264. *L. sativa* L. — Coltivata nella regione bassa e media.

1265. *L. Scariola* L. — Ne' campi. A Roccasecca. Luglio-Ottobre.

1266. *L. muralis* DC. — Al Colle ed alla via d'Arce (Arpino), a Roccaviva ed alla base del Monte Pizzodetta. Giugno-Luglio (600m).

1267. *Prenanthes purpurea* L. — Alla Costa Cavallara (Meta). Agosto (1600m). N. Terr.

1268. *Picridium vulgare* Desf. — Alla via d'Arce (Arpino), al lago della Posta ed al Monte Tartaro. Maggio.

1269. *Sonchus oleraceus* L. — Nella regione bassa e media. Maggio-Novembre.

1270. *S. asper* Vill. — Nella regione bassa e media. Maggio-Luglio.

1271. *S. arvensis* L. — A Santo Padre, al Vallone ed alla via d'Arce (Arpino). Maggio-Luglio.

1272. *S. tenerrimus* L. — Al Colle, alla via d'Arce ed alle Faete (Arpino). Maggio-Luglio.

1273. *Tragopogon porrifolium* L. — Nella selva di Sora. Luglio (600m).

1274. *T. nebrodense* Guss. — Alle Faete. Giugno (700m).

1275. *T. floccosum* W. — Al Monte Cajro (1600m?). N. Terr.

1276. *Urospermum Dalechampii* Desf. — Alla base del Monte Castello sopra il Revieto (Arpino). Maggio.

1277. *U. picroides* Desf. — Nella stessa località.

1278. *Podospermum laciniatum* DC. — Ad Arpino e Fontechiari. Aprile-Luglio (200-500m).

1279. *Andryala ragusina* — A Vicalvi. Luglio (590m).

1280. *Barkhausia setosa* DC. — Presso il lago della Posta. Maggio-Ottobre.

finita di stampare il dì 28 Gennaio 1899

Vol. IX, Serie 2.ª N.° 12.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

LE FIGURE RECIPROCHE E LA TRASFORMAZIONE QUADRATICA NELLA CINEMATICA

MEMORIA

del prof. ERNESTO CAVALLI

DELLA R. SCUOLA DI APPLICAZIONE IN NAPOLI

presentata nell'adunanza del dì 22 Ottobre 1898

§ 1.

Per investigare le leggi del movimento, W. R. Hamilton ha introdotto il metodo dei *diagrammi reciproci* *). Se non che, egli si limita a considerare il caso del moto secondo una conica, e più particolarmente il moto planetario.

A questo intento speciale è pure informato un manualetto di Maxwell **), dove il ch. A. impiega quei diagrammi nel risolvere per via elementare alcune questioni, ma non si occupa punto di farne conoscere la teoria.

V'è di più. I diagrammi reciproci non sempre convengono; spesse volte val meglio far uso di una *trasformazione geometrica* basata sopra una formola di Eulero ***), perchè più dirette e più chiare riescono molte deduzioni.

*) Rendiconti dell'*Acc. reale di Dublino* (marzo, 1847). Dello stesso A. veggasi anche le *letture sui quaternioni* (Dublino, 1853). I diagrammi di Hamilton hanno stretta analogia con *le figure reciproche nella statica grafica* studiate da Cremona (Milano, 1872). Leggasi pure la M. di Padelletti: *Studii sui diagrammi reciproci* (giorn. di Battaglini, Napoli, 1879).

**) Maxwell, *materia e moto*, traduzione italiana di Cantoni (Milano, 1881). Questo manuale è veramente pregevole per semplicità, chiarezza ed eleganza che s'accompagnano al piccolo corredo di cognizioni matematiche che presuppone. Esso è diretto a divulgare le più importanti dottrine della scienza, e merita la più grande diffusione fra la gioventù studiosa; come per profondità ed esattezza di concetti, meritano estesa diffusione le preziosissime *lezioni elementari di fisica matematica* (Corfù, 1841) del nostro Mossotti, delle quali si è saviamente pensato di fare una ristampa (Roma, 1884).

***) Un saggio di applicazione della trasformazione geometrica Euleriana, è offerto dall'ing. Allievi nella sua *cinematica della biella piana* (Napoli, 1895). Il lavoro molto lodevole del ch. ing., redatto colla guida della classica opera del Burmester (Monaco, 1886), non sembra esser stato abbastanza osservato quanto richiederebbe da tutti coloro che si occupano di meccanismi.

Compendiare le due teorie iniziate da **Hamilton** e da **Eulero**, svolgendole con unico procedimento, ed estenderne i risultati alla ricerca della genesi cinematica delle curve più notevoli: ecco lo scopo del mio lavoro. Le conclusioni che ne ho dedotto, che somministrano nuovi elementi per le indagini scientifiche, mi sono sembrate abbastanza importanti per darne parte a questa dotta Accademia.

§ 2.

Sia data una linea poligonale $\mathfrak{A}$ i cui n vertici cadano ordinatamente sopra altrettante rette (che denominerò $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}$), assegnate di posizione in modo che ciascuna riesca contenuta nel piano dei due lati di $\mathfrak{A}$ che le sono contigui; e per brevità di linguaggio indichiamo col simbolo $(\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{1})$ il lato della poligonale compreso tra le rette $\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{1}$.

Immaginiamo poi che un punto mobile M percorra i successivi $n+1$ lati di $\mathfrak{A}$ colle velocità rispettive $v_0, v_1, \ldots, v_n$, così determinate che la velocità v_r relativa al lato $(\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{1})$ risulti dalla composizione della velocità v_{r-1} relativa al lato $(\mathbf{r}-\mathbf{1}, \mathbf{r})$ con una velocità φ_r la cui direzione sia quella della retta $\mathbf{r}$. In altri termini, supponiamo che giunto con velocità uniforme v_{r-1} nel vertice r^{esimo} di $\mathfrak{A}$, il mobile M riceva lungo la retta $\mathbf{r}$ l'incremento di velocità φ_r di grandezza finita. Dalla riunione di v_{r-1} e φ_r, esso riescirà allora animato dall'unica velocità v_r, che potrà esser sostituita a quelle due. Ma affinchè il punto M venga deviato secondo il lato $(\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{1})$ della poligonale, occorre che questo lato coincide in direzione colla diagonale del parallelogrammo i cui lati adiacenti rappresentano in grandezza, direzione e senso le velocità v_{r-1}, φ_r.

Nota la velocità v_0 corrispondente al primo lato della poligonale, potremo individuare le velocità $v_1, v_2, \ldots, v_n$ corrispondenti agli altri successivi lati, e gli incrementi di velocità $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ secondo le linee date $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}$, costruendo un parallelogrammo delle velocità per ciascun vertice della poligonale medesima.

Per altro, presentasi assai più opportuno di procedere nel modo seguente. Si assegni nello spazio un punto qualunque $\mathcal{O}$, e per esso si conducano i raggi indefiniti paralleli ai lati della poligonale $\mathfrak{A}$; si denoti col simbolo $(r, r+1)$ il raggio parallelo al lato $(\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{1})$. Nel raggio $(0, 1)$ si prenda, a partire dal punto $\mathcal{O}$, un vettore che rappresenti in grandezza e senso la velocità v_0. Indi, scelto come punto origine l'estremo di questo vettore, si costruisca una seconda poligonale $\mathfrak{B}$ i cui lati (che chiamerò $1, 2, \ldots, n$) siano ordinatamente paralleli alle rette $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}$, ed i cui vertici cadano nei raggi uscenti dal punto $\mathcal{O}$; in modo che il vertice comune ai lati $r, r+1$ cada nel raggio $(r, r+1)$.

Il lato r della poligonale $\mathfrak{B}$ così costruita, valutato nell'ordine crescente dei numeri, riesce equipollente all'incremento di velocità φ_r impresso secondo la linea $\mathbf{r}$, come i vettori appartenenti ai raggi $(r-1, r)$, $(r, r+1)$ e limitati tra il punto $\mathcal{O}$ e la poligonale $\mathfrak{B}$ riescono equipollenti alla velocità v_{r-1} e v_r.

Veniamo così a realizzare due diagrammi perfettamente distinti: Il *diagramma del movimento* che contiene la poligonale $\mathfrak{A}$ e le linee di deviazione $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}$ delle velocità $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; e il *diagramma delle velocità* costituito dalla poligonale $\mathfrak{B}$ e dai raggi $1, 2, \ldots, n$ che ne projettano i vertici del punto fisso o polo $\mathcal{O}$.

§ 3.

Supponiamo che le linee **1** , **2** , ... , **n** soddisfino alla condizione di essere bisettrici degli angoli rispettivi della poligonale $\mathfrak{A}$; quest'ultima risulta allora percorsa dal punto mobile *M con velocità uniforme v.*

Indicando detti angoli con 2α, 2β, 2γ, ... abbiamo:

$$\frac{\varphi_1}{\cos\alpha}=\frac{\varphi_2}{\cos\beta}=\frac{\varphi_3}{\cos\gamma}=\ldots\ldots=2v\ ;$$

cioè, gli incrementi di velocità φ_1, φ_2, φ_3, ... divengono *proporzionali ai coseni delle metà di questi angoli.*

Se i lati contigui $(\mathbf{r}-\mathbf{1}\ ,\mathbf{r})$, $(\mathbf{r}\ ,\mathbf{r}+\mathbf{1})$ di $\mathfrak{A}$ sono eguali, il coseno della metà dell'angolo compreso misura il rapporto tra ciascun lato e il diametro del cerchio che passa per gli estremi dei lati stessi. Dunque, quando i lati della poligonale $\mathfrak{A}$ sono tutti eguali tra loro, le velocità φ_1, φ_2, ... , φ_n riescono *reciprocamente proporzionali ai raggi dei cerchi, ciascuno dei quali passa per tre vertici consecutivi di* $\mathfrak{A}$.

§ 4.

Le linee **1** , **2** , ... , **n** siano concorrenti in un medesimo punto *O*.

Le rette $(\mathbf{r}-\mathbf{1}\ ,\mathbf{r})$, $\mathbf{r}$, $(\mathbf{r}\ ,\mathbf{r}+\mathbf{1})$ sono in piano; così pure sono in piano le rette $(\mathbf{r}\ ,\mathbf{r}+\mathbf{1})$, $\mathbf{r}+\mathbf{1}$, $(\mathbf{r}+\mathbf{1}\ ,\mathbf{r}+\mathbf{1})$. Ma, in via d'ipotesi, le linee $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}+\mathbf{1}$ concorrono nel punto *O*; quindi, quei due piani hanno in comune la retta $(\mathbf{r}\ ,\mathbf{r}+\mathbf{1})$ e il punto *O* posto fuori di essa, e per ciò coincidono nella loro estensione.

Il piano individuato dal primo e secondo lato della poligonale $\mathfrak{A}$ coincide, dunque, col piano del secondo e terzo lato; col piano del terzo e quarto lato, e così di seguito. Ovvero: quando le linee **1** , **2** , ... , **n** concorrono in un punto *O*, affinchè la poligonale $\mathfrak{A}$ possa essere percorsa dal mobile *M*, si richiede che essa *sia piana e che il suo piano contenga il punto O.*

Le velocità con cui il mobile *M* percorre due lati consecutivi di $\mathfrak{A}$, sono in ragione reciproca dei seni degli angoli che questi lati comprendono rispettivamente colla congiungente il loro vertice comune al punto fisso *O*. Ma i seni di quegli angoli sono proporzionali alle perpendicolari condotte da *O* sopra i lati medesimi; quindi, *la velocità* v_r *corrispondente al lato* $(\mathbf{r}\ ,\mathbf{r}+\mathbf{1})$ *è reciprocamente proporzionale alla perpendicolare* (che denominerò z_r) *condotta dal punto O su questo lato.*

Quando la linea $\mathfrak{A}$ è un poligono chiuso, riesce anche un poligono chiuso la linea $\mathfrak{B}$. Comunque sia, il diagramma del movimento e quello delle velocità si presentano sotto l'aspetto di figure piane tra loro legate dalla corrispondenza di reciprocità notevole, che all'insieme delle rette appartenenti ad un diagramma concorrenti in un punto, corrisponde nell'altro una poligonale formata di altrettante rette parallele alle prime. Si riconosce infatti, che al fascio di raggi dell'una figura uscenti dal punto *O*, corrisponde nell'altra la poligonale $\mathfrak{B}$; alla poligonale $\mathfrak{A}$ della prima, corrisponde nella seconda il fascio di raggi aventi per centro il polo *O*.

Per questa scambievole relazione di dipendenza i due diagrammi si chiamano *diagrammi reciproci.*

Se, come caso particolare, il punto O è all'infinito, vale a dire, se le linee **1**, **2**,..., **n** sono parallele, allora la poligonale 𝔅 si ridurrà ad una retta o punteggiata. Le velocità $v_0, v_1, \ldots, v_n$ del punto mobile M, corrispondenti ai successivi lati di 𝔄, risulteranno reciprocamente proporzionali ai seni dei loro angoli d'inclinazione sulla comune direzione delle linee **1**, **2**, ..., **n**; ossia, ciascuna velocità verrà rappresentata dalla secante trigonometrica della sua inclinazione sopra una normale a quella direzione.

§ 5.

Fin qui abbiamo ammesso che lo spostamento del mobile consistesse in una serie di movimenti uniformi fatti secondo i successivi lati della poligonale 𝔄; però effettivamente avviene, che un punto M in moto descrive una linea continua (m), la sua *trajettoria.* Ma se si concepisce che la poligonale 𝔄 sia inscritta nella linea (m), e che i suoi lati vadano indefinitamente aumentando in numero e diminuendo di più in più di lunghezza, al limite avremo la trajettoria (m). Ciascun lato della poligonale 𝔄 doventa la congiungente due punti contigui della curva, e coincide in direzione con una tangente; ciascuna bisettrice degli angoli di 𝔄, si cambia in una normale principale della curva, ciascuno cerchio che passa per tre vertici consecutivi di 𝔄, si trasforma in un cerchio osculatore della curva medesima.

Anche la poligonale 𝔅, tracciato nel diagramma delle velocità, degenera in una curva, che da Hamilton fu definita col nome di *odografo*, e che può considerarsi come descritta dall'estremità di un vettore di lunghezza variabile, il quale gira intorno all'altra estremità, che è fissa. Questo vettore rappresenta costantemente in grandezza, direzione e senso la velocità del mobile M; la sua estremità fissa dicesi *polo* dell'odografo. Accompagnando coll'occhio il raggio vettore variabile dell'odografo, che ruota intorno al *polo*, si rileva tosto la variazione della velocità al variare della posizione del punto mobile.

§ 6.

Nella continuità del movimento, gli incrementi di velocità $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ divengono piccolissimi, e, in numero infinitamente grande, riescono distribuiti lungo tutti i punti della trajettoria (m); nel loro insieme sommano una quantità di grandezza finita, e provocano le successive variazioni della velocità del mobile.

Qualsivoglia variazione di velocità, sia essa un aumento o una diminuzione di grandezza, oppure un cambiamento di direzione, ha il nome di *accelerazione.* La voce accelerazione, infatti, si usa sempre per esprimere la ragione della variazione di velocità, sia che questa abbia luogo nella direzione del movimento, oppure no.

Come conseguenza di quanto fu stabilito al § 3° si deduce: quando l'accelerazione è diretta secondo la normale alla trajettoria (m), il movimento è uniforme; viceversa, quando il movimento è uniforme, esso ha luogo per effetto di un'accelerazione che devia continuamente il mobile M nel senso normale alla direzione del moto.

In questo caso l'incremento di velocità impresso alla fine di qualsivoglia tempo t, ha per espressione (§ 3°):

$$\varphi = 2v \,.\, \lim.\cos\alpha \,.$$

Ora se indichiamo con s lo spazio percorso nel tempo t, con w l'accelerazione istantanea alla fine di questo tempo, con ρ il raggio di curvatura corrispondente della trajettoria (m), avremo:

$$\varphi = w . dt \quad , \quad v = \frac{ds}{dt} \quad , \quad \lim . \cos . \alpha = \frac{ds}{2\rho} \; ;$$

e sostituendo:

$$w = \frac{v^2}{\rho} .$$

Per il moto circolare uniforme possiamo giungere per altra via a questo risultato. Sia M (fig. 1ª) la posizione del mobile alla fine del tempo t nel cerchio di raggio $OM = r$. Dal centro O del moto, assunto come polo dell'odografo, conduciamo il vettore $OP = v$ parallelo alla tangente al cerchio in M, ossia normale al raggio OM.

Mentre il punto M compie il suo moto circolare uniforme, il vettore OP di lunghezza costante, gira intorno al polo O colla velocità angolare $\omega = \frac{v}{r}$; l'estremità P del vettore percorre l'odografo (che riesce pure un cerchio), colla velocità lineare $w = \omega . v = \frac{v^2}{r}$; questa velocità è anche l'accelerazione del punto M, e può rappresentarsi prendendo nel prolungamento del raggio MO, il vettore $ON = w = \frac{v^2}{r}$.

Nel caso più generale del moto vario secondo una trajettoria qualsiasi, potremo sempre concepire che il mobile si avanzi colla velocità variabile sulla corrispondente tangente alla trajettoria, mentre questa tangente cambia la propria direzione passando da una posizione alla contigua. Per ciò, se in un dato istante si rappresentano in grandezza e senso l'accelerazione $\frac{dv}{dt}$ della velocità e l'accelerazione $\frac{v^2}{\rho}$ della deviazione con due vettori condotti il primo nella tangente ed il secondo nella normale principale della trajettoria (m), e si costruisce sopra questi vettori un rettangolo, la diagonale del rettangolo così costruito rappresenterà in grandezza, direzione e senso l' accelerazione totale relativa all' istante considerato.

§ 7.

Se un punto mobile M è assoggettato ad un'accelerazione diretta costantemente in un punto fisso O, si dice che esso ha *moto centrale;* il punto O chiamasi *centro di accelerazione.* In ogni moto centrale la trajettoria descritta dal mobile è una curva piana, e la velocità istantanea v corrispondente alla fine del tempo t, è inversamente proporzionale alla perpendicolare z condotta dal centro O sopra la tangente alla curva nel punto ove trovasi il mobile in quello istante (§ 4°), abbiamo cioè:

$$v = \frac{\lambda^2}{z} .$$

La costante λ^2 può esprimersi avvertendo alle circostanze iniziali del movimento.

Indichiamo con: r il vettore OM, essendo M la posizione del mobile alla fine del tempo t; $d\theta$ l'angolo elementare di cui ha ruotato OM intorno al centro O nel tempuscolo dt successivo a t; $d\Omega$ l' area da essa descritta in questo tempuscolo. Essendo,

in generale, $d\Omega = \frac{1}{2} r^2 . d\theta$ l'espressione del differenziale delle aree in coordinate polari, avremo come conseguenza del teorema enunciato al § 4°:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{2} r^2 . \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \lambda^2 ;$$

la quale relazione è l'espressione del noto *principio delle aeree* che caratterizza qualsivoglia moto centrale.

La costante λ^2 denota il doppio dell'area descritta nell'unità di tempo.

Per investigare il moto centrale è opportuno di applicare il metodo dell'odografo. Si assume come polo il centro O, e si suppone l'odografo girato intorno al polo di un angolo retto, per modo che un suo vettore qualunque sia perpendicolare anzichè parallelo alla velocità che esso rappresenta. Questa rotazione deve farsi in senso contrario a quello con cui il mobile percorre la trajettoria (m).

Ciò posto, fatto centro in O (fig. 2ª) descrivasi il cerchio di raggio λ; indi, si trovi il polo P relativo a questo cerchio della tangente alla curva (m) in M; sia Q il punto dove la congiungente OP sega la tangente medesima. Abbiamo:

$$OP \times OQ = \lambda^2 ;$$

ma OQ è la perpendicolare z condotta dal centro di accelerazione sopra la detta tangente; quindi OP rappresenta la velocità v che corrisponde alla posizione M del punto mobile. Per conseguenza: *se facciamo girare l'odografo di un angolo retto intorno al centro O, assunto come polo, esso e la trajettoria* (m) *divengono curve polari reciproche rispetto ad una circonferenza.*

E come immediato corollario: *Se la trajettoria è una conica, l'odografo è pure una conica; e viceversa.*

Il centro della circonferenza direttrice coincide col centro di accelerazione O. Se avviciniamo questa osservazione ad un conosciuto teorema di geometria, riesce facile di trarne la conseguenza: *qualunque sia la conica trajettoria, se il punto O è interno, esterno o sulla conica stessa, l'odografo è un'ellisse, un'iperbole od una parabola.*

§ 8.

Esaminiamo alcuni casi particolari notevoli.

La conica trajettoria sia un'ellisse il cui centro coincida col punto O. Conduciamo il semidiametro OM' coniugato al semidiametro OM; il prodotto $4 . OM' \times OQ$, area di un parallelogrammo circoscritto all'ellisse, è una quantità costante eguale al rettangolo costruito sugli assi. Indicando con a, b i semiassi, avremo in questo caso:

$$OP \times OQ = \lambda^2 ,$$

$$OM' \times OQ = ab ;$$

da cui:

$$OP = \frac{\lambda^2}{ab} . OM' .$$

Quindi: *se la trajettoria è un'ellisse e l'accelerazione converge nel suo centro O, l'odografo, ricondotto nella primitiva posizione, è una ellisse omotetica alla prima*; sicchè se il rapporto di omotetia $\frac{\lambda^2}{ab}$ è l'unità, può essere assunta la stessa trajettoria come odografo.

In una maniera analoga si giunge all'altro risultato: *se la trajettoria è un'iperbole, l'odografo è pure un'iperbole che ha gli stessi assintoti della trajettoria.* Quando $\frac{\lambda^2}{ab}=1$, l'iperbole odografo riesce supplementare dell'iperbole trajettoria.

L'arco elementare ds di curva descritto dal punto M nell'elemento di tempo dt successivo al tempo t, ha per espressione:

$$ds = v.dt = \frac{\lambda^2}{ab} r'.dt\ ,$$

denotandosi con r' il semidiametro OM'.

L'arco percorso nello stesso tempo dt dal punto M, è invece:

$$ds' = \frac{\lambda^2}{ab} r.dt\ .$$

L'arco elementare $d\sigma$ corrispondente dall'odografo riesce quindi:

$$d\sigma = \frac{\lambda^2}{ab}.ds' = \frac{\lambda^4}{a^2b^2} r.dt\ .$$

Ora, l'arco $d\sigma$ dell'odografo rappresenta l'incremento di velocità nel tempo dt, per conseguenza $\frac{d\sigma}{dt}$ è l'espressione dell'accelerazione istantanea w, da cui è animato il mobile alla fine del tempo t. Ponendo per semplicità di scrittura:

$$\mu = \frac{\lambda^4}{a^2b^2}\ ,$$

avremo definitivamente:

$$w = \mu r\ .$$

Per l'iperbole osservazioni e conseguenze identiche.

Possiamo per ciò trarre la conclusione: *se un punto descrive un'ellisse (o un'iperbole) in virtù di una velocità iniziale v_0 e di un'accelerazione w, che converge (o diverge) nel centro della curva, la w è proporzionale al corrispondente raggio vettore.*

Per trovare il tempo che il mobile impiega a percorrere un certo arco della sua trajettoria, s'applica il principio delle aree; così, per il moto ellittico il tempo T corrispondente ad un'intera rotazione ha per misura:

$$T = \frac{2\pi ab}{\lambda^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\ ;$$

questa relazione mostra che *la durata di ogni rivoluzione è indipendente dalle circostanze iniziali del movimento.*

§ 9.

Si faccia ora l'ipotesi che il centro di accelerazione O coincida con uno dei fuochi della conica trajettoria (per la parabola col fuoco). È notissimo che la polare reciproca di una conica rispetto ad una circonferenza direttrice con il centro in un fuoco della conica, è un'altra circonferenza. Per conseguenza, in questo caso, *l'odografo è una circonferenza.*

Il centro del cerchio direttore giace all'interno, nella periferia o fuori del cerchio odografo, secondo che la trajettoria è un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

Il centro dell'odografo è situato nell'asse focale della trajettoria, ed il suo raggio (che indicherò con R) è dato dalla formola:

$$R=\frac{\lambda^2}{p},$$

nella quale p stà a rappresentare il semiparametro, cioè la metà del lato retto della conica, che è l'ordinata corrispondente al fuoco. Per l'ellisse e l'iperbole $p=\frac{b^2}{a}$; per la parabola p è la distanza del fuoco della direttrice della curva.

Se la trajettoria è un'ellisse, la velocità del mobile varia tanto meno quanto meno schiacciata è la conica; e si conserva uniforme quando il fuoco O coincide col centro, cioè quando l'ellisse doventa una circonferenza. Una corda qualunque del cerchio odografo passante pel polo O, rappresenta la somma delle velocità corrispondenti ai termini del diametro dell'ellisse, coniugato alla direzione della corda.

L'angolo di contingenza $d\varepsilon$ del cerchio odografo di raggio R, riesce eguale tanto all'angolo $d\theta$ di due raggi infinitamente vicini della trajettoria, come all'angolo al centro che sottende l'arco elementare $d\sigma$ dell'odografo stesso. Per ciò avremo:

$$d\sigma=R.d\varepsilon=R.d\theta\ ;$$

e per il principio delle aree:

$$d\sigma=\frac{\lambda^2}{r^2}R.dt\ .$$

Ma $\frac{d\sigma}{dt}=w$, quindi

$$w=\frac{\lambda^2}{r^2}.R\ ,$$

ovvero, ponendo $\mu=\lambda^2 R=\frac{\lambda^4}{p}$:

$$w=\frac{\mu}{r^2}\ .$$

L'accelerazione w è, dunque, *inversamente proporzionale al quadrato della distanza del mobile dal centro O.*

Viceversa, un punto sotto l'azione di una velocità preconcepita v_0 e di un'accelerazione $w=\frac{\mu}{r^2}$ convergente (o divergente) in un centro fisso O, e la cui grandezza è reciprocamente proporzionale al quadrato della distanza del mobile del punto O, genera una conica di cui O è uno dei fuochi. La trajettoria è un'ellisse, una parabola o un'iper-

bole secondo che il centro d'accelerazione giace nello interno, nella periferia o fuori della circonferenza odografo (§ 7°).

Indicando con v_0 la massima velocità, dalla quale è animato il mobile quando coincide col *perielio* (vertice della conica il più prossimo al fuoco O), e con r_0 la distanza da O del perielio, allora il maggior raggio vettore dell'odografo è v_0; quindi l'espressione analitica della condizione affinchè il centro di accelerazione cada internamente all'odografo è:

$$v_0 < 2R \ .$$

Siccome:

$$R = \frac{\mu}{\lambda^2} = \frac{\mu}{v_0 r_0} \ ,$$

la trajettoria sarà un'ellisse quando:

$$v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0} \ ;$$

sarà, invece ordinatamente una parabola o un'iperbole quando:

$$v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0} \quad , \text{ oppure } \quad v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0} \ .$$

Per $v_0^2 = \frac{\mu}{r}$, la trajettoria è un cerchio ed il moto è uniforme.

Dall'esame dei risultati a cui ora siamo giunti emerge, che la trajettoria è un'ellisse, una parabola o un'iperbole avente un fuoco nel centro d'accelerazione O, secondochè la velocità v_0 è minore, eguale o maggiore di $\sqrt{2}$ volte la velocità, colla quale il mobile percorrerebbe con moto uniforme un cerchio di centro O, essendo all'unità di distanza assoggettato alla medesima accelerazione μ.

§ 10.

Considerando in modo particolare il moto ellittico, il tempo T che occorre al mobile M per descrivere l'intera trajettoria ha per espressione:

$$T = \frac{2\pi ab}{\lambda^2} = \frac{2\pi ab}{\sqrt{\mu p}} \ ;$$

ovvero, per essere $p = \frac{b^2}{a}$:

$$T = 2a\sqrt{\frac{a}{\mu}} . \pi \ .$$

Immaginiamo ora un secondo punto M_1, il quale essendo sollecitato all'unità di distanza dalla stessa accelerazione μ, si muova in maniera da percorrere, come il punto M, un'ellisse di cui il centro di accelerazione O tiene uno dei fuochi. Il tempo T_1 che il punto M_1 impiegherà a compiere una rotazione, sarà:

$$T_1 = 2a_1\sqrt{\frac{a_1}{\mu}} . \pi \ ,$$

dove a_1 rappresenta il semi-asse maggiore dell'ellisse medesima.

Dall'insieme delle due ultime uguaglianze si ricava:

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{T_1^{\,2}}{a_1^{\,3}}=\frac{4\pi^2}{\mu}\,.$$

Ossia, *i quadrati dei tempi impiegati dai punti* M, M_1 *a compiere una rotazione, sono tra loro come i cubi degli assi maggiori delle ellissi da essi descritte.*

Questo enunciato insieme a quelli del § precedente contengono le leggi del moto planetario, che Keplero ha dedotte da uno studio accurato fatto sulle osservazioni di Ticone Brahe. Le leggi di Keplero sono puramente cinematiche; esse descrivono completamente i movimenti dei pianeti, ma nulla dicono circa le forze che originano questi movimenti. La loro interpretazione meccanica costituisce la dottrina della gravitazione universale, data più tardi da Newton.

§ 11.

Non è privo d'interesse l'esame della genesi di una conica, sotto la condizione che il punto descrivente M venga sollecitato da una accelerazione w parallela all'asse focale.

Nel punto M della conica, di coordinate x, y, conducasi la normale MN, e l'ordinata MP, e siano N, P, i punti in cui queste rette incontrano rispettivamente l'asse focale. L'equazione della conica riferita a questo asse, come asse delle ascisse, e ad un vertice, come origine, si presenta nella forma:

$$y^2=2px+qx^2\,,$$

dove il semiparametro p è l'ordinata corrispondente a ciascun fuoco. La lunghezza della sottonormale PN (che chiamerò s_n) ha per espressione:

$$s_n=p+qx\,.$$

Siano, come sempre, v_0 e v le velocità da cui è animato il mobile al perielio ed al punto M. Siccome, in via d'ipotesi, l'accelerazione w è diretta costantemente nel punto all'infinito dell'asse focale, l'odografo degenera in una retta parallela a quest'asse, e il suo sviluppo nella parte intercettata tra i vettori v_0, v, ha per grandezza:

$$\sigma=v_0\frac{MP}{PN}=v_0\frac{y}{p+qx}\,.$$

Derivando rispetto al tempo t risulta:

$$\frac{d\sigma}{dt}=v_0\frac{(p+qx)\dfrac{dy}{dt}-qy\cdot\dfrac{dx}{dt}}{(p+qx)^2}\,.$$

Ma $\dfrac{d\sigma}{dt}=w$, $\dfrac{dy}{dt}=v_0$, $\dfrac{dx}{dt}=\sigma$, quindi sostituendo e riducendo:

$$w=v_0^{\,2}\frac{(p+qx)^2-qy^2}{(p+qx)^3}\,;$$

ovvero, avvertendo alla equazione della curva e alla espressione della sottonormale:

$$w = v_0^2 \frac{p^2}{s_n^3},$$

nella quale sta scritto che, *l'accelerazione varia in ragione inversa del cubo della sottonormale*. Per l'ellisse e per l'iperbole, la sottonormale è espressa da $s_n = \frac{b^2}{a^2}x$, ed i limiti della sua grandezza sono: per l'ellisse da $\frac{b^2}{a}$ a zero; per l'iperbole $\frac{b^2}{a}$ all'infinito.

Per la parabola, invece, la sottonormale è costante ed eguale al semiparametro p, ossia alla distanza del fuoco dalla direttrice. Per la parabola abbiamo, cioè, la ben nota relazione: $w = v_0^2 : p$.

L'espressione di w può trasformarsi. Se, infatti, poniamo $MN = n$, risulta:

$$s_n = \frac{v_0}{v} . n ,$$

e quindi:

$$w = \frac{v^3}{v_0} . \frac{p^2}{n^3} .$$

Ma se indichiamo con ψ l'angolo formato dalla direzione costante della accelerazione w colla normale MN, e con ρ il raggio di curvatura della conica nel punto M, abbiamo:

$$w . \cos\psi = \frac{v^2}{\rho} ;$$

per conseguenza potremo anche scrivere:

$$w = \frac{v^3}{\rho . v \cos\psi} ;$$

ovvero, per essere $v_0 = v . \cos\psi$:

$$w = \frac{v^3}{v_0 . \rho} .$$

Ne deriva: *l'accelerazione riesce direttamente proporzionale al cubo della velocità ed inversamente proporzionale al raggio di curvatura della conica percorsa dal mobile.*

Eguagliando i due ultimi valori di w si deduce:

$$\rho = \frac{n^3}{p^2} ,$$

che è l'espressione analitica della ben conosciuta proposizione: *in ogni conica il raggio di curvatura è uguale al cubo della normale diviso pel quadrato del semiparametro.*

§ 12.

Consideriamo la *spirale equiangola* (o *spirale logaritmica*) come trajettoria del punto mobile M, assoggettato ad un'accelerazione w convergente nel suo polo O. Sia:

$$r = ae^{m\theta} ,$$

l'equazione polare della curva. Per $\theta = 0^\circ$ si ha $r = a$; la costante m è la cotangente trigonometrica dell'angolo costante α che la tangente geometrica alla spirale forma col rispettivo raggio vettore.

Si faccia centro nel polo O, e con raggio $\lambda = \sqrt{v_0 a \,\text{sen}\,\alpha}$ descrivasi il cerchio, rispetto al quale trajettoria ed odografo, quest'ultimo girato di un angolo retto intorno al punto O, sono curve polari reciproche. Essendo v la velocità da cui è animato il mobile nella posizione M, il vettore OP dell'odografo, che rappresenta la velocità v, riesce perpendicolare alla tangente nel punto M della spirale, e si trova legato al raggio OM dalla relazione:

$$OP = v = \frac{\lambda^2}{OM.\,\text{sen}\,\alpha} = \frac{av_0}{OM},$$

ovvero:

$$v = v_0 e^{-m\theta}.$$

L'odografo riesce, quindi, *una spirale identica alla trajettoria, così disposta che mentre i raggi vettori di questa aumentano, i raggi di quella diminuiscono.*

L'arco elementare dell'odografo ha per espressione:

$$d\sigma = \sqrt{\{dv^2 + v^2.d\theta^2\}} = \frac{av_0}{r}\sqrt{1+m^2}.d\theta\ ;$$

da cui:

$$w = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{av_0}{r}\sqrt{1+m^2}.\frac{d\theta}{dt}.$$

Ma per il principio delle aree:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\lambda^2}{r^2} = \frac{av_0}{r^2.\sqrt{1+m^2}},$$

laonde:

$$w = \frac{a^2 v_0^2}{r^3}.$$

Se $m=0$, la spirale riducasi ad una circonferenza: $a=r$, $v_0=v$ e $w=\frac{v^2}{r}$.

Per ciò, *nella spirale equiangola l'accelerazione se converge nel polo della curva*, è *inversamente proporzionale al cubo del raggio vettore.*

§ 13.

La *lemniscata* ha per equazione in coordinate cartesiane ortogonali:

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),$$

ed in coordinate polari:

$$r^2 = a^2.\cos 2\theta.$$

Essa è la trasformata per raggi vettori reciproci dell'iperbole equilatera:

$$r'^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta};$$

il polo di reciprocità è il centro O dell'iperbole che è contemporaneamente il punto doppio della lemniscata.

Siccome l'asse trasverso dell'iperbole equilatera biseca l'angolo compreso fra il raggio vettore $OM'=r'$ (fig. 3) e la perpendicolare $OQ'=z'$ abbassata dal centro O sulla tangente nel punto M', il triangolo $OM'Q'$ somministra:

$$z'=r'.\cos 2\theta ,$$

laonde:

$$z'^2=a^2.\cos 2\theta .$$

Ne consegue $z'=r$, ovvero: la lemniscata si presenta anche come la podaria rispetto al polo O della stessa iperbole equilatera.

Questo premesso, concepiamo la lemniscata come trajettoria di un punto mobile M sollecitato da un'accelerazione w diretta verso il polo O. Per una nota proprietà delle curve reciproche, sono eguali (e di senso opposto) gli angoli che le tangenti ne' punti reciproci M, M' della lemniscata e dell'iperbole equilatera formano col raggio vettore; ne deriva:

$$OQ=\frac{OM}{OM'}\times OQ'=\frac{r^3}{a^2};$$

e il corrispondente vettore dell'odografo risulta (§ 7°):

$$v=\frac{a^2\lambda^2}{r^3}.$$

D'altra parte, la tangente alla lemniscata comprende coll'asse trasverso l'angolo $\psi=\frac{\pi}{2}-3\theta$.

Abbiamo così tutti gli elementi per stabilire l'espressione dell'arco elementare dell'odografo:

$$d\sigma=\sqrt{\left\{dv^2+v^2.d\psi^2\right\}}=3\frac{a^2\lambda^2}{r^4}\sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}d\theta .$$

Avvertendo poi all'equazione della curva e al principio delle aree, si discende assai facilmente alla relazione finale:

$$w=3\frac{a^6v_0^2}{r^7}.$$

Si conclude: *nella lemniscata l'accelerazione se converge al punto doppio della curva, è inversamente proporzionale alla settima potenza del raggio vettore.*

§ 14.

Per stabilire la genesi cinematica di altre curve di ordine superiore, quali sono le cicliche, le cubiche circolari (cissoide, logociclica, ...), le quartiche (concoide di cerchio, podarie delle coniche a centro,.....), etc., anzichè far uso dell'odografo, val meglio prendere a base d'investigazione la *trasformazione quadratica* nel piano. Ma per pro-

cedere con chiarezza, dobbiamo premettere la teoria che compendia questa elegante trasformazione geometrica.

È notissimo che il movimento continuo di una figura piana **F** nel suo piano, può concepirsi come definito dal moto di sviluppo di una linea *(polodia epiciclo)*, ad essa congiunta invariabilmente, sopra un'altra linea *(polodia deferente)* fissa nel piano. Le due polodie si toccano, in ogni istante, nel *polo* o centro istantaneo di rotazione O, ove convergono le normali alle trajettorie dei punti dalla figura **F** nell'istante considerato.

È pur noto che sussiste inoltre una seconda figura **F***, fissa nel piano, la quale deducesi come trasformata della prima figura **F** sotto la condizione che qualsivoglia retta **r** passante pel polo O contenga due punteggiate projettive sovrapposte, tali che ogni punto (fisso) M^*, considerato come appartenente alla trasformata **F***, sia centro di curvatura della trajettoria percorsa dal corrispondente punto (mobile) M della figura **F**. Con simile dipendenza, ad un punto qualunque dell'una figura corrisponde un sol punto nell'altra, o, viceversa, a ciascun punto di questa un punto unico di quella.

La legge che governa la suaccennata corrispondenza reciproca è espressa dalla formola di **Eulero** erroneamente attribuita a **Savary**:

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r^*}\right)\operatorname{sen}\varepsilon=\frac{1}{R}-\frac{1}{R^*}=\frac{1}{k};$$

dove $r=OM$, $r^*=OM^*$, $R=OC$, $R^*=OC^*$, essendo C e C^* i centri di curvatura dell'epiciclo e del deferente relativi al punto di contatto O; ε, denota l'angolo che la retta **r** forma colla tangente comune τ alle due polodie, e k una costante.

La precedente formola presuppone il piano delle figure **F** , **F*** separato dalla tangente τ in due regioni (positiva e negativa), la regione positiva essendo quella che contiene il centro di curvatura C dell'epiciclo. Dietro questa convenzione, al raggio R compete sempre il segno $+$; al raggio R^* e ai vettori r , r^* dobbiamo invece attribuire il segno $+$ o il segno $-$, secondo che i punti C^*, M , M^* giacciono nell'una o nell'altra regione del piano.

Ciò posto, s'intendano le figure **F** , **F*** riferite a due assi rettangolari coll'origine nel polo O; l'asse delle ascisse coincida colla tangente τ, e l'asse delle ordinate colla normale alle due polodie. Siano: x , y le coordinate del punto M (elemento variabile della figura **F**); ξ , η le coordinate del punto M^* (elemento variabile di **F***). La formola di **Eulero** somministra le equazioni:

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\xi}\right)\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{1}{k}\quad,\quad\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\eta}\right)\frac{y^2}{x^2+y^2}=\frac{1}{k};$$

da cui si ottiene:

$$\xi=-\frac{kxy}{x^2+y^2-ky}\quad,\quad\eta=-\frac{ky^2}{x^2+y^2-ky}.$$

Risolvendo invece le equazioni rispetto ad x , y si ricava:

$$x=\frac{k\xi\eta}{\xi^2+\eta^2+k\eta}\quad,\quad y=\frac{k\eta^2}{\xi^2+\eta^2+k\eta}.$$

Le coordinate di ogni punto della figura trasformata riescono, dunque, espresse in funzione delle coordinate del punto conjugato nella figura primitiva, e queste coordinate in funzione di quelle, per mezzo di equazioni, le quali mostrano che la corrispondenza tra le figure **F**, **F*** definita dalla formola Euleriana, rientra nella classe generale delle *trasformazioni quadratiche birazionali* *).

Se il punto $M(x, y)$ nel generare la figura **F**, percorre una retta **s** data dall'equazione:

$$y = ax + b \ ;$$

il conjugato $M^*(\xi, \eta)$ descrive la conica:

$$ak\xi\eta + b(\xi^2 + \eta^2) + k\eta(b - \eta) = 0 \ ;$$

la quale è tangente alle due polodie nel centro istantaneo O.

Similmente, se cerchiamo il luogo del punto M perchè il punto M^*, nel generare la figura **F***, percorra una retta **s***, si trova che M deve muoversi in una conica che tocca le polodie nel polo O.

§ 15.

La retta all'∞ del piano, considerata come appartenente alla figura **F***, ha per conica corrispondente un cerchio $\mathcal{C}$ *(cerchio dei flessi)* che è luogo dei punti i quali, per un moto elementare della figura **F**, descrivono trajettorie di curvatura nulla *(flessi)* secondo rette concorrenti in un unico punto I *(polo dei flessi)*. Il cerchio $\mathcal{C}$, di diametro k, è contenuto nella regione positiva dal piano; il polo di rotazione O è il polo dei flessi I ne sono punti diametralmente opposti nella normale comune alle polodie.

Alla retta all'∞ del piano, considerata nella figura **F**, corrisponde nella trasformata **F***, un secondo cerchio $\mathcal{C}^*$, esso pure di diametro k, ma contenuto nella regione negativa del piano.

Per interpretare la proprietà di cui gode il cerchio $\mathcal{C}^*$, conduciamo pel polo O la perpendicolare **r** alla retta **s**, e sia S^* l'intersezione di **r** con $\mathcal{C}^*$. Il punto S^* è centro di curvatura tanto della trajettoria descritta dal punto all'∞ della retta r, come delle linee, tra loro equidistanti, che vengono inviluppate da tutte le rette parallele alla **s**. Fra queste ve n'è una, la retta $\mathbf{s}_0$, la quale passa per S^* e pel punto I^* del cerchio $\mathcal{C}^*$, diametralmente opposto al centro istantaneo O.

S^* riesce simultaneamente punto di contatto di $\mathbf{s}_0$ col suo inviluppo (s_0) e centro di curvatura di questo inviluppo (s_0). In altre parole: la curva (s_0) presenta una cuspide

---

*) La trasformazione di Eulero considerata nel testo, è un caso particolare della *trasformazione conica* ideata da Steiner (nel suo *Sviluppo della mutua dipendenza delle forme*, Berlino, 1832), e dipoi generalizzata da Cremona (Mem. dell'Acc. di Bologna, 1863). Colla trasformazione di Steiner al sistema di rette del piano corrisponde il sistema di coniche circoscritte ad un triangolo (reale o no).

Da essa si discende assai facilmente al *principio delle imagini* di Thomson (giornale di Liouville, 1847), per cui si passa da una figura ad un'altra per inversione, ossia per raggi vettori reciproci.

Così pure, dalla trasformazione di Steiner deriva la *trasformazione iperbolica* studiata da Schiaparelli (Mem. dell'Acc. di Torino, 1862), la quale ha con quella di Thomson la stessa analogia che l'iperbole equilatera col cerchio, e gli esponenziali colle linee trigonometriche.

in S^*. Donde segue: le rette che concorrono nel punto I^* *(polo delle cuspidi)*, per un moto elementare della figura **F**, inviluppano archi di curvatura infiniti *(cuspidi)* nei punti del cerchio $\mathfrak{C}^*$ *(cerchio delle cuspidi)*. Tutte le altre rette della figura **F** inviluppano, invece, archi di curvatura finita di cui i centri sono pure nel cerchio $\mathfrak{C}^*$.

§ 16.

Facilmente si riconosce che:

1° a più rette qualsivogliano della figura **F** (o della trasformata **F***) corrispondono coniche osculatrici nel polo O al cerchio delle cuspidi (o al cerchio dei flessi) *);

2° a più rette parallele di **F** (o di **F***) corrispondono coniche passanti per uno stesso punto del cerchio delle cuspidi (o del cerchio dei flessi);

3° ciascuna conica è un'ellisse, un'iperbole o una parabola secondo che la retta conjugata è esterna, sega o tocca il cerchio dei flessi (o rispettivamente il cerchio delle cuspidi);

4° i punti situati nella tangente comune alle due polodie percorrono trajettorie aventi un unico centro di curvatura, il polo O; quest'ultimo punto corrisponde a sè stesso (e a tutti i punti di quella tangente), ed ogni retta passante per esso corrisponde del pari a sè medesima;

5° se invertiamo le due figure, cioè se rendiamo ferma la figura **F** e mobile la trasformata **F***, allora deferente ed epiciclo s'invertono tra loro; il cerchio dei flessi si cambia nel cerchio delle cuspidi, e, viceversa, il cerchio delle cuspidi in quello dei flessi.

§ 17.

Dati il polo O e i centri di curvatura C, C^* delle polodie che definiscono il moto, trovasi ad ogni punto M il suo conjugato M^*, mediante una costruzione grafica semplicissima.

Si unisce M (fig. 4) con C e con O; sulla retta OM s'inalza la perpendicolare OH, che interseca l'altra retta CM nel punto H; la congiungente C^*H sega OM, o il suo prolungamento, nel punto richiesto M^*.

La verità della costruzione si rende subito manifesta, osservando il triangolo COM tagliato dalla trasversale C^*H; per il teorema di Menelao abbiamo:

$$CH \times MM^* \times OC^* = MH \times OM^* \times CC^* .$$

Ma se denotiamo con ε l'angolo che il vettore OM forma colla tangente alle due polodie, e con φ l'angolo in M del triangolo, risultano:

$$CH = R\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\cos\varphi} \;,\quad MM^* = r - r^* \;,\quad OC^* = R^* \;;$$

$$MH = \frac{r}{\cos\varphi} \;,\quad OM^* = r^* \;,\quad CC^* = R - R^* \;.$$

*) Queste coniche, ognuna delle quali contiene i centri di curvatura degli elementi di trajettorie descritte simultaneamente dai diversi punti di una retta (od è luogo de' punti i cui centri di curvatura giacciono in linea retta), si chiamano coniche di Rivals, il quale è stato il primo a notarle (giornale della Scuola politecnica, Parigi, 1858).

Sostituendo s'ottiene:

$$RR^*(r-r^*)\operatorname{sen}\varepsilon=rr^*(R-R^*)\ ,$$

risultato conforme alla formola Euleriana.

I centri C e C^* dell'epiciclo e del deferente costituiscono una coppia di punti conjugati; il punto C^* è infatti, centro di curvatura della trajettoria percorsa dal punto C.

La costruzione è egualmente applicabile quando si consideri un'altra coppia qualsivoglia di punti conjugati situati nella normale comune alle polodie. Tutte queste coppie di punti conjugati riescono, per ciò, sezioni dei raggi corrispondenti di due fasci prospettivi, i quali, dai centri M, M^*, projettano una medesima punteggiata che ha per asse la retta OH, prolungata senza limiti.

Il punto all'∞ di quella comune normale, riguardato come centro di curvatura, ha per suo conjugato il polo dei flessi I; lo stesso punto all'∞, considerato come elemento mobile, ha per conjugato il polo delle cuspidi I^*.

Se il centro C^* del deferente giace all'∞, allora il polo dei flessi I coincide col centro C dell'epiciclo; invece, se è all'∞ quest'ultimo punto, il polo delle cuspidi I^* si confonde col centro del deferente C^*.

§ 18.

A viemeglio fissare nella mente le proprietà stabilite ne' §§ precedenti per via geometrica, vogliamo ora enunciarle in termini di moto. Immaginiamo che l'epiciclo si sviluppi sul deferente colla velocità U; siano O e O' i punti di contatto delle due polodie alla fine dei tempi t e $t+dt$; sia inoltre l'arco di sviluppo $OO'=d\sigma$.

La rotazione della figura **F**, che supponiamo avvenga con velocità angolare uniforme ω, relativa al centro istantaneo O', può concepirsi come risultante da una rotazione eguale intorno al polo O, supposto fisso, e da una traslazione di velocità $\omega.d\sigma=\omega U.dt$, diretta secondo la normale comune alle polodie.

Per effetto della rotazione intorno al polo O, ciascun punto M della figura mobile **F** riesce animato dall'accelerazione normale $\omega^2 r$; e per effetto della traslazione, dall'accelerazione $\omega.\frac{d\sigma}{dt}=\omega.U$. Quest'ultima ha per sue componenti secondo la normale e la tangente alla trajettoria descritta dal punto M: $-\omega U.\operatorname{sen}\varepsilon$, $\omega U.\cos\varepsilon$. Ne seguono le espressioni delle accelerazioni normale e tangenziale del punto M:

$$w_n=\omega^2 r-\omega U.\operatorname{sen}\varepsilon \quad , \quad w_t=\omega U.\cos\varepsilon\ .$$

D'altra parte, essendo v la velocità di M e ρ il raggio di curvatura della sua trajettoria, abbiamo: $w_n=\frac{v^2}{\rho}$. Se il punto M appartiene al cerchio dei flessi $\mathfrak{C}$: $\rho=\infty$ e $w_n=0$. Il cerchio $\mathfrak{C}$ è, dunque, *il luogo dei punti la cui accelerazione normale è nulla*. Questa proposizione venne enunciata da Bresse, al quale spetta il merito di aver per il primo riconosciuta l'esistenza di quel cerchio (giornale della Scuola politecnica, Parigi, 1853).

Per il polo dei flessi $I: r = k$, $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\rho = \infty$, e, quindi, $w_n = w_t = 0$, $v = U = \omega k$. Esso riesce caratterizzato nell'essere il punto unico della figura **F** che è *animato dalla velocità di sviluppo U, e che ha nulla l'accelerazione totale.*

Sostituendo alla velocità U il suo valore ωk, le espressioni di w_n, w_t si presentano nella forma più semplice:

$$w_n = \omega^2 (r - k \operatorname{sen} \varepsilon) \quad , \quad w_t = \omega^2 . k \cos \varepsilon \; .$$

Ciò posto, denotiamo con K (fig. 5) il punto dove il vettore OM interseca il cerchio $\mathfrak{C}$; congiungiamo i punti M e K col polo I. Le accelerazioni normale e tangenziale del punto M sono ordinatamente equipollenti ai vettori MK, KI; epperò la corrispondente accelerazione totale risulta *equipollente al vettore MI, e riesce costantemente diretta nel polo dei flessi I.* Questo punto è, dunque, un effettivo *centro di accelerazione.*

Ciò, ben inteso, nell'ipotesi che sia costante la velocità angolare ω del moto di rotazione intorno al polo O. L'ipotesi trovasi sempre giustificata quando si vuole definire la genesi cinematica di qualche curva, come illustreremo con un buon numero di esempî.

Un'altra conseguenza importante si deduce coll'avvicinare fra loro le due espressioni dell'accelerazione normale, riunendole nell'eguaglianza:

$$\frac{v^2}{\rho} = \omega^2 (r - k \operatorname{sen} \varepsilon) \; .$$

E siccome $v = \omega r$, $\rho = r - r^*$, potremo anche scrivere:

$$\frac{r^2}{r - r^*} = r - k \operatorname{sen} \varepsilon \; ,$$

donde deriva in maniera molto semplice la formola fondamentale che ha servito alle nostre ricerche:

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} \right) \operatorname{sen} \varepsilon = \frac{1}{k} \; .$$

§ 19.

La trasformazione quadratica presenta un caso d'impossibilità di moto e uno di indeterminazione.

Il caso d'impossibilità ha luogo quando le polodie si osculano nel polo O situato a distanza finita ($R = R^*$, $k = \infty$). Il polo dei flessi I e quello delle cuspidi I^* vanno all'infinito; la figura **F** per un breve tempuscolo rimane stazionaria nella posizione che occupa; tutti i suoi punti descrivono altrettante cuspidi, poichè ogni punto riesce il conjugato di sè medesimo (§ 14). A questa singolarità fanno eccezione i punti della retta τ (tangente comune alle polodie), ne' quali le rispettive trajettorie presentano invece degli iperflessi.

Così pure, tutte le rette della figura contengono altrettanti flessi dei corrispondenti

inviluppi, eccettuate le perpendicolari alla retta τ, che inviluppano delle ipercuspidi nei punti di questa tangente.

Il caso d'indeterminazione del moto appare quando le polodie si osculano nel polo O situato a distanza infinita con due rami assintotici alla medesima retta $\tau (R = R^* = \infty$, $k = \infty)$. Per includere questo caso nella trattazione generale, osserviamo che alla formola di **Eulero** può darsi la forma:

$$\rho y = \frac{r^3}{k}\left(\frac{\rho}{r} - 1\right),$$

dove è stato posto: $\rho = r - r^*$, $\operatorname{sen} \varepsilon = \frac{y}{r}$.

E se riteniamo r molto grande in confronto di ρ, abbiamo più brevemente:

$$\rho y = -\frac{r^3}{k}.$$

Ora il prodotto ρy ha grandezza finita anche per $r = \infty$, $k = \infty$; possiamo quindi porre il rapporto $\frac{r^3}{k} = k_0^2$, denotandosi con k_0 un parametro da determinarsi. Donde segue la relazione:

$$\rho y = -k_0^2,$$

nella quale l'ordinata y e il raggio di curvatura ρ devono assumersi con segno contrario. Simile relazione definisce la corrispondenza univoca tra i punti della figura **F** e quelli della sua trasformata **F*** quando il polo O è situato all'infinito. La legge che riflette questa *trasformazione parallela* appare indeterminata, perchè il parametro k_0 è indeterminato esso pure. Ma l'indeterminazione svanisce coll'assegnare a k_0 un valore prestabilito in conformità di date condizioni da soddisfare.

Alla trasformazione parallela competono le seguenti proprietà:

1° i punti della figura **F** si muovono tutti nella direzione normale alla retta τ (asse delle ascisse), in guisa che i punti di una stessa parallela a questa retta descrivono trajettorie di egual curvatura;

2° le trajettorie di punti situati da parti opposte dell'asse τ hanno curvature rivolte in senso contrario, e quello de' punti situati in quest'asse sono di curvatura nulla (flessi);

3° le rette di **F** riescono assintoti delle proprie inviluppate, salvo le perpendicolari all'asse τ, le quali inviluppano singolarità di curvatura nulla;

4° ciascuna parallela all'asse τ è conjugata di sè medesima; ciascun'obliqua a τ ha per conjugata un'iperbole assintotica alle due polodie.

§ 20.

Passiamo ora a dare alcuni esempî, atti a mettere in evidenza il largo contributo che la trasformazione quadratica apporta alle indagini della cinematica. Non ci fermeremo ad esaminare le semplificazioni che s'ottengono quando le polodie divengono delle circonferenze e le trajettorie delle cicliche, poichè tali semplificazioni riescono

troppo evidenti. Bensì vogliamo considerare, come primo esempio, il caso particolare, molto interessante per le pratiche applicazioni, in cui le cicliche degenerano in rette, ellissi e concoidi di cerchio.

Data una retta, di lunghezza finita, $PQ = l$ (fig. 6) i cui estremi scorrono ne' lati dell'angolo $PAQ = \alpha$, s'individui il polo O d'istantanea rotazione che vi corrisponde. Il quadrilatero $APOQ$, rettangolo in P e Q, è inscritto in una circonferenza, la quale riesce sempre eguale a sè stessa per qualsivoglia posizione della retta PQ, poichè l'angolo inscritto $PAQ = \alpha$ e la corda opposta $PQ = l$, hanno grandezze costanti. La congiungente AO è un diametro di questa circonferenza, epperò la distanza del polo O dal vertice dell'angolo è essa pure costante.

In altre parole, il polo O trovasi continuamente in una circonferenza di centro A, che costituisce la *polodia deferente*. Per determinarne il raggio $AO = R^*$, notiamo che quando la retta $PQ = l$ è normale ad uno dei lati dell'angolo α, il triangolo APQ riesce rettangolo coll'ipotenusa $= R^*$ e col cateto $= l$ opposto all'angolo α; laonde $R^* = \frac{l}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Assegniamo la *polodia epiciclo*. All'uopo teniamo ferma la retta PQ e facciamo muovere l'angolo $PAQ = \alpha$. I punti ne' lati dell'angolo che coincidono per un istante coi centri fissi P, Q, si spostano secondo i lati medesimi; le corrispondenti normali s'incontrano tuttora nel polo O, il quale, nel progredire del moto di $PAQ = \alpha$, cambia luogo ma da esso si vede sempre sotto un angolo d'ampiezza costante, $180° - \alpha$, la retta PQ di lunghezza pure costante. La linea percorsa da O è, quindi, la circonferenza APQ di raggio $R = \frac{1}{2} R^*$.

Ne consegue: le polodie che definiscono il moto della retta rispetto all'angolo, *sono due circonferenze, una doppia dell'altra, la minore delle quali sviluppasi nell'interno della maggiore.* Quando s'inverte la disposizione, col tener ferma la retta e col muovere l'angolo, dobbiamo anche invertire le due polodie, assumendo per epiciclo la circonferenza maggiore e per deferente quella minore.

Queste circonferenze, che appajono sovente nelle applicazioni, si chiamano *cerchi di Cardano*, dal nome del geometra che le ha osservate per il primo.

Consideriamo la retta PQ mobile rispetto all'angolo PAQ. Siccome $R^* = 2R = cost.$, il polo dei flessi coincide col punto A, e il cerchio dei flessi si confonde coll'epiciclo (§ 15). *Tutti i punti dell'epiciclo descrivono, dunque, rette convergenti al centro del deferente.*

Quando si faccia l'ipotesi di una rotazione di velocità uniforme ω intorno al polo O, quei punti riescono animati da *moto armonico*; infatti, allora l'accelerazione che sollecita ciascuno di essi, P per es., è proporzionale alla sua distanza AP dal polo dei flessi A (§ 18).

Sia M un punto interno (od esterno) all'epiciclo; U, V gli estremi del diametro di questo che passa per M. I punti U, V si muovono nelle rette AU, AV tra loro perpendicolari; se denotiamo con x, y le coordinate del punto M riferito a queste rette come assi, con φ l'angolo variabile che la retta UV forma coll'asse delle ascisse (trajettoria del punto V), abbiamo:

$$x = MU.\cos\varphi \quad , \quad y = MV.\operatorname{sen}\varphi \; ;$$

ed eliminando l'angolo ausiliario φ:

$$\frac{x^2}{\overline{MU}^2}+\frac{y^2}{\overline{MV}^2}=1 .$$

Da ciò il complemento del precedente enunciato: *i punti interni (od esterni) all'epiciclo descrivono ellissi concentriche, di ciascuna delle quali la somma (o differenza) dei semiassi è eguale al diametro dell'epiciclo.*

Conduciamo MO normale alla trajettoria del punto M, che sega l'epiciclo (cerchio dei flessi) nel punto K. Sussistono le relazioni (§ 18): $v=\omega . MO$, $w_n=\omega^2 . MK$; da cui s'ottiene il valore del raggio di curvatura $\rho=MM^*$ di quella trajettoria: $\rho=\frac{\overline{MO}^2}{MK}$, che può costruirsi assai facilmente.

Riesce anche agevole di trovare la curva inviluppata dal diametro UV. Sia S (figura 6) il piede della perpendicolare abbassata dal polo O sopra UV, S^* il punto dove la perpendicolare medesima interseca il cerchio delle cuspidi; il punto S appartiene allo inviluppo richiesto e S^* ne è il corrispondente centro di curvatura.

Dal triangolo OUV si ricava: $\overline{OV}^2=UV\times SV$; abbiamo poi la proporzione: $\frac{SV}{UV}=\frac{SH}{OV}$. Per ciò notando con x, y le coordinate di S, si ricava: $\overline{OV}^3=R^{*2}y$. Parimente s'ottiene: $\overline{OU}^3=R^{*2}x$; quindi, il luogo di S risulta:

$$\left(\frac{x}{R^*}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{R^*}\right)^{\frac{2}{3}}=1 ,$$

che è una curva a quattro foglie identica alla podaria della ipocicloide a quattro cuspidi generata da un epiciclo che si sviluppa nel deferente di raggio quadruplo. Per dimostrarlo chiamiamo E il centro di questo secondo epiciclo, C il centro del primo. Abbiamo: *ang.* $OES=2 .$ *ang.* $OCV=4 .$*ang.* OAV; onde l'arco OS descritto con raggio $\frac{R^*}{4}$, eguaglia l'arco OV' descritto con raggio R^*.

§ 21.

Veniamo a considerare in secondo luogo il movimento dell'angolo PAQ (fig. 7) rispetto alla retta PQ, vale a dire assumiamo per epiciclo il cerchio di Cardano maggiore e per deferente quello minore.

Uniamo il punto descrivente M con A, e prolunghiamo la congiungente ad incontrare in W il cerchio minore (deferente). Il centro A dell'epiciclo descrive ora il cerchio deferente. V'è di più: siccome nello sviluppo del cerchio minore nell'interno del maggiore, il punto W descriveva la retta WA, così, nel moto inverso, quest'ultima passa costantemente per W. La retta AW si muove, quindi, sotto una duplice condizione: mentre il punto A percorre il cerchio deferente, essa passa sempre pel punto W fisso in questo cerchio.

Per conseguenza, il punto M genera una *quartica*, o meglio una *lumaca di Pascal* (concoide di cerchio), che ha il deferente per cerchio direttore e W per origine o punto doppio. Le tangenti alla curva in questo punto sono reali e distinte, reali e

coincidenti, o immaginarie, secondo che M è interno, nella periferia o esterno all'epiciclo. Epperò l'origine W è un punto doppio propriamente detto, una cuspide (e la curva si chiama allora *cardioide*), o un punto isolato (punto doppio con tangenti immaginarie conjugate).

Il polo de' flessi I (centro d'accelerazione) si sposta in una circonferenza concentrica al deferente; con quest'ultima si confonde il cerchio delle cuspidi. L'accelerazione w che sollecita il punto M (nell'ipotesi di una rotazione uniforme ω), e il raggio di curvatura $\rho = MM^*$ della corrispondente trajettoria hanno per grandezze: $w = \omega^2 IM$, $\rho = \frac{\overline{MO}^2}{\overline{MK}}$.

Nel caso particolare della cardioide, quando M giace nella periferia dell'epiciclo, se congiungiamo M col centro C^* del deferente, risulta: $IM = 2 . C^*M$, $OK = \frac{1}{2} OM$; e, quindi si hanno relazioni: $w = 2\omega^2 . C^*M$, $\rho = \frac{2}{3} . MO$, le quali possono tradursi in enunciati altrettanto semplici quanto interessanti.

§ 22.

Le *cubiche circolari* sono espresse in coordinate Cartesiane rettangolari dall'equazione:

$$(x^2 + y^2)(x - a) + bx^2 = 0 \ ;$$

e in coordinate polari da:

$$r = a . \sec\theta - b \cos\theta \ ;$$

essendo a la distanza dell'assintoto dal punto singolare (origine delle coordinate) e b il diametro del cerchio direttore della cubica; l'assintoto è perpendicolare all'asse delle ascisse (asse di simmetria della curva).

La forma della cubica dipende dalle grandezze dei parametri a, b. Per $b < a$, abbiamo la *pericissoide*; per $b = a$, la *cissoide*, e per $b > a$ la *ipocissoide*. Il punto singolare è ordinatamente: punto isolato, cuspide, o punto nodale.

Nella trasformazione di Thomson le coordinate della curva primitiva e quelle della curva inversa (per raggi vettori rèciproci) sono legate dalle relazioni:

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{a^2}{\xi^2 + \eta^2} \ ,$$

dove a^2 denota il rapporto d'inversioni. Ne consegue che ogni cubica circolare ha per curva inversa la conica:

$$a(\xi^2 + \eta^2) - b\xi^2 - a\xi = 0 \ ,$$

con un vertice nel punto singolare della curva, il quale è al tempo stesso origine d'inversione. In particolare: la pericissoide è l'inversa dell'ellisse; la cissoide della parabola, e l'ipocissoide dell'iperbole.

È notevole il caso in cui $b = -a$. La pericissoide che vi appartiene ha lo stesso assintoto e un'identica genesi della cissoide, e per ciò prende il nome di *conjugata della cissoide*.

Un altro caso ancora più interessante s'ottiene quando $b=2a$. Per questo valore di b l'equazione generale doventa, dopo aver cambiato x in $-x$:

$$x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2)=0 \ ,$$

che rappresenta la *logociclica* (o *strofoide*). Questa curva dobbiamo, quindi, considerarla come una particolarità della ipocissoide.

Il parametro a denota le distanze eguali che separano il vertice e l'assintoto dal punto doppio della curva. La corrispondente equazione polare si presenta come segue:

$$r=a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} \ .$$

Nella trasformazione per raggi vettori reciproci, se assumiamo per polo d'inversione il punto doppio, la logociclica appare l'inversa di un'iperbole; se prendiamo, invece, per polo il vertice, allora essa riesce reciproca di sè medesima. Considerata sotto quest'ultimo aspetto, la logociclica appartiene alla classe delle *anallagmatiche.*

Ciò premesso, sia dato l'angolo retto PAQ (fig. 8) mobile nel piano in modo che un lato passi costantemente pel centro fisso P, e il punto Q dell'altro lato scorra in un asse verticale, la cui distanza dal centro P sia eguale alla lunghezza AQ; ogni punto M del lato AQ genera una *cubica circolare.*

Conduciamo, infatti, per il punto M la trasversale M_0N parallela alla congiungente PQ, che sega in M_0 e N le orizzontali de' punti P e Q. I triangoli rettangoli APQ, BPQ sono eguali, e per ciò il triangolo MNQ è isoscele.

Se poniamo: $AQ=BP=a, MQ=NQ=\frac{1}{2}b, M_0M=r, ang.\ BM_0M=\theta$, si trova assai facilmente col sussidio della figura:

$$r=a.\sec\theta-b.\cos\theta \ .$$

Il punto M_0 è punto singolare della cubica.

Il vertice A dell'angolo, il punto medio D del lato AQ ed il punto E preso nel prolungamento di questo lato, così che $EQ=-DQ$, descrivono ordinatamente *una logociclica, una cissoide* e la *conjugata di una cissoide.* Ogni altro punto M genera, invece, *una pericissoide* o *una ipocissoide*, secondo che esso cade da una parte o dall'altra di D.

Dai punti P, Q inalziamo le perpendicolari rispettive sulle rette AP, BQ (fig. 8), e prolunghiamole al loro punto d'incontro O (centro istantaneo di rotazione). Il triangolo OPQ essendo isoscele, il centro O riesce equidistante dal punto P e dalla retta BQ; quindi, *la polodia deferente è la parabola avente P per fuoco e BQ per direttrice.*

Oltre all'angolo retto PAQ in movimento, sussiste l'angolo retto PBQ fisso nel piano. Invertiamo la disposizione col tener fermo PAQ e col muovere PBQ: il lato BQ di quest'angolo gira allora intorno al centro fisso Q, mentre il punto P dell'altro lato scorre nella retta AP la cui distanza da Q eguaglia BP. La relativa polodia deferente è la parabola che ha Q come fuoco e AP come direttrice; essa si converte nella *polodia epiciclo* per il movimento considerato dapprima.

Le polodie che definiscono il moto dell'angolo PAQ sono, dunque, *parabole con-*

gruenti: la direttrice della parabola epiciclo passa costantemente pel fuoco della parabola deferente; nella direttrice di questa scorre il fuoco di quella.

Il polo dei flessi I percorre la retta BQ trajettoria del punto Q, che appartiene al cerchio dei flessi; similmente il polo delle cuspidi I^* percorre la retta AP che gira intorno al centro P, il quale è contenuto nel cerchio delle cuspidi.

Alla cubica descritta dal punto M conduciamo la normale OM che sega in K il cerchio dei flessi; tiriamo la congiungente IM. L'accelerazione w del punto M, e il raggio di curvatura ρ della cubica sono espressi dalle relazioni: $w = \omega^2 IM$, $\rho = \frac{\overline{MO}^2}{MK}$.

Non è difficile tradurre quest'espressioni in termini de' parametri a, b, ma le formole che ne scaturiscono appajono molto complesse e per ciò perdono ogni importanza.

§ 23.

Le *podarie di una conica* sono in generale delle curve razionali cicliche: del 4° ordine, se la conica ha centro; del 3° ordine, se la conica è priva di centro.

Così: se il polo coincide col centro della conica, esso è punto conjugato (per l'ellisse) della rispettiva *quartica podaria*, ovvero punto doppio (per l'iperbole) con tangenti reali e distinte (normali agli assintoti dell'iperbole).

Se il polo è un fuoco (dell'ellisse o dell'iperbole) la podaria si scinde nel cerchio direttore della conica e nel sistema di rette immaginarie che congiungono il polo con i punti ciclici (all'infinito) del piano.

Nello stesso modo (per la parabola): la *cubica podaria* relativa al fuoco si risolve nella tangente al vertice della parabola e in quel sistema di rette immaginarie.

Le podarie s'incontrano come trajettorie de' punti di una figura piana mobile nel suo piano, quando le corrispondenti polodie sono *curve congruenti*.

Allora quest'ultime curve si presentano l'una imagine dell'altra per simetria rispetto alla loro comune tangente τ; qualsivoglia punto M ha il suo simetrico M_0, il quale riesce in relazione di posizione col deferente come lo è M in confronto dell'epiciclo; epperò il punto M (mobile) nel descrivere la sua trajettoria (m) ha sempre per simetrico (rispetto alla retta variabile τ) il medesimo punto M_0 (fisso nel piano).

Ciò posto, assunto per polo M_0 (fig. 9) si costruisca *la podaria* (n) del deferente; la normale nel punto N alla linea (n) contiene il punto medio N_0 della retta OM, ed è quindi parallela alla normale OM della trajettoria (m); i centri di curvatura M^*, N^* si trovano allineati con M_0, ed i corrispondenti raggi MM^*, NN^* stanno fra loro come 2:1. Donde segue che le curve (m), (n) *sono omotetiche; M_0 è il centro di omotetia.*

Quando le polodie che caratterizzano il movimento sono *coniche congruenti*, ciascuna trajettoria (m) riesce *podaria di una conica* (omotetica al deferente), e, se vuolsi, anche *inversa* (per raggi vettori reciproci) *di un'altra conica*. Il punto M_0 che le corrisponde è simultaneamente polo d'inversione e suo punto singolare.

Un caso particolare interessante è illustrato nelle fig. 10ª e 11ª. Gli estremi della retta PQ girano intorno ai centri fissi P^*, Q^* descrivendo cerchi di raggi eguali $PP^* = QQ^*$; la distanza de' centri è eguale alla lunghezza della retta, $PQ = P^*Q^*$; le rotazioni succedono in guisa che il quadrilatero PP^*QQ^* risulti continuamente in forma di *antiparallelogrammo*. Se $PQ < PP^*$ (fig. 10) le rotazioni avvengono nello stesso senso; i

raggi PP^*, QQ^* si segano nel polo istantaneo O, e $OP+OQ=OP^*+OQ^*=PP^*$. Se $PQ>PP^*$ (fig. 11) le rotazioni avvengono in senso contrario; il polo O è punto d'incontro de' prolungamenti di quei raggi, e $OP-OQ=OQ^*-OP^*=PP^*$.

Per conseguenza, le polodie sono *ellissi (od iperboli) congruenti*, coi fuochi nei punti P, Q e P^*, Q^* e gli assi focali di grandezza $PP^*=QQ^*$.

La *quartica* (m) percorsa da ogni punto M situato nella retta PQ o nel suo prolungamento, ha il punto singolare in M_0 dove la parallela condotta da M alla congiungente P^*Q interseca la linea dei centri.

Se indichiamo con θ e φ gli angoli che M_0M, P^*P formano con questa linea e se poniamo: $PP^*=QQ^*=a$, $PQ=P^*Q^*=b$, $PM=m$, $M_0M=r$; allora dall'esame del circuito chiuso PMM_0P^*P si ricavano le relazioni:

$$(b-2m)\cos\theta+a.\cos(\theta-\varphi)=r \quad , \quad b\,\mathrm{sen}\,\theta-a.\mathrm{sen}(\theta-\varphi)=0 \;;$$

fra le quali eliminando l'angolo ausiliario φ s'ottiene:

$$r^2-2(b-2m)\cos\theta.r-4m(b-m)\cos^2\theta-a^2+b^2=0 \;,$$

che è l'equazione della podaria di una conica (omotetica al deferente) col polo nel punto M_0.

I punti P, Q in particolare descrivono delle circonferenze: ciò concorda col fatto che per l'ellisse (e per l'iperbole) la podaria relativa ad un fuoco si risolve in un cerchio e nel sistema di due rette immaginarie.

Facendo $m=\frac{1}{2}b$, l'equazione precedente si cambia nella più semplice:

$$r^2=a^2-b^2\mathrm{sen}^2\theta \;,$$

che rappresenta il luogo percorso dal punto medio della retta PQ. Se PP^*, QQ^* sono eguali ai lati e PQ, P^*Q^* alle diagonali di un quadrato, abbiamo $a^2=\frac{1}{2}b^2$; quel luogo riesce allora *la lemniscata*:

$$r^2=a^2\cos 2\theta \;.$$

Aggiungiamo come conclusione: se si avvicinano le su espresse deduzioni a quelle del § 22, dove si realizzarono *parabole congruenti* per polodie del movimento, si vedrà che esse si completano a vicenda nel riflettere la genesi di una medesima famiglia di curve.

§ 24.

Una considerazione superficiale potrebbe far credere che la congruenza delle polodie sia condizione necessaria affinchè le curve trajettorie riescano podarie di coniche. Ma l'illusione svanisce col por mente alla soluzione del problema seguente:

Gli estremi P, Q della retta PQ (fig. 12) descrivono dei cerchi di centri P^*, Q^*; il raggio di un cerchio è eguale alla distanza dei centri, $PP^*=P^*Q^*=a$; il raggio dell'altro alla lunghezza della retta, $PQ=QQ^*=b$. Supposto $a<b$, il quadrilatero PP^*QQ^*

ha costantemente la forma di un *romboide.* Il polo istantaneo di rotazione O, è il punto dove s' incontrano i raggi PP^*, QQ^* sufficientemente prolungati.

Indichiamo con ε, θ gli angoli variabili che questi raggi formano rispettivamente con la linea de' centri P^*Q^*; poniamo inoltre $OQ^*=\zeta$. I triangoli P^*QQ^*, OPQ somministrano:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{b.\operatorname{sen}\theta}{a+b.\cos\theta}\quad,\quad b.\operatorname{sen}\theta=(\zeta+b)\operatorname{sen}(\varepsilon-\theta)\ .$$

Applicando note formole di goniometria, abbiamo dalla prima delle precedenti relazioni:

$$\operatorname{sen}(\varepsilon-\theta)=\frac{(b^2-a^2)\operatorname{sen}\theta}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}\ ;$$

e sostituendo nella seconda questo valore di $\operatorname{sen}(\varepsilon-\theta)$, dopo alcune semplici trasformazioni s'ottiene:

$$\zeta=\frac{2ab}{b^2-a^2}(a+b\cos\theta)\ ,$$

la quale è l'equazione della *polodia deferente.* In maniera analoga otteniamo l'equazione della polodia epiciclo, riferita al punto P come polo e alla retta PQ come asse polare:

$$\xi=\frac{2ab}{b^2-a^2}(b+a\cos\theta)\ .$$

Le due polodie sono dunque *lumache di Pascal*: esse riescono simetriche alle rette P^*Q^*, PQ, sono l'una interna all'altra, e le periferie loro stanno nel rapporto 1:2.

Quest'ultima conclusione si pone tosto in evidenza coll'osservare: 1° che le polodie de' moti relativi de' raggi PP^*, QQ^* sono perfettamente identiche a quelle de' moti relativi di PQ, P^*Q^*; 2° che ad ogni giro del raggio PP^* corrisponde mezzo giro dell'altro raggio QQ^*.

Passiamo ora ad assegnare la trajettoria di un punto qualunque M situato nella retta PQ e nel suo prolungamento. Deformandosi il romboide P^*PQQ^* (fig. 12) la diagonale PQ^* è tagliata ad angolo retto dall'altra diagonale P^*Q sempre nel suo punto medio. D'altra parte, la parallela MN alla PQ^* interseca il lato QQ^* nel punto N che è invariabile su questo lato, e che nella deformazione del romboide descrive un cerchio col centro in Q^*.

Similmente, le parallele MM_0, NN_0 alla seconda diagonale P^*Q incontrano la linea dei centri P^*Q^* ne' punti M_0, N_0 equidistanti da P^* e che sono sempre i medesimi.

Ciò premesso, l'angolo retto MNN_0 il cui vertice scorre in una circonferenza, ha il lato NN_0 che passa per un punto fisso N_0; l'altro lato MN *inviluppa, quindi, una conica dotata di centro.* Il punto M, piede della perpendicolare condotta dal punto M_0 sopra la retta MN, appartiene *alla podaria di questa conica* relativa allo stesso punto fisso M_0.

§ 25.

Ma il caso precedentemente esaminato e pochissimi altri ancora, si annoverano come delle vere eccezioni. Quando, infatti, le curve polodie non sono congruenti, la determinazione delle trajettorie si presenta in generale arida e complessa; il più delle volte bisogna rinunziare ad ogni indagine che si estenda al di là della costruzione per punti e per tangenti delle trajettorie medesime. La complicazione talvolta si manifesta anche ne' problemi i cui enunciati hanno forma elementare. Trattiamo la soluzione di uno di questi problemi, che per semplicità ed eleganza offre assai interesse.

Una retta PQ (fig. 13) ruota intorno alla sua estremità P nel senso positivo, con moto uniforme (di velocità angolare ω), mentre il punto P percorre un asse verticale con moto uniformemente accelerato (di accelerazione a).

I due movimenti simultanei (rotazione e traslazione) della retta PQ, si compongono in ciascun istante nella rotazione unica intorno al centro istantaneo O; i punti O e P si trovano continuamente in una orizzontale alla distanza $OP = \frac{u}{\omega}$, dove $u = at$ denota la velocità di traslazione alla fine del tempo t.

La posizione del centro O riesce determinata dalle corrispondenti coordinate rettangolari:

$$x = \frac{1}{2} at^2 \quad , \quad y = \frac{a}{\omega} t \ ;$$

essendo l'origine delle coordinate in P_0 (posizione iniziale del punto P) e l'asse delle ascisse nella direzione verticale. Eliminando la variabile t s'ottiene l'equazione:

$$y^2 = 2 \frac{a}{\omega^2} \cdot x \ .$$

La *polodia deferente* (luogo de' punti analoghi ad O) è, dunque, *la parabola di 2° ordine* ad asse verticale col vertice in P_0 e la cui sottonormale è $= \frac{a}{\omega^2}$.

D'altra parte, la *polodia epiciclo* gira colla velocità uniforme ω (insieme alla retta PQ) intorno al punto P, che scorre verticalmente. Riferendola a questo punto come polo, osserviamo che la sua sottonormale (misurata nella perpendicolare condotta per P ad ogni suo raggio vettore) deve, per la continuità del moto, riuscire sempre eguale alla sottonormale *costante* della parabola deferente. Per conseguenza, essa è *la spirale d'Archimede* avente il polo in P e la sottonormale di grandezza $\frac{a}{\omega^2}$.

Nel moto inverso le due polodie rimangono le stesse, ma si scambiano i loro caratteri, cioè: la parabola diviene epiciclo, e la spirale deferente.

Nel moto diretto, il polo dei flessi scorre nella verticale condotta per P_0, e si mantiene a distanza costante dal punto P, che è contenuto nel cerchio dei flessi; nel moto inverso, il polo delle cuspidi percorre la retta mobile che gira intorno al centro fisso P_0, il quale appartiene al cerchio delle cuspidi.

Le due trajettorie descritte da ciascun punto M della retta PQ nel doppio movimento (diretto e inverso), si possono delineare per punti e ne' singoli punti si possono

individuare i rispettivi centri di curvatura. Le equazioni di queste curve hanno forma trascendente abbastanza complessa; tralasciamo per ciò di indicarle, non prestando esse verun servigio per i metodi speculativi della cinematica e della teoria de' meccanismi.

Vogliamo piuttosto accennare alla soluzione del problema più generale riflettente la composizione della rotazione uniforme ω colla traslazione $x = \frac{1}{2} a t^n$. Una trattazione identica a quella suesposta conduce a stabilire come polodie che definiscono il moto risultante:

la parabola (di n^{mo}-*ordine*): $y^n = \frac{1}{2} n^n \frac{a}{\omega^n} x^{n-1}$, e la spirale $r = \frac{1}{2} n \frac{a}{\omega^n} \theta^{n-1}$.

Quando $n = 1$, la traslazione è uniforme al pari della rotazione: la parabola degenera nella retta $y = \frac{1}{2} \frac{a}{\omega}$, e la spirale nel cerchio di raggio $r = \frac{1}{2} \frac{a}{\omega}$.

Quando $n = 2$, la traslazione è uniformemente accelerata: abbiamo allora il caso particolare contemplato separatamente della parabola di 2° ordine, combinata colla spirale d'Archimede.

Quando $n = 3$, s' ottengono una parabola cubica e una spirale i cui raggi vettori crescono come i quadrati dell'angolo polare; e così di seguito.

finita di stampare il dì 28 Dicembre 1898

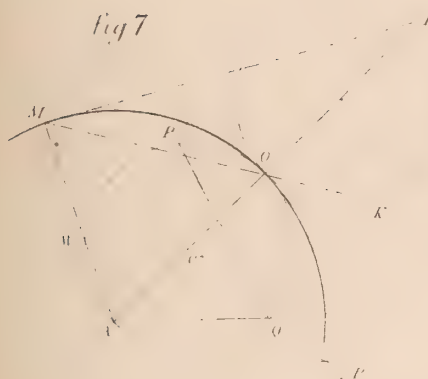



fig 1
fig 2
fig 3
fig 4
fig. 5
fig. 6
fig 7
fig. 8
fig 9
fig 10
fig 11
fig 12
fig 13

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

LA ITTIOFAUNA
DEL CALCARE EOCENICO DI GÀSSINO IN PIEMONTE

MEMORIA

di FRANCESCO BASSANI

presentata nell'adunanza del dì 10 Dicembre 1898

Nella serie terziaria delle colline torinesi un argomento ancora controverso riguarda l'età del calcare di Gassino. E poichè detto calcare e le marne che l'accompagnano hanno fornito, tra gli altri fossili, un gran numero di resti di pesci, ho pensato che sarebbe stato opportuno di esaminarli, per vedere se era possibile trarne qualche risultato cronologico. A questo scopo mi sono rivolto al cav. Luigi di Rovasenda, che da più di trent'anni raccoglie i fossili di quella regione, pregandolo di comunicarmi gli avanzi d'ittioliti. Egli ebbe la cortesia di accondiscendere al mio desiderio e mi mandò il copiosissimo materiale conservato nella sua collezione. Altrettanto si piacquero fare, in seguito alla mia domanda, i professori Carlo Fabrizio Parona e Alessandro Portis, che m'inviarono gli esemplari dei Musei geologici universitarii di Torino e di Roma, e il signor Ernesto Forma, che mi spedì quelli raccolti da lui.

Ringrazio cordialmente i predetti signori, aggiungendo i sentimenti della mia speciale riconoscenza al cav. di Rovasenda, il quale mi ospitò nella sua villa di Sciolze, dove ho potuto ammirare la preziosa collezione paleontologica ch'egli ha fatta con grandissima cura e che racchiude tanti tesori.

La formazione indicata generalmente col nome complessivo di *Calcare di Gassino* si stende a destra e a sinistra della valle del Rio Maggiore, spingendosi da un lato nel territorio di Bussolino e dall'altro nella valle di Bardassano, dove sono le cave di Gassino propriamente dette.

Essa rappresenta una stretta anticlinale, diretta da N-E a S-O, che ha gli strati della gamba settentrionale quasi verticali e quelli della meridionale assai meno inclinati (circa 40°).

Ricoperta da banchi potenti di conglomerato a svariati elementi, fortemente cementati, e da sabbie a *Nummulites Fichteli* Michtti, *N. Boucheri* de la H., *N. intermedia* d'Arch. ecc., si continua in basso coi seguenti depositi:

a) Marne grigie, con filliti, carpoliti, *Aturia rovasendiana* Par. [non *At. Aturi* Bast.], *Nautilus* cfr. *decipiens* Michtti [non *N. decipiens* id.], *Orbitoides papyracea* Boub., *Orb. aspera* Gümb., ecc.; ed arenarie più o meno sabbiose, con filliti, carpoliti, numerosi brachiopodi (*Terebratula*, *Rhynchonella*), *Oxyrhina Desori* Ag. [non *Ox. hastalis* id.], ecc. Tanto le arenarie quanto le marne poggiano sul calcare alla lett. *b*: quelle, per lunghissimi tratti; queste, per brevi, saltuariamente.

b) Calcare a *Lithothamnium*, biancastro o grigio, spesso quasi brecciato (Calcare di Gassino), localmente detto dei *Bertot*, dal nome dei proprietarii della cava omonima — con intercalazione di marne e di arenarie corrispondenti, litologicamente e paleontologicamente, a quelle della lett. *a* — a *Calcarina tetraedra* Gümb., *Nummulites complanata* Lmk., *N. Tchihatcheffi* d'A. et H. (Parona), *N. striata* d'Orb., *Orbitoides papyracea* Boub., *O. aspera* Gümb., *O. stella* Gümb., *O. stellata* d'Arch., *Echinolampas Beaumonti* Ag., *Pentacrinus didactylus* d'Orb., ecc., e copiosi avanzi di pesci (*Carcharodon auriculatus* Blainv. sp. [non *Carch. megalodon* Ag.], *Odontaspis elegans* Ag. sp. [non *Lamna raphiodon* Ag., nè *Od. contortidens* id.], *Od. verticalis* Ag., *Od. Hopei* Ag. [non *Lamna longidens* id., nè *L. cuspidata* id.], *Oxyrhina Desori* Ag. [non *Ox. hastalis* id.], *Squatina prima* Winkler sp., *Notidanus primigenius* Ag., *Not. serratissimus* Ag., *Coelorhynchus rectus* Ag. [=*Ichthyodorulites Giannoni* di Rov.], *Pycnodus Koenigi* Ag. sp., *Chrysophrys* sp., ecc.— Questo calcare affiora non solo alla sinistra della valle del Rio Maggiore, nel territorio di Bardassano, dove risulta costituito da sette banchi intercalati dalle marne e dove sono le cave di Gassino propriamente dette (Cave *Giannone*, *Chiesa*, *Aprile*, *Mela* [ora *Vaudetti*], *Canta*, ecc.), ma anche alla destra di detta valle, dal lato di Bussolino, dove appunto prende il nome locale di calcare *Bertot* e dove non è più coltivato.

c) Marne turchinicce con abbondanti *Lithothamnium*, concrezioni calcari, ecc., e marne grigie.

d) Calcare a *Lithothamnium* del *Caviggione* (chiamato così dal nome della regione in cui si trova nel territorio di Bussolino), talvolta cavernoso e quasi lentiforme — con intercalazione di marne sabbiose grigiastre, che, dal lato di Bussolino, si mostrano rossicce alla base del sedimento in discorso — a *Nummulites complanata* Lmk., *N. striata* d'Orb., *N. Tchihatcheffi* d'A. et H., *N. variolaria* Sow., *Orbitoides papyracea* Boub., *O. aspera* Gümb., *O. stella* Gümb., *O. stellata* d'Arch., *Calcarina tetraedra* Gümb., *Serpula spirulaea* Lmk., *Odontaspis elegans* Ag., *Od. Hopei* Ag., *Oxyrhina Desori* Ag., *Galeocerdo latidens* Ag., *Chrysophrys* sp. — Questo calcare affiora non solo dalla parte di Bussolino, ma anche da quella di Bardassano (alla sinistra della valle del Rio Maggiore), poco sotto la zona calcarifera del vero Gassino.

e) Arenaria calcarea, ricca di Nummuliti, Orbitoidi, ecc.

f) Calcare a *Lithothamnium* di *Villa De Filippi* — intercalato da marne sabbiose ad *Aturia rovasendiana* Par. — con *Odontaspis Hopei* Ag., *Oxyrhina Desori* Ag., *Carcharodon auriculatus* Blainv. sp. e con le specie di *Serpula*, di *Orbitoides* e di *Nummulites* citate nel deposito alla lettera *d*; alle quali ultime si aggiungono *Numm. perforata* d'Orb. (dubbiosa nel calcare del *Caviggione*), *N. lucasana* Defr. e *N. Rouaulti* d'A. et H. — Questo calcare comparisce soltanto nelle colline di Bussolino.

Intorno alla suesposta formazione — la quale, per quanto si è detto, consta essenzialmente di marne, talora alternate con strati o banchi arenacei ed inglobanti lenti o banchi calcarei — scrissero, da sessant'anni a questa parte, numerosi scienziati: Collegno, Pareto, Sismonda, Murchison, Gastaldi, Michelotti, Costa, Seguenza, Fuchs, Mayer, Tellini, Portis, Sacco, Trabucco, di Rovasenda

e Schaffer [1]). Naturalmente, io non rifarò la storia del dibattuto affioramento gassinese, che è già stata riassunta, in parte o per intero, dai cinque ultimi geologi ora citati e specialmente dal professore Trabucco. Rammenterò soltanto che, riferito dapprima al *Supracretaceo* o *Nummulitico*, venne collocato più tardi nel miocene inferiore (od oligocene) e da taluno anche nel miocene medio; finchè il prof. Portis, nel 1886 [2]), in seguito alle scoperte paleontologiche fatte da Tellini nelle cave di Bussolino [3]), lo ascrisse al *Bartoniano* inferiore (orizzonte di Priabona). Il Sacco [4]) concordò in tale opinione, pur divisa da Rosavenda, e, poichè le ricerche fatte da quest'ultimo naturalista nel '90 e nel '91 avevano mostrato che alla base della serie (Calcare di *Villa De Filippi*) esistono banchi con nummuliti a facies *parisiana*, ammise che, mentre l'affioramento di Gassino è per la massima parte *bartoniano*, esso passa gradualissimamente, nella zona inferiore, al *Parisiano*, così come passa a poco per volta, in alto, al *Tongriano* a *Numm. Fichteli*, *N. intermedia*, ecc. Trabucco, invece, sostenne [5]) che solamente gli strati marno-calcarei di Bussolino *(Caviggione e De Filippi)* appartengono all'eocene e sono interamente *parisiani*, equivalendo al calcare inferiore della Mortola ed al calcare di S. Giovanni Ilarione; mentre gli strati marno-calcarei di Gassino devono essere ascritti all'oligocene *(Tongriano)* e corrispondono al *Bormidiano* caratteristico del bacino piemontese [6]), al calcare di Castelgomberto e alle marne di Laverda.

In fondo, dunque, il nodo della questione è il seguente:

Dei tre membri calcariferi che costituiscono l'affioramento gassinese, il superiore, ossia il calcare *Bertot*, cioè il vero *Calcare di Gassino*, con le marne che lo inglobano e che gli sono interposte (lett. *a, b, c* della serie indicata alla pag. 2), è assegnato da alcuni [Portis, Tellini, Sacco e di Rovasenda] all'eocene *(Bartoniano)*; mentre viene riferito da altri [Fuchs, Mayer e Trabucco] all'oligocene *(Tongriano)* [7]).

---

[1]) F. Schaffer, *Beiträge zur Parallelisirung der Miocänbildungen des piemontesischen Tertiärs mit denen des Wiener Beckens* (Jahrb. d. Wien. geol. Reichsanstalt, vol. XLVIII, fasc. III, pag. 390). In questa Nota, uscita da poco, l'autore accenna per incidenza anche al calcare di Gassino tipico, dandone un profilo schematico, in cui detto calcare, con le marne che lo inglobano, è assegnato al *Bartoniano*.

[2]) A. Portis, *Sulla vera posizione del calcare di Gassino nella collina di Torino* (Boll. Com. geol. d'Italia, vol. XVII, 1886).

[3]) A. Tellini, *Le Nummulitidee terziarie dell'alta Italia occidentale* (Boll. Soc. geol. it., vol. VII, 1888).

[4]) F. Sacco, *Carta geol. dei colli torinesi*, 1887. — *Il bacino terziario del Piemonte*, 1889.— *Le ligurien* (Bull. Soc. géol. Fr., 3ᵉ série, tom. XVII) 1889. — *L'âge des format. ophiolitiques récentes* (Bull. Soc. belge de géol., de pal. et d'hydr., t. V) 1891. — *Le trias dans l'Apennin de l'Émilie* (Bull. Soc. belge ecc., t. VI) 1892.— *L'Apennino dell'Emilia* (Boll. Soc. geol. it., vol. XI) 1892.— *Relazione della escursione geol. eseguita il 21 sett. [1893] attraverso i colli terziarii di Torino* (Boll. Soc. geol. it., vol. XII) 1893.

[5]) G. Trabucco, *Sulla vera posiz. dei terreni terz. del Piemonte*. Nota prelim. (Proc. verb. Soc. tosc. sc. nat. [ad.ª 5 Febbr. '93]) 1893. — *Sulla vera posiz. dei terr. terz. del bacino piemontese*. Parte I (Mem. Soc. tosc. sc. nat., vol. XIII) 1893. — *Sulla vera età del calcare di Gassino* (Boll. Soc. geol. it., vol. XIII) 1895.

[6]) Come ha già detto il prof. Trabucco, questa corrispondenza si accorda con le idee espresse fin dal 1855 da Pareto (*Bull. Soc. géol. Fr.*, 2ᵉ sér., tom. XII, pag. 370).

[7]) Fuchs (*Sitzsb. d. Ak. d. Wiss. zu Wien*, vol. LXXVII, parte I, 1878) lo ascrive al *Tongriano* superiore, ritenendolo più giovane del calcare di Castelgomberto e da considerarsi appena come qual-

Com'è noto, le opinioni di Fuchs e di Mayer vennero largamente esaminate da Portis, nella citata Memoria dell'86.

Quanto al prof. Trabucco, egli, che studiò con molta cura il problema, addusse a sostegno della sua tesi argomenti litologici, stratigrafici e paleontologici. Per ciò che riguarda gli argomenti delle due prime categorie, mi sembra inutile parlarne, sia perchè altri già ne discorse (*Boll. Soc. geol. it.*, vol. XII, 1893, p. 538-539), sia perchè essi, come naturalmente ha detto lo stesso Trabucco, hanno un'importanza assai limitata, nè servono in alcun modo a rischiarare la questione. Restano i dati paleontologici, con l'aiuto dei quali il collega Trabucco giunse alla conclusione esposta dianzi, sostenendo che i fossili degli strati marno-calcarei di Gassino (zona superiore) escludono il riferimento di detti strati all'eocene e ne provano indubbiamente l'età *tongriana*.

Vediamo ora i risultati del mio studio sulla ittiofauna gassinese [1]), della quale premetterò un cenno storico.

Le prime ricerche sui pesci fossili di Gassino furono pubblicate nel 1846 da Eugenio Sismonda [2]), che vi enumerò, descrivendole e figurandole, le specie seguenti:

Carcharodon angustidens Ag.
Carcharodon crassidens sp. n.
Carcharodon megalodon Ag.
Carcharodon productus Ag.
Lamna (Odontaspis) contortidens Ag.
Lamna (Od.) dubia Ag.
Lamna undulata sp. n.
Otodus sulcatus sp. n.
Oxyrhina Desori Ag. [3])
Oxyrhina hastalis Ag.
Oxyrhina isocelica sp. n.
Oxyrhina minuta Ag.

Molti anni dopo, ne scrisse, in tre Note, Oronzio Gabriele Costa, citando, fra le specie già indicate da Sismonda, *Lamna undulata, Lamna (Od.) contortidens* [fig.], *Lamna (Od.) dubia, Oxyrhina* sp. ed aggiungendo:

Acipenserinus gen. n.
Acrodus Gastaldii sp. n.
Carcharodon lanceolatus Ag.
Lobodus pedemontanus gen. et sp. n.
Sphærodus sp. [4])

---

che cosa di diverso dagli Strati di Schio. — Mayer (*Classif. des terr. tertiaires* ecc., 1884), adottando quasi interamente l'opinione di Fuchs, lo colloca nel *Tongriano* superiore, in corrispondenza agli Strati di Schio ed al calcare di Acqui (Vedi A. Portis, *Loc. cit.*).

[1]) Oltre ai fossili avuti in comunicazione dai signori di Rovasenda, Parona, Portis e Forma, ho studiato anche quelli raccolti a Gassino nel '64 da O. G. Costa, che si conservano nel Museo geologico dell' Università di Napoli.

[2]) E. Sismonda, *Descrizione dei pesci e dei crostacei foss. nel Piemonte* (Questo lavoro, i cui estratti comparvero nel 1846, è inserito nel vol. X, ser. II delle Mem. della r. Acc. delle scienze di Torino, 1849).

[3]) Cit. anche da R. I. Murchison, *Memoria sulla struttura geol. delle Alpi, degli Apennini e dei Carpazi* ecc., 1848-49 (trad. it., 1850, p. 215).

[4]) O. G. Costa, *Una visita a Gassino — Lettera al cav. dott. Antonio Garbiglietti* (Boll.

Nel 1861 Michelotti vi nominò *Oxyrhina Desori* e *Carcharodon angustidens* [1]) e descrisse sommariamente

Phyllodus incertus sp. n. [2])

Nell'89 il prof. Portis illustrò particolareggiatamente quest' ultima specie, riferendola al gen. *Diodon* ed iscrivendola col nome di

Diodon Rovasendae sp. n.

insieme ad un'altra, che chiamò

Diodon meristodus sp. n. [3])

Quattro anni più tardi, il prof. Trabucco citò, figurandola,

Chrysophrys cincta Agass. sp. [4]),

e, finalmente, il cav. di Rovasenda [5]), in seguito all'esame del ricco materiale conservato nella sua collezione, diede l'elenco provvisorio degl' ittioliti di Gassino, « tutti raccolti nelle cave di Gassino propriamente dette », cioè nel *Bertot*, vale a dire nella zona calcarifera superiore. Questo elenco, oltre varie specie già citate da altri autori (*Acrodus Gastaldii* [6]), *Carcharodon productus*, *C. angustidens*, *Diodon incertus* [= *D. Rovasendae* Portis], *D. meristodus*, *Lamna contortidens*, *Oxyrhina Desori*, *Ox. isocelica*), comprende le seguenti:

Carcharodon heterodon Ag.
Carcharodon polygyrus Ag.
Lamna cuspidata Ag.
Lamna elegans Ag.
Lamna longidens Ag.
Lamna raphiodon Ag.
Notidanus primigenius Ag.
Notidanus sp. (a piccoli denti convessi e ricurvi)
Notidanus sp.
Otodus lanceolatus Ag.

---

dell'Assoc. naz. italiana di mutuo soccorso degli scienziati, letterati ed artisti, vol. II, dispensa VII. Napoli, 1864). — *Descrizione di alcuni fossili delle colline di Torino* (Annali dell'Acc. degli aspiranti naturalisti, III serie, vol. III [1863]. Napoli, 1864). — *Nuove osservazioni intorno ai fossili di Gassino ed illustrazione di alcune novelle specie*, Napoli 1866. — Nella prima e nella seconda Nota sono descritti e figurati *Acipenserinus* e *Acrodus*; nella terza (in cui l'*Acipenserinus* è indicato col nome di *Sturionidens*), *Lobodus*, *Sphærodus* e *Carcharodon*.

[1]) G. Michelotti, *Études sur le mioc. inf. de l'Italie sept.* (Mém. de la Soc. holl. des sciences, vol. XV, Haarlem 1861).

[2]) G. Michelotti, *Description de quelques nouveaux fossiles du terr. mioc. de la colline de Turin* (Revue et Mag. de zoologie. Paris, Août 1861). Questo *Phyllodus* venne riportato anche dal prof. Cocchi (*Monogr. dei Pharyngodopilidae, nuova famiglia di pesci labroidi.* Firenze, 1864, in Ann. r. Museo fis. e st. nat., vol. I [1866]).

[3]) A. Portis, *Di alcuni gimnodonti fossili italiani* (Bollett. r. Comit. geol. d'It., vol. XX, 1889).

[4]) G. Trabucco, *Sulla vera pos. terr. terz. bac. piem.* (Loc. cit.).

[5]) L. di Rovasenda, *I fossili di Gassino* (Boll. Soc. geol. it., vol. XI, 1893).

[6]) È necessario notare che di Rovasenda citò, inavvertitamente, con questo nome denti non di *Acrodus Gastaldii* Costa, ma di *Lobodus pedemontanus* Costa.

Otodus obliquus Ag.
Oxyrhina crassidens Ag. [1])
Oxyrhina leptodon Ag.
Oxyrhina xiphodon Ag.
Ichthyodorulites Giannoni sp. n.
Denti di Sparoide [2]).

In seguito alle mie ricerche, l'ittiofauna di Gassino (zona superiore) è rappresentata dalle specie comprese nel seguente elenco alfabetico, in cui sono messi tra parentesi i nomi impiegati dai varî autori per indicare gli avanzi di pesci gassinesi:

Acanthias orpiensis Winkler sp.
Arius sp. (*Acipenserinus*, *Sturionidens*)
Carcharias [Aprionodon] frequens Dames
Carcharodon auriculatus Blainville sp. (*C. angustidens*, *C. auriculatus*, *C. crassidens*, *C. heterodon*, *C. lanceolatus*, *C. megalodon*, *C. polygyrus*, *C. productus*)
Carcharodon subserratus Agassiz
Cestracion sp. [Dente (? *Acrodus Gastaldii*) e ittiodoruliti]
Chrysophrys sp. (*Sphærodus*, *Chrysophrys cincta*, Denti di Sparoide)
Cimolichthys sp.
Coelorhynchus rectus Agassiz (*Ichthyodorulites Giannoni*)
Diodon incertus Michtti sp. (*Phyllodus incertus*, *Diodon incertus*, *D. Rovasendae*)
Diodon sp. (*D. meristodus*)
Lamna obliqua Agassiz sp. (*Otodus lanceolatus*, *Ot. obliquus*)
Lobodus pedemontanus Costa (*Acrodus Gastaldii* [di Rov. *(errore)*, *non* Costa], *L. pedemontanus*)
Notidanus primigenius Agassiz (*Not. primigenius*, *Not.* sp., a piccoli denti convessi e ricurvi)
Notidanus serratissimus Agassiz (*Not.* sp.)
Odontaspis elegans Agassiz sp. (*Lamna* [*Od.*] *contortidens*, *L. elegans*, *L. raphiodon*, *L. undulata*)
Odontaspis Hopei Agassiz (*Lamna cuspidata*, *L. longidens*, *L.* [*Od.*] *dubia*, *Od. cuspidata*)
Odontaspis verticalis Agassiz
Oxyrhina Desori Agassiz (*Otodus sulcatus*, *Ox. crassa*, *Ox. crassidens*, *Ox. Desori*, *Ox. hastalis*, *Ox. isocelica*, *Ox. leptodon*, *Ox. minuta*, *Ox. xiphodon*)
Pachyrhizodus (?) sp.
Phyllodus sp.
Pycnodus Koenigi Agassiz sp.
Pycnodus sp. sp.
Saurocephalus (?) **faiumensis** Dames
Scymnus sp.
Squatina prima Winkler sp.

---

[1]) Rovasenda citò per inavvertenza questa specie di Agassiz, che non esiste: egli intendeva dire *Lamna crassidens* Ag., come si rileva dal cartellino manoscritto che accompagna gli esemplari. Trabucco (*Boll. Soc. geol. it.*, vol. XIII, 1895, p. 124) la riportò col nome di *Oxyrhina crassa* Ag.

[2]) Le specie citate da Sismonda vennero riportate, parzialmente o per intero, da G. Gastaldi (*Cenni sui vertebrati foss. del Piemonte*, in Mem. Acc. sc. Torino, ser. II, tom. XIX, 1861), da Portis (*Boll. Com. geol. d'It.*, 1886), da Sacco (*Cat. paleont. del bac. terz. del Piemonte*, in Boll. Soc.

Da questo elenco risulta anzitutto che negli strati di Gassino non vennero raccolte le quattro specie seguenti (proprie dei terreni oligocenici e miocenici), che vi sono state erroneamente citate da varii autori: *Carcharodon megalodon* Agassiz, *Odontaspis contortidens* id., *Odontaspis cuspidata* id. e *Oxyrhina hastalis* id.

Se poi esaminiamo singolarmente in quali formazioni geologiche furono riscontrate le specie comprese nel detto elenco, troviamo che — lasciando da parte *Diodon incertus* e *Lobodus pedemontanus*, esclusive del calcare di Gassino; *Diodon* sp., *Phyllodus* sp., *Pycnodus* sp. e *Scymnus* sp., che non consentono paragoni efficaci; *Chrysophrys* sp., che, quantunque affine a *Chr. cincta*, somiglia altrettanto a parecchie specie congeneri di tutti i sistemi terziarii e dei mari attuali; e *Pachyrhizodus* (?) sp., che, sebbene richiami *P. gracilis* del cretaceo superiore inglese, non può reggere ad un serio confronto — le altre diciotto specie forniscono importanti criterii per la determinazione cronologica del giacimento in questione. Infatti:

Gli esemplari di *Acanthias orpiensis* provengono dall'eocene inferiore del Belgio (*Heersien*) e dell'Inghilterra (Strati di Woolwich e di Reading).

Gli otoliti di *Arius* sp., esattamente corrispondenti a quello di Gassino, si raccolsero nell'eocene superiore inglese (Argilla di Barton).

I denti di *Carcharias* (*Aprionodon*) *frequens* si rinvennero nell'eocene superiore di Birket-el-Qurùn (Egitto).

Carcharodon auriculatus, vissuto anche nell'oligocene e nel miocene inferiore, è comune nell'eocene medio e superiore (Alabama, Carolina mer.; Egitto [M. Mokattam (*Parisiano*) e Birket-el-Qurùn; Inghilterra [Brackleshan e Hampshire]; Belgio [*Bruxellien* e *Laekenien*]; Francia [Calcaire grossier]; Baviera [Kressenberg]; Italia [S. Giovanni Ilarione, Grancona, Valle d'Avesa, Valdonega (Veneto)], ecc.).

Il dente tipico di *Carcharodon subserratus* fu trovato nell'eocene inferiore di Sheppey (Argilla di Londra); altri, ai quali il nostro si avvicina sopratutto, nell'eocene superiore di Kressenberg.

Il dente gassinese di *Cestracion* sp. richiama *C. rugosus* e *C. polydictyos* del cretaceo superiore, e gl'ittiodoruliti dello stesso genere, strettamente affini ed altri del cretaceo superiore inglese e del Pläner della Sassonia (*Spinax maior* Agass.), sono probabilmente identici a quello dell'eocene inferiore (*Landenien*) del Belgio, citato da Daimeries.

Gli avanzi di *Cimolichthys* sp., somiglianti a *C. lewesiensis* del cretaceo superiore inglese e ad altri resti del Pläner e della creta di Meudon, erroneamente riferiti dagli autori ai gen. *Saurocephalus, Spinax* e *Anenchelum*, corrispondono perfettamente ad altri raccolti nell'eocene superiore di Biarritz e, quasi certamente, sono rappresentati anche nell'eocene medio (*Brusselliano*) del Belgio [*Trichiurides sagittidens*].

Gl'ittiodoruliti di *Coelorhynchus rectus* furono scoperti nell'Argilla di Londra, negli Strati di Bracklesham, nell'Argilla di Barton, nell'eocene inferiore e medio del Belgio

---

geol. it., vol. IX, 1890) e da Trabucco (*Proc. verb.* e *Mem. Soc. tosc. sc. nat.*, 1893); quelle che pubblicò Costa, da Portis e da Trabucco (*Loc. cit.*); quelle che descrisse Portis, da Sacco (*Loc. cit.*) e da Rovasenda (*Boll. Soc. geol. it*, 1893), e quelle comprese nell'elenco di quest'ultimo naturalista, da Trabucco (*Boll. Soc. geol. it.*, 1895).

(raro nel *Paniselien*, comune nell'*Ypresien*, comunissimo nel *Bruxellien* e nel *Laekenien*), nelle sabbie di Cuise e nell'eocene medio di M. Zuello e di Fane (Veneto).

Lamna obliqua — di cui un dente è stato raccolto nell'oligocene veneto e cinque in quello piemontese — è comune nell'Argilla di Londra, negli Strati di Bracklesham e nell'Argilla di Barton. Fu pure riscontrata nell'eocene di New Yersey e dell'Egitto, nell'arenaria ferruginosa di Kressenberg e nell'eocene inferiore e medio del Belgio e dell'Italia (S. Daniele, M. Colle, Spilecco, M. Postale, Roncà [Veneto]).

Notidanus primigenius, frequente in depositi oligocenici e miocenici, fu riconosciuto con sicurezza anche nell'eocene superiore dell'Inghilterra (Argilla di Barton), della Germania settentrionale e dell'Italia (Priabona).

Notidanus serratissimus fu rinvenuto nell'Argilla di Londra, negli Strati di Spilecco, nel *Brusselliano* del Belgio e nell'eocene superiore della Germania.

Odontaspis elegans — da non confondersi con *Od. contortidens*, che è specie oligocenica e miocenica — è comunissima in numerosi giacimenti eocenici: Alabama, Carolina mer., Repubblica Argentina, Belgio [dall'*Heersien* al *Wemmelien*], Inghilterra [Argilla di Londra, Strati di Bracklesham e Argilla di Barton], Francia [Calcaire grossier], Germania, Italia [Spilecco, Bolca, Roncà, Grancona, Costoza, Novare, Brendola (Veneto)], ecc.

Odontaspis Hopei (la quale deve tenersi distinta da *Od. cuspidata* [=*dubia*], che è specie oligocenica e miocenica) è comune — in Inghilterra, in Francia, nel Belgio, nella Repubblica Argentina, ecc. — nei varii piani dell'eocene (Argilla di Londra, Brusselliano, Argilla di Barton). In Italia si rinvenne nell'eocene di M. Bolca, di Grancona, di Novare e di Castelvecchio e nel calcare di Spilecco, dov'è frequentissima.

I denti di *Odontaspis verticalis*, dubbiosamente riscontrati nell'Argilla di Londra, provengono dall'eocene del Belgio (dall'*Heersien* al *Laekenien*), della Germania, dell'Egitto (M. Mokattam e Birket-el-Qurùn) e della Carolina meridionale.

I resti di *Oxyrhina Desori*, frequenti nell'oligocene e nel miocene, si raccolsero abbondanti anche nell'eocene medio e superiore (Alabama, Carolina merid., Egitto [M. Mokattam], Prussia, Belgio [*Brusselliano*], Italia [Fumane, Grancona, Valle d'Avesa (*Parisiano*), Brendola], ecc.).

Pycnodus Koenigi è stato trovato nell'eocene medio dell'Inghilterra (Strati di Bracklesham) e del Belgio.

Saurocephalus (?) *faiumensis* fu descritto su esemplari dell'eocene superiore di Birket-el-Qurùn (Egitto).

Squatina prima proviene dall'eocene inferiore e medio del Belgio (dall'*Heersien* al *Laekenien*).

Riassumendo le precedenti indicazioni in una tabella sinottica, abbiamo [1]:

---

[1]) La lettera *c*, messa accanto alle specie, vuol dire *calcare*; la lettera *m*, *marna*.

SPECIE DI GASSINO che forniscono criterii cronologici	MIOCENE	OLIGOCENE	EOCENE		
			sup.	medio	inf.
Acanthias orpiensis (c. m.)					+
Arius sp. (c.)			+		
Carcharias [*Aprionodon*] *frequens* (c.)			+		
Carcharodon auriculatus (c. m.) . .	+	+	+	+	
Carcharodon subserratus (m.) . . .			+		+
Cestracion sp. (c.)					+ ?
Cimolichthys sp. (m.)			+	+ ?	
Coelorhynchus rectus (m.)			+	+	+
Lamna obliqua (c. m.)		+	+	+	+
Notidanus primigenius (c.)	+	+	+		
Notidanus serratissimus (c.) . . .			+	+	+
Odontaspis elegans (c. m.)			+	+	+
Odontaspis Hopei (c. m.)			+	+	+
Odontaspis verticalis (c. m.). . . .			+	+	+
Oxyrhina Desori (c. m.)	+	+	+	+	
Pycnodus Koenigi (c.)				+	
Saurocephalus (?) *faiumensis* (c. m.).			+		
Squatina prima (c.).				+	+
	3	4	14	10 o 11	9 o 10

Questo prospetto è eloquente. Delle specie che vi sono comprese, diciassette e probabilmente diciotto, cioè *tutte*, sono state riscontrate in giacimenti eocenici; quattro sole di esse — di cui una (*Lamna obliqua*) rarissima — si rinvennero anche in depositi più recenti.

È fuor di dubbio, dunque, che il membro calcarifero superiore dell'affioramento gassinese, ossia il calcare *Bertot*, cioè il *Calcare di Gassino* propriamente detto, con le marne che lo inglobano e che gli sono interposte (lettere *a*, *b*, *c* della serie alla pag. 2) non può essere riferito all'oligocene, ma appartiene, al pari degli strati marno-calcarei del ***Caviggione*** e di *Villa* ***De Filippi***, all'eocene.

Quanto al piano, il numero rilevante di specie dell'eocene superiore (Barton, Kressenberg, Biarritz, Priabona, Brendola, ecc.) favorisce evidentemente l'opinione che si tratti di *Bartoniano*. Io peraltro — sia per gli stretti rapporti che gli avanzi di *Pachyrhizodus* (?), di *Cestracion* e di *Cimolichthys* offrono con altri del Senoniano, sia per l'abbondanza di specie riscontrate anche nell'eocene medio ed inferiore — inclinerei ad ascrivere il calcare di Gassino al *Parisiano*, considerandolo tutt'uno con le zone sottostanti del ***Caviggione*** e di *Villa* ***De Filippi***, la cui fauna generale, del resto, è in gran parte identica a quella del detto calcare. In conclusione, si può dire ch'esso trova il suo posto nel *Parisiano* alto o nel *Bartoniano* basso.

Se non che, il prof. **Trabucco** sollevò un'altra questione, alla quale è pur necessario accennare. Sostenne, cioè, che fino a questi ultimi anni, vale a dire fino a quando egli si accinse allo studio della formazione gassinese, nelle collezioni paleontologi-

che pubbliche e private i fossili di Gassino e di Bussolino erano tutti indicati con la sola parola — « *Gassino* » — e mescolati insieme; e che questa confusione di organismi, raccolti « in due località separate e di età differente », aveva portato per conseguenza l'erronea determinazione cronologica del calcare di Gassino, riferito al *Bartoniano*, anzichè al *Tongriano*.

Anche i pesci esaminati da me rappresenterebbero dunque, secondo Trabucco, fossili promiscui delle due località suaccennate.

Per escludere questa supposizione, basterebbe, mi sembra, il prospetto della pagina precedente, in base al quale (se fosse vera l'idea del prof. Trabucco) bisognerebbe ammettere che della copiosa ittiofauna gassinese, soltanto tre o, tutt'al più, quattro specie (*Carcharodon auriculatus*, *Notidanus primigenius*, *Oxyrhina Desori* e, forse, *Lamna obliqua*, vissute nell'oligocene, ma pur comuni nell'eocene) *potrebbero* provenire dalla zona superiore (*Gassino*); mentre tutte le altre, esclusivamente eoceniche, *dovrebbero* appartenere alle zone media e inferiore (*Caviggione* e *De Filippi*).

Ma — lasciando da parte tale riflessione — conviene osservare che l'ipotesi della confusione tra i fossili della raccolta Rovasenda (in cui sono rappresentate tutte le specie comprese in questo lavoro, meno una — l'*Arius*) non può reggere. La collezione di Gassino fu fatta dal signor di Rovasenda in un lunghissimo periodo di anni, durante il quale egli si recò molto spesso alle cave omonime e sopratutto alla cava Giannone (che, meglio ancora delle altre, è sulla via tra la villa Rovasenda e Gassino), raccogliendo direttamente o ritirando dai cavatori, opportunamente addestrati da lui, i resti organici che di mano in mano venivano dissotterrati. Le ricerche nel calcare di Bussolino, invece, furono da lui cominciate, si può dire, in questi ultimi anni, cioè dopo le scoperte, dianzi accennate, del prof. Tellini; mentre avanti quell'epoca non gli era mai giunta notizia di fossili ritrovati colà. Dunque, nè nella collezione Rovasenda, nè nelle altre, può essere avvenuta confusione tra gli avanzi delle due località, perchè, come ho detto, i fossili di Gassino erano stati raccolti molto tempo prima che si avesse cognizione di quelli di Bussolino. Indipendentemente da ciò, è un fatto che il signor di Rovasenda curò sempre in modo esemplare, scrupolosissimo, la provenienza dei suoi fossili. Basta esaminare la sua collezione per esserne convinti; ed io ne ho una prova efficace nell'invio molto accurato degl'ittioliti, accompagnati da cartellini, spesso ingialliti dal tempo, sui quali sono indicate le varie località: Cave di *Gassino*, Cava *Caviggione*, Cava *De Filippi* [1]).

---

[1]) Agli avanzi di pesci raccolti da Rovasenda (nel triennio 1891-93) nelle zone *Caviggione* e *De Filippi*, ho accennato per incidenza alla pag. 2. Qui ne completerò il brevissimo elenco, risultante dalle mie osservazioni, aggiungendo che, naturalmente, di questi avanzi non è fatta parola nella parte descrittiva del presente lavoro, il quale riguarda esclusivamente la ittiofauna della zona di Gassino propriamente detta:

Zona Caviggione

1. *Galeocerdo latidens* Agassiz (1 dente, già determinato così da Rovasenda [*Ms.*]). Gli esemplari di questa specie provengono dall'eocene dell'Inghilterra (Strati di Bracklesham), del Belgio [dall'*Ypresien* superiore al *Wemmelien*] e dell'Egitto [M. Mokattam e Birket-el-Qurùn]
2. *Odontaspis elegans* Agass. (3 denti)

A complemento delle precedenti considerazioni, desidero mettere in rilievo un'altra circostanza. Fra gli esemplari studiati da me, alcuni furono trovati da Oronzio Costa, che nelle sue pubblicazioni dice chiaramente di averli rinvenuti nel calcare di Gassino presso Bardassano, e dal signor Ernesto Forma, che li raccolse nelle cave Mela e Aprile. Ora, di questi esemplari, uno è l'otolito di *Arius*, identico a quelli dell'Argilla di Barton (Costa), e gli altri appartengono a *Odontaspis elegans* (Costa e Forma) e ad *Odontaspis Hopei* (Forma). Aggiungendo a queste tre spĕcie il *Coelorhynchus rectus*, scoperto nella cava dell'avv. Giannone, dal quale fu ceduto a Rovasenda, sono quattro specie *esclusivamente* eoceniche, sulla cui provenienza dalle cave di Gassino propriamente dette nessuno può sollevare alcun dubbio.

Concludendo, la formazione di Gassino e di Bussolino costituisce una serie unica, spettante all'eocene. Nè tale classificazione dipende da mescolanza tra i fossili delle due località, che dev'essere esclusa. I risultati contrarii ottenuti dal prof. Trabucco derivano dalla conoscenza molto imperfetta che fino allora si aveva della fauna di Gassino e da parecchie determinazioni specifiche precedentemente sbagliate, sulle quali egli fondò in parte le sue deduzioni cronologiche [1]).

Così, ad esempio, per ciò che riguarda i pesci, noi sappiamo attualmente: I° che a Gassino non furono trovate *Carcharodon megalodon*, *Odontaspis contortidens*, *Odontaspis cuspidata* e *Oxyrhina hastalis*: specie posteoceniche, che vi erano state erroneamente citate da varî studiosi, me non escluso; II° che vi si raccolsero invece *Acanthias orpiensis*, *Arius* sp., *Carcharias frequens*, *Carcharodon subserratus*, *Cimolichthys* sp., *Coelorhynchus rectus*, *Notidanus serratissimus*, *Odontaspis Hopei*, *Odontaspis verticalis*, *Pycnodus Koenigi*, *Saurocephalus* (?) *faiumensis* e *Squatina prima*: tutte specie esclusivamente eoceniche, non ancora segnalate in quel giacimento; III° che le zone sottostanti al calcare di Gassino, nelle quali fino adesso non si conoscevano avanzi d'ittioliti, fornirono, tra altre specie, *Carcharodon auriculatus*, *Odontaspis elegans*, *Odontaspis Hopei* e *Oxyrhina Desori*, tutte riscontrate anche in detto calcare.

---

3. *Odontaspis Hopei* Agass. (5 denti)
4. *Oxyrhina Desori* Agass. (parecchi denti)
5. *Chrysophrys* sp. (1 dente).

Zona De Filippi

1. *Carcharodon auriculatus* Blainv. sp. (1 dente)
2. *Odontaspis Hopei* Agass. (2 denti)
3. *Oxyrhina Desori* Agass. (3 denti)
4. Fam. *Myliobatidae* — Gen. ind. (*Aetobatis*, di Rov. [*Ms.*]). Frammento di scaglioncino della superficie radicale, conservante sei rilievi paralleli.

È opportuno notare che, tranne il *Galeocerdo* e lo scaglioncino della fam. *Myliobatidae*, le altre specie di elasmobranchi (delle quali due sono esclusivamente eoceniche e due sono eoceniche ed oligoceniche) furono trovate anche nella zona superiore (*Gassino*).

[1]) Fra i paleontologi che sbagliarono, mi affretto ad annoverare me pure, che in varii lavori (*Ittiodontoliti del Veneto*, 1877 [Atti Soc. ven.-trent. di sc. nat., vol. V]; *Su due giac. itt. nei dintorni di Crespano*, 1880 [Boll. Soc. pred.]; *Ittioliti mioc. della Sardegna*, 1891 [Atti Acc. sc. fis. e mat. di Napoli, serie II, vol. VII]) citai con nomi specifici errati (dei quali si giovò in buona fede il collega Trabucco) parecchi denti di pesci provenienti da Gassino e da altre località. Tant'è vero che non bisognerebbe mai azzardare riferimenti specifici senza aver prima esaminato gli esemplari originali.

Così, per gl' invertebrati, le recenti ricerche del professore Parona ci hanno fatto sapere: I° che l'*Aturia* delle marne intercalate e sovrapposte ai banchi calcarei delle cave di Gassino, ascritta da Bellardi all'*At. Aturi*, è una forma nuova *(At. rovasendiana)*; II° che questa forma è stata scoperta anche alla cava De Filippi; III° che gli esemplari di *Nautilus* trovati nelle marne predette e riferiti dallo stesso Bellardi a *Nautilus decipiens* Michtti sono conservati troppo male per consentire una determinazione specifica sicura [1]; IV° che nel calcare di Gassino propriamente detto (« Vigna sopra la cava Mela ») furono raccolte da lui (Parona) *Calcarina tetraedra*, *Nummulites complanata* e *Nummulites Tchihatcheffi*, tutte specie già rinvenute anche a Bussolino [2]).

Così, gli studii futuri, accuratamente eseguiti, sulla fauna e sulla flora del calcare e delle marne di Gassino aggiungeranno a mano a mano nuovi fatti, i quali ne confermeranno, secondo ogni previsione, il riferimento all'eocene.

---

[1]) C. F. Parona, *Note sui cefalopodi terziari del Piemonte* (Palaeontographia italica, vol. IV [in corso di stampa]).

[2]) Da corrispondenza epistolare.

Subcl. ELASMOBRANCHII

Fam. Lamnidae

Gen. ODONTASPIS Agassiz

[*Rech. sur les poiss. foss.*, vol. III, 1838, p. 87]

Odontaspis elegans Agassiz sp.

Tav. I, fig. 1-17

Sinonimia generale [1])

L. Agassiz, *Poiss. foss.*, vol. III, 1843, p. 289, tav. 35, fig. 1-5; tav. 37*a*, fig. 59.—F. Dixon, *Foss. Sussex*, 1850, p. 203, tav. 10, fig. 28-31. — P. Gervais, *Zool. et pal. fr.*, 1852, tav. 75, fig. 3. — G. Vincent, *Ann. Soc. r. malac. Belg.*, vol. XI, 1876, p. 123, tav. 6, fig. 4. — F. Bassani, *Itt. Ven.*, 1877, p. 23 (pars). — F. Noetling, *Abh. geol. Specialk. Preuss. u. Thüring. Staaten*, vol. VI, part. III, 1885, p. 61, tav. 4 [*Lamna elegans*].

F. Bassani, *Loc. cit.*, p. 24 (pars) [*L. (Od.) contortidens*].

T. C. Winkler, *Archiv. Musée Teyler*, vol. IV, 1876, pp. 8 e 24, tav. 1, fig. 7-9. — G. Vincent, *Loc. cit.*, 1876, p. 125, tav. 6, fig. 2 [*Otodus striatus*] (*Lamna striata*, in Woodward, *Cat. foss. fish. British Museum*, part. I, 1889, p. 409).

A. S. Woodward, *Catal. cit.*, 1889, p. 361.—Id., *Geolog. Magaz.*, dec. III, vol. VIII, 1891, p. 105.— G. De Alessandri, *Pesci foss. Paranà*, 1896, pag. 7, fig. 1 (in Atti r. Acc. sc. Torino, vol. XXXI) [*Odontaspis elegans*].

Sinonimia degli esemplari di Gassino

1846 — Lamna (Od.) contortidens — E. Sismonda, *Mem. r. Accad. sc. Torino*, ser. II, tom. X, p. 48, tav. 2, fig. 25-28 [rip. in Gastaldi, *Vert. foss. Piem.*, (Mem. Acc. sc. Torino, ser. II, tom. XIX, 1861, p. 63); Bassani, *Itt. Ven.*, 1877, p. 25 e *Itt. mioc. Sard.*, 1891, p. 3 e 28; Nicolis, *Olig. e mioc. nel sist. del m. Baldo*, 1884, pag. 38; Portis, *Boll. r. Com. geol.*, 1886, p. 198; Woodward, *Cat. cit.*, 1889, pag. 366; Sacco, *Boll. Soc. geol. it.*, 1890, p. 295; De Alessandri, *Pesci terz. Piem. e Lig.*, in Mem. r. Acc. sc. Torino, ser. II, tom. XLV, 1895, p. 273].

1846 — Lamna undulata — E. Sismonda (non Reuss), *Loc. cit.*, p. 47, tav. 2, fig. 23-24 [rip. in Gastaldi, Portis e Sacco, *Loc. cit.*; Woodward, *Cat. cit.*, 1889, p. 410; Trabucco, *Vera pos. terr. terz. bac. piem.*, part. I, 1893, p. 29; error. rif. a *Od. contortidens* in Gemmellaro, *Atti Acc. Gioenia*, ser. II, tom. XIII, p. 320-321; Bassani, *Itt. mioc. Sard.*, 1891, p. 29].

1864 — Lamna (Od.) contortidens — O. G. Costa, *Bull. Ass. naz. it. degli scienz.* ecc., disp. 7ª, vol. II, pag. 26, tav. 2, fig. 6; *Ann. Acc. asp. nat.*, ser. III, vol. III, pag. 30, tav. 5, fig. 2 [*Od. contortidens* in Woodward, *Cat. cit.*, p. 366].

---

[1]) Ho creduto opportuno di separare, in ogni specie, la sinonimia generale da quella degli esemplari di Gassino. La prima, disposta secondo la nomenclatura, è limitata allo scopo del presente lavoro; l'altra, distribuita cronologicamente, è completa.

1893 — Lamna contortidens — L. di Rovasenda, *Boll. Soc. geol. it.*, pag. 418 [rip. in Trabucco, *Boll. id.*, 1895, p. 117].

1893 — Lamna raphiodon — L. di Rovasenda, *Loc. cit.*, p. 418 [rip. in Trabucco, *Loc. cit.*, p. 117].

1893 — Lamna elegans — L. di Rovasenda, *Loc. cit.*, p. 418 [rip. in Trabucco, *Loc. cit.*, pp. 117 e 123].

Questa specie è rappresentata nel calcare e nelle marne di Gassino da moltissimi denti, che spettano a individui di età diversa e alle varie parti delle mascelle. Negli anteriori più grandi la corona misura l'altezza di 35 millimetri; nei minori, di 11. Fra i posteriori (i quali hanno frequentemente sulla superficie esterna un rilievo longitudinale mediano, che va dalla base all'apice) taluno ha la corona alta 18 mm., mentre nei più piccoli essa non supera i 4. In tutti gli esemplari i margini laterali del cono sono affilati per tutta la loro estensione.

Le strie della faccia interna sono, in generale, marcate e arrivano spesso alla metà e più di rado ai due terzi della corona. Sono assai numerose: in molti esemplari ne ho contate da 30 a 40; in qualcuno fino a 45. Camminano diritte e continue; solo per eccezione — cioè quando lo smalto è un po' eroso — appariscono lievemente ondulate e qua e là interrotte. Di solito, diventano mano a mano più lunghe quanto più dal margine laterale si avvicinano alla parte mediana, presso a poco così come le canne di un organo. Qualche volta (fig. 17, molto ingr.) si presentano leggermente arcuate nel tratto superiore, con la concavità rivolta verso l'esterno, e la stria centrale, arrivata ad una certa altezza, si biforca, includendo nella biforcazione altre due strioline, che convergono in giù, unendosi ad angolo acuto. Quasi sempre, interposte fra le più sviluppate, ve n'ha alcune assai brevi, che si arrestano poco più in su della base dello smalto; taluna di esse si fonde con la contigua allungata (fig. 16, molto ingr.).

La radice è raramente conservata; quando esiste, è poco rigonfia. Nei denti anteriori le corna sono lunghe, poco divaricate e piuttosto acute; nei posteriori si mostrano brevi, ad angolo molto aperto e con l'estremità libera ottusa.

Io sono convinto che nessuno degli esemplari esaminati da me appartiene a *Od. contortidens* Ag., e che questa specie non è rappresentata nel calcare e nelle marne di Gassino, quantunque talvolta vi sia stata citata. È vero che non sempre è facile distinguere i denti di *Od. elegans* da quelli di *contortidens*, ma vi sono alcuni caratteri differenziali, che giovano assai e che possono riassumersi così:

I.° In confronto dell'*Od. elegans*, i denti della *contortidens* hanno la radice molto rigonfia sulla superficie interna ed il foro nutritivo visibilissimo.

II.° Nei denti anteriori della *contortidens* i margini laterali si mantengono affilati dall'apice sino ai due terzi dell'altezza della corona; poi si arrotondano, dando a questa una forma nettamente subcilindrica; nella *elegans* anche i denti anteriori presentano i margini taglienti fino alla base del cono.

III.° Nella *contortidens* le strie sono di solito lievi, ondulate, interrotte, poco numerose (meno di 30, talvolta meno di 20) e arrivano fino ai tre quarti della superficie della corona o più in là. Nella *elegans*, invece, si veggono marcate, diritte, continue, più numerose (spesso da 30 a 40 e perfino a 45) e giungono fino alla metà o ai due terzi dell'altezza del cono. Oltre a ciò, in quest'ultima specie, intercalate fra le più lunghe, ve n'ha altre assai brevi, che si arrestano poco più in su della base dello smalto;

qualcuna di queste ultime si fonde con la contigua lunga, determinando un angolo molto acuto.

Or bene, tutti gli esemplari di Gassino, compreso quello ascritto da O. G. Costa a *Lamna (Od.) contortidens*, presentano i suesposti caratteri dell'*Od. elegans* e quindi appartengono, secondo me, a questa specie.

Alla quale devono pure associarsi i denti gassinesi che Sismonda riferì a *L. (Od.) contortidens* e che Woodward, De Alessandri ed io citammo erroneamente con questo stesso nome [1]).

Quanto a *Lamna undulata* Sism., Woodward [2]) e De Alessandri [3]) la ritengono specie distinta; mentre il prof. Gemmellaro ed io la riferimmo in addietro a *Od. contortidens*, a cui inclinava ad associarla anche O. G. Costa. Invece, essa pure va ascritta, verosimilmente, a *Od. elegans*, come mi sono persuaso dopo avere esaminato l'originale, al quale è identico un altro della collezione Rovasenda, che ho riprodotto alle fig. 13-14. Entrambi offrono i caratteri dell'*elegans*: il rialzo longitudinale mediano sulla faccia esterna della corona, le strie molto numerose e marcate, che giungono fin verso la metà dell'altezza del cono, e i margini taglienti per tutta la loro estensione. Quantunque la radice non sia conservata, sembra ch'essa non fosse molto rigonfia, perchè la base della corona non mostra quella sùbita tendenza a inturgidirsi, che si vede nei denti forniti di grossa radice.

Odontaspis elegans è molto comune in numerosi giacimenti eocenici (Belgio [dall'*Heersien* al *Wemmelien*], Inghilterra [Argilla di Londra, Strati di Bracklesham e Argilla di Barton], Francia [Calcaire grossier], Italia [Spilecco, Bolca, Roncà, Grancona, Costoza, Novare, Brendola], Germania, Alabama, Carolina del Sud, Repubblica Argentina, ecc.).

Calcare e marne di Gassino.

Coll. Rovasenda (molti denti). — Coll. E. Forma (3 denti, due della cava Meia ed uno della cava Aprile) — Musei geol. univ. di Torino (3 denti), di Roma [coll. Michelotti] (1 dente) e di Napoli (28 denti).

Odontaspis Hopei Agassiz

Tav. I, fig. 18-23

Sinonimia generale

L. Agassiz, *Poiss. foss.*, vol. III, 1843, pag. 293, tav. 37 *a*, fig. 27-30. — F. Bassani, *Ittiol. Ven.* 1877, p. 26 [*Lamna (Od.) Hopei*].
F. Bassani, *Loc. cit.*, p. 25 [*L. (Od.) gracilis*].
F. Bassani, *Loc. cit.*, p. 25 (pars) [*L. (Od.) dubia*].
F. Bassani, *Loc. cit.*, p. 23 (pars) [*L. cuspidata*].

---

[1]) Come ho detto nel '91 (*Itt. mioc. Sard.*, pag. 29) e come ha confermato De Alessandri (*Mem. Acc. sc. Torino*, ser. II, tom. XLV, pag. 273), sono invece denti posteriori di *Od. contortidens* i tre esemplari dell'arenaria serpentinosa del colle di Torino illustrati da Sismonda col nome di *Lamna elegans*, che A. S. Woodward disse « molto dubbiosi » e che il prof. Trabucco citò per errore da Gassino (E. Sismonda, *Loc. cit.*, pag. 46, tav. 2, fig. 33-35; F. Bassani, *Itt. Ven.*, pag. 24; A. S. Woodward, *Cat. foss. fish. B. M.*, part. I, p. 363, nota 1; G. Trabucco, *Boll. Soc. geol. it.*, vol. XIII, 1895, pag. 122).

[2]) A. S. Woodward, *Loc. cit.*, p. 410.

[3]) G. De Alessandri, *Loc. cit.*, p. 273.

A. S. Woodward, *Cat. foss. fish. B. M.*, part. I, 1889, p. 368 (pars). — Id., *Geolog. Magaz.*, dec. III, vol. VIII, 1891, pag. 110 [*Od. cuspidata*].
F. Noetling, *Abh. geol. Specialk. Preussen u. Thüring. Staaten*, vol. VI, part. III, 1885, p. 71, tav. 5, fig. 1-3. — G. De Alessandri, *Pesci foss. Paranà*, 1896, p. 7, fig.] 2 [*Od. Hopei*].

Sinonimia degli esemplari di Gassino

1846 — Lamna (Od.) dubia — E. Sismonda, *Mem. r. Acc. sc. Torino*, ser. II, tom. X, pp. 48 e 86, tav. 2, fig. 17-22 [rip. in Gastaldi *Mem. Acc. sc. Torino*, serie II, tom. XIX, 1861, p. 63; Portis, *Boll. Com. geol.*, 1886, p. 198; Sacco, *Boll. Soc. geol. it.*, 1890, p. 295; erron. rif. a *Od. cuspidata*, in Woodward, *Cat. cit.*, 1889, p. 368; Bassani, *Itt. mioc. Sard.*, 1891, pp. 3 e 26; De Alessandri, *Mem. Acc. sc. Torino*, ser. II, tom. XLV, 1895, p. 272].
1890 — Lamna cuspidata — F. Sacco, *Loc. cit.*, p. 295.
1893 — Odontaspis cuspidata — G. Trabucco, *Vera pos. terr. terz. bac. piem.*, 1893, p. 15.
1893 — Lamna longidens — L. di Rovasenda, *Boll. Soc. geol. it.*, p. 418 [rip. in Trabucco, *Boll. id.*, 1895, p. 117].
1893 — Lamna cuspidata — L. di Rovasenda, *Loc. cit.*, p. 418.
1895 — Odontaspis cuspidata — G. Trabucco, *Boll. Soc. geol. it.*, p. 123.

Parecchi denti, raccolti nel calcare e nelle marne, rappresentano a Gassino quest specie, intorno alla cui validità i palittiologi non sono concordi. Essi ripetono i caratteri esposti dall'Agassiz per gli esemplari tipici, che provengono dall'Argilla di Londra. Hanno tutti una forma subulata e slanciata. La faccia esterna, piatta verso la punta, si mostra più o meno convessa nel tratto inferiore. Alcuni, come quello riprodotto alle fig. 19-20, hanno i margini affilati solo nella metà superiore del loro corso e sono presso a poco cilindrici presso la base. I conetti laterali si presentano acuti e subulati: abitualmente piccoli, raggiungono dimensioni notevoli (7 mm.) nei denti maggiori. La radice è spessa; le sue branche, non molto lunghe, sono piuttosto ravvicinate. La grandezza degli esemplari è assai varia: i più sviluppati (fig. 19-20) misurano cinque centimetri, così come alcuni dell'Argilla di Londra, citati da Agassiz.

Varii paleontologi ritengono l'*Od. Hopei* distinta dalla *cuspidata* (=*dubia*), dell'oligocene e del miocene; altri le fondono insieme. Io pure divideva dapprima l'idea di questi ultimi; più tardi però mi persuasi che val meglio tenerle separate (*Itt. mioc. Sard.*, 1891, p. 26). Infatti, nell'*Od. cuspidata* i margini della corona sono taglienti per tutta la loro estensione, e le corna della radice hanno uno sviluppo considerevole, che supera qualche volta la lunghezza del cono, e sono sensibilmente divaricate.

Odontaspis Hopei è comune — in Inghilterra, in Francia, nel Belgio, nella Repubblica Argentina ecc. — nei varii piani dell'eocene (Argilla di Londra, Brusselliano, Argilla di Barton). In Italia fu rinvenuta nell'eocene di Monte Bolca, di Grancona, di Novare e di Castelvecchio ed è frequentissima nel calcare di Spilecco.

Calcare e marne di Gassino.

Coll. Rovasenda (23 denti). — Coll. E. Forma (1 dente [Cava Aprile]).

Odontaspis verticalis Agassiz

Tav. I, fig. 24-31

Sinonimia generale

L. Agassiz, *Poiss. foss.*, vol. III, 1843, p. 294, tav. 37 *a*, fig. 31-32. — R. W. Gibbes, *Journ. Acad. nat. sc. Philadelphia*, ser. II, vol. I, 1849, p. 198, tav. 26, fig. 124-127. — W. Dames, *Sitzungsb. k. preuss. Akad. Wiss.*, part. I, 1883, p. 145, tav. 3, fig. 8-10. — A. S. Woodward, *Cat. foss. fish. B. M.*, part. I, 1889, p. 375 [*Odontaspis verticalis*].
A. S. Woodward, *Geol. Magaz.*, dec. III, vol. VIII, 1891, p. 106, tav. 3, fig. 2. — F. Priem, *Bull. Soc. géol. France*, sér. III, tom. XXV, 1897, p. 213, tav. 7, fig. 4 [*Lamna verticalis*].
T. C. Winkler, *Arch. Musée Teyler*, vol. III, 1874, p. 298, tav. 7, fig. 3 [*Odontaspis gracilis*] (*Od. minutissimus*, in F. Noetling, *Sitzungsb. naturf. Freunde*, 1886, p. 16).
T. C. Winkler, *Loc. cit.*, vol. III, 1874, p. 297, tav. 7, fig. 2 [*Otodus minutissimus*].
T. C. Winkler, *Loc. cit.*, vol. IV, 1876, p. 7, tav. 1, fig. 5-6 [*Otodus parvus*].
F. Noetling, *Loc. cit.*, 1886, p. 16 [*Odontaspis minutissimus*].
A. Daimeries, *Ann. Soc. r. malac. de Belgique*, 1891, p. LXXIII [*Scyllium minutissimum*].

Sinonimia degli esemplari di Gassino

Ms. — LAMNA (OD.) CRASSIDENS — L. di Rovasenda, *in sch.*

Questa specie (la quale, a mio credere, appartiene al gen. *Odontaspis* e non al gen. *Lamna*) è rappresentata da numerosi denti, raccolti nel calcare e nelle marne, che presentano alcune variazioni nella forma secondo il posto occupato nelle mascelle. Tutti sono diritti, con la punta leggermente all'infuori, ed hanno la radice e la parte inferiore della corona rigonfie ed i margini affilati per tutta la loro estensione. I conetti laterali sono sviluppati. La base dello smalto è più incavata e scende maggiormente alla faccia esterna che all'interna. Nei denti anteriori (fig. 24), che corrispondono alla fig. 32 dell'Agassiz, la corona è più stretta inferiormente e più slanciata e la radice è più delicata ed ha le corna più sottili; nei laterali (fig. 25-30) la prima, pure allungata, è più larga alla base, e la seconda è molto spessa ed ha le branche più robuste; nei posteriori (fig. 31) la corona, al pari della radice, è assai corta.

I denti di questa specie, dubbiosamente riscontrati nell'Argilla di Londra, provengono dall'eocene del Belgio (dall'*Heersien* al *Lackenien*), della Germania, dell'Egitto e della Carolina del Sud [1]).

Calcare e marne di Gassino.

Coll. Rovasenda (32 denti).

---

[1]) Sarebbe interessante potere stabilire i rapporti precisi fra i denti di *Odontaspis verticalis* Ag., *Od. Hopei* id. e *Od. Rutoti* Winkler, che probabilmente rappresentano una sola specie.

Gen. LAMNA Cuvier

[*Règne animal*, vol. II, 1817, p. 126]

Lamna obliqua Agassiz sp.

Tav. I, fig. 32-35

Sinonimia generale

L. Agassiz, *Poiss. foss.*, vol. III, 1843, p. 267, tav. 31; tav. 36, fig. 22-27.—F. Dixon, *Foss. Sussex*, 1850, p. 204, tav. 10, fig. 32-35; tav. 15, fig. 11. — F. Bassani, *Itt. Ven.*, 1877, p. 22.— W. Dames, *Sitzungsb. k. preuss. Akad. Wiss.*, 1883, p. 145, tav. 3, fig. 6 [*Otodus obliquus*].
L. Agassiz, *Loc. cit.*, p. 69, tav. 37, fig. 19-23. — F. Bassani, *Loc. cit.*, p. 21 [*Otodus lanceolatus*].
F. Bassani, *Loc. cit.*, p. 20 [*Otodus appendiculatus*].
A. S. Woodward, *Cat. foss. fish. B. M.*, part. I, 1889, p. 404. — G. De Alessandri, *Mem. r. Acc. sc. Torino*, ser. II, tomo XLV, p. 270, fig. 5 [*Lamna obliqua*].

Sinonimia degli esemplari di Gassino

1893 — Otodus lanceolatus — L. di Rovasenda, *Boll. Soc. geol. it.*, p. 418 [rip. in Trabucco, *Boll. id.*, 1895, p. 117].
1893 — Otodus obliquus — L. di Rovasenda, *Loc. cit.* [rip. in Trabucco, *Loc. cit.*].

Quattro soli denti rappresentano con sicurezza questa specie a Gassino.

Nei due più grandi (fig. 32-34) la corona è robusta ed obliqua, con la faccia interna liscia e notevolmente convessa [1]) e con l'esterna quasi piana e fornita, nel mezzo della base, di una depressione triangolare, più accentuata nell'esemplare alla fig. 33. La radice, rigonfia, è largamente aperta ed ha le corna sviluppate e arrotondate all'estremità. I conetti laterali sono forti, triangolari e un po' smussati all'apice.

Un altro (fig. 35), piantato nella marna, ha il cono basso, la radice molto larga e i denticelli laterali ampî e arrotondati.

Gli esemplari tipici di questa specie (della quale probabilmente è sinonimo *Lamna Vincenti* Winkl.) provengono dall'isola di Sheppey (Argilla di Londra), dov'essa è comune. È pur comune negli altri piani dell'eocene inglese (Strati di Bracklesham e Argilla di Barton). Fu anche riscontrata nell'eocene inferiore e medio del Belgio, nell'arenaria ferruginosa di Kressenberg e nell'eocene di New Yersey, dell'Egitto, ecc. In Italia si rinvenne nell'eocene inferiore di S. Daniele, di Monte Colle e di Spilecco e nell'eocene medio di M. Postale e di Roncà (Veronese). Un esemplare è stato raccolto nel terziario inferiore (oligocene?) di Val di Lonte, nel Vicentino, e cinque nell'oligocene piemontese (*Tongriano* di Monbasiglio presso Ceva [De Alessandri]).

Calcare e marne di Gassino.

Coll. Rovasenda (4 denti).

---

[1]) Dopo eseguito il disegno, ho fatto parzialmente isolare il dente alla fig. 34, ch'era incastrato nella marna, allo scopo di vedere la faccia interna della corona.

Gen. OXYRHINA Agassiz

[*Rech. sur les poiss. foss.*, vol. III, 1838, p. 86]

Oxyrhina Desori Agassiz

Tav. II, fig. 24-38

Sinonimia generale

L. Agassiz, *Poiss. foss.*, vol. III, 1843, p. 282, tav. 37, fig. 8-13. — A. S. Woodward, *Cat. foss. fish. B. M.*, p. I, 1889, p. 382. — Id., *Geol. Mag.*, dec. III, vol. VIII, 1891, p. 106. — G. De Alessandri, *Mem. Acc. sc. Torino*, ser. II, tom. XLV, 1895, p. 275, fig. 10.—F. Priem, *Bull. Soc. géolog. Fr.*, sér. III, tome XXV, 1897, p. 215, tav. 7, fig. 5-6 [*Oxyrhina Desori*].

L. Agassiz, *Loc. cit.*, 1843, p. 282, tav. 37, fig. 3-5 [*Ox. leptodon*] (*Ox. Desori*, in Lawley, *Quattro mem. sopra resti foss.*, 1877, p. 21; Woodward, *Cat. cit.*, p. 382).

E. Sismonda, *Mem. r. Acc. sc. Torino*, ser. II, tom. X, 1846, p. 41, tav. 1, fig. 37-40. — F. Bassani, *Itt. Ven.*, 1877, p. 27 [*Ox. complanata*] (*Ox. hastalis*, in Bassani, *Itt. mioc. Sard.*, 1891, p. 32; De Alessandri, *Loc. cit.*, p. 274).

R. W. Gibbes, *Journ. Acad. nat. sc. Philad.*, ser. II, vol. I, 1849, p. 203, tav. 27, fig. 172, 173. — O. G. Costa, *Atti Acc. Pont.*, vol. VII, 1856, tav. 7, fig. 12 [*Ox. Wilsoni*] (*Ox. Desori*, in Woodward, *Cat. cit.*, p. 383; *Lamna salentina*, in Bassani, *Itt. mioc. Sard.*, 1891, p. 22-23).

G. Michelotti, *Études sur le mioc. inf. de l'Italie sept.*, 1861, p. 144, tav. 14, fig. 10-12 [*Ox. incerta*] (*Ox. Desori*, in Woodward, *Cat. cit.*, 1889, p. 383; De Alessandri, *Mem. Acc. sc. Torino*, ser. II, tom. XLV, 1895, p. 275).

G. Vincent, *Ann. Soc. malac. Belg.*, vol. XI, 1876, p. 125, tav. 6, fig. 3 [*Ox. Winkleri*] (*Lamna salentina* [*L. sulcata* e *L. Lawleyi*], in De Alessandri, *La pietra da cantoni di Rosignano e di Vignale*, 1897, p. 39, nota 1).

F. Bassani, *Nuovi squalidi fossili* (Atti Soc. tosc. sc. nat., vol. III), 1877, p. 2, fig. 2 [*Ox. Zignoi*].

F. Noetling, *Abh. geol. Specialk. Preussen und Thüring. Staaten*, vol. VI, part. III, 1885, p. 50, tav. 3 [*Ox. xiphodon*].

O. G. Costa, *Atti Acc. Pont.*, vol. V, 1853, p. 345, tav. 9, fig. 6 [*Otodus salentinus*] (*Lamna salentina*, in Woodward, *Cat. cit.*, 1889, p. 409; Bassani, *Itt. mioc. Sard.*, 1891, p. 22, tav. 2, fig. 12, 14 e 15; De Alessandri, *Mem. Acc. cit.*, ser. II, tom. XLV, 1895, p. 271, fig. 6).

G. G. Gemmellaro, *Atti Acc. Gioenia sc. nat.*, ser. II, tom. XIII, 1857, p. 310, tav. 1, fig. 10 [*Otodus sulcatus* (Sism., non Geinitz)].

F. Bassani, *Nuovi squalidi foss.* (Loc. cit.), 1877, p. 4, fig. 3-5 [*Otodus Lawleyi*] (*Lamna* [? *Oxyrhina*] *Lawleyi*, in Woodward, *Cat. cit.*, 1889, p. 408).

G. G. Gemmellaro, *Loc. cit.*, 1857, p. 318, tav. 6, fig. 15-16 [*Lamna crassidens*].

G. G. Gemmellaro, *Loc. cit.*, 1857, p. 319, tav. 6, fig. 17 [*Lamna Lyelli*] (*Ox. Desori*, in Woodward, *Cat. cit.*, 1889, p. 383).

G. G. Gemmellaro, *Loc. cit.*, 1857, p. 319, tav. 6, fig. 22 [*Lamna inaequilateralis*] (*Ox. Desori*, in Lawley, *Quattro mem. sopra resti foss.*, 1877, p. 30; Woodward, *Cat. cit.*, 1889, p. 383).

Sinonimia degli esemplari di Gassino

1846 — OXYRHINA DESORI — E. Sismonda, *Mem. r. Acc. sc. Torino*, ser. II, tom. X, p. 44, tav. 2, fig. 7-16 [rip. in Gastaldi, *Mem. Acc. pred.*, ser. II, tom. XIX, 1861, p. 63; Bassani, *Itt. Ven.*, 1877, p. 27; Portis, *Boll. Com. geol.*, 1886, p. 197; Woodward, *Cat. cit.*, 1889, p. 382; Sacco, *Boll. Soc. geol. it.*, 1890, p. 295; Trabucco, *Vera pos. terr. terz. bac. piem.*, 1893, p. 15].

1846 — OXYRHINA HASTALIS — E. Sismonda, *Loc. cit.*, p. 40, tav. 1, fig. 41, 43 e 44 (non fig. 42, 45-47) [rip. in Gastaldi, Portis, Sacco e Trabucco, *Loc. cit.*; Bassani, *Itt. Ven.*, 1877, p. 27, e *Itt. mioc. Sard.*, 1891, p. 3 e 31; Nicolis, *Olig. e mioc. nel sist. M. Baldo*, 1884, p. 37; Woodward, *Cat. cit.*, p. 385; De Alessandri, *Mem. Acc. Torino*, Loc cit., p. 274].

1846 — OXYRHINA MINUTA — E. Sismonda, *Loc. cit.*, p. 44, tav. 2, fig. 36-39 [rip. in Gastaldi, Portis, Sacco e Trabucco, *Loc. cit.*; Bassani, *Itt. Ven.*, 1877, p. 29] (*Ox. Desori*, in De Alessandri, *Loc. cit.*, 1895, p. 275).

1846 — OXYRHINA ISOCELICA — E. Sismonda, *Loc. cit.*, p. 43, tav. 2, fig. 1-6 [rip. in Gastaldi, Portis, Sacco e Trabucco, *Loc. cit.*] (*Ox. Agassizi* [= *Ox. hastalis*] in Lawley, *Quattro mem.*, 1877, p. 21; Issel, *Contr. geol. lig.*, 1886, p. 55; Pollini, *Avanzi pesci foss. terz.* ecc., 1889, p. 77.—*Ox. hastalis*, in Woodward, *Cat. cit.*, 1889, p. 385; Bassani, *Itt. mioc. Sard.*, 1891, p. 32; De Alessandri, *Loc. cit.*, 1895, p. 274).

1846 — OTODUS SULCATUS — E. Sismonda (non Geinitz), *Loc. cit.*, pag. 39, tav. 1, fig. 34 a 36 [rip. in Gastaldi, Portis, Sacco e Trabucco, *Loc. cit.*] (*Lamna sulcata*, in Woodward, *Cat. cit.*, 1889, p. 409; *Lamna salentina* (pars) e *Ox. Desori* (pars), in De Alessandri, *Loc. cit.*, 1895, p. 271).

1861 — OXYRHINA DESORI — G. Michelotti, *Et. mioc. inf. It. sept.*, 1861, p. 145.

1893 — OXYRHINA CRASSIDENS [1]) — L. di Rovasenda, *Boll. Soc. geol. it.*, p. 419 [rip. in Trabucco, *Boll. id.*, 1895, p. 117].

1893 — OXYRHINA LEPTODON — L. di Rovasenda, *Loc. cit.*, p. 419 [rip. in Trabucco, *Boll. Soc. geol. it.*, 1895, p. 117 e 123].

1893 — OXYRHINA XIPHODON — L. di Rovasenda, *Loc. cit.*, p. 419 [rip. in Trabucco, *Boll. cit.*, 1895, p. 117 e 123].

1895 — OXYRHINA CRASSA [2]) — G. Trabucco, *Boll. cit.*, p. 124.

Le numerose forme presentate dai denti di *Oxyrhina Desori* secondo il posto occupato nelle mascelle, e il leggero rilievo della corona — apparentemente simile ad una piccola orecchietta laterale, molto compressa — che alcuni di essi mostrano alla base del cono, hanno cagionato una certa confusione nella loro determinazione, promovendo l'istituzione di parecchie specie, che devono esserle associate, come mi sono convinto in seguito a recenti studii comparativi, fatti in gran parte sugli esemplari originali.

---

[1]) In questa citazione è stato sbagliato per inavvertenza il nome generico da Rovasenda, il quale voleva dire *Lamna crassidens* Ag. e non *Oxyrhina crassidens* Dixon, nè *Ox. crassa* Ag., come ha interpretato il prof. Trabucco (*Boll. cit.*, 1895, p. 124).

[2]) Vedi nota 1).

Così le appartengono, tra altre, *Lamna inaequilateralis* Gemm. e *L. Lyelli* id., già ascritte a *Ox. Desori* da Woodward; *Ox. leptodon* Agassiz [1]), *Ox. complanata* Sism. e *Ox. isocelica* id., che in precedenti lavori io aveva erroneamente riferite all'*hastalis*; *Lamna salentina* O. G. Costa sp. (*Otodus salentinus* id. = *L. Lawleyi* Bass. sp. [*Otodus Lawleyi* id. [2])]), e *Lamna sulcata* Sism. sp. (*Otodus sulcatus* id. [3])), della quale, nei miei *Ittioliti mioc. della Sardegna* (pag. 23, nota 3), avevo già rilevato gli stretti rapporti con *Lamna salentina*.

Le vanno pure riferiti, come ha già detto De Alessandri, i denti di Gassino pubblicati da Sismonda col nome di *Ox. minuta*, che ne rappresentano l'età giovanile.

E sono parimenti di *Ox. Desori* i tre esemplari gassinesi che Sismonda attribuì erroneamente all'*hastalis* (*Loc. cit.*, tav. I, fig. 41, 43 e 44 [4])).

L'*Oxyrhina Desori* visse abbondante nell'eocene medio e superiore (Belgio, Prussia, Italia [Fumane, Grancona, Brendola ecc.], Egitto, Alabama, Carolina mer.) e continuò rigogliosa nell'oligocene e nel miocene. Fu citata anche nel pliocene, ma i denti rinvenuti in esso potrebbero forse appartenere all'attuale *Oxyrhina Spallanzanii* Bonp.

A Gassino è rappresentata da numerosi denti, spettanti a individui di differente età e a tutte le parti delle mascelle: alcuni di essi (fig. 24 e 32) presentano un piccolo rilievo ai lati ed alla base della corona, il quale peraltro non è un vero conetto laterale, ma una semplice extroflessione dello smalto, così come talvolta si vede pure nei denti di *Ox. Spallanzanii* [5]).

Alla stessa specie riferisco anche due vertebre, quasi intere, raccolte nella marna, in cui la sostanza organica è stata completamente trasformata (fig. 35-38). La superficie laterale è limitata da orli alquanto rilevati; l'interna è percorsa da numerosi solchi circolari concentrici, molto vicini fra loro, varii dei quali sono più distinti. Vertebre identiche a queste ho riscontrate nel calcare eocenico ad *Halitherium veronense*, *Coelorhynchus rectus*, ecc. di Monte Zuello (Veronese).

Calcare e marne di Gassino.

Coll. Rovasenda (moltissimi denti e due vertebre). — Museo geol. univ. di Torino (parecchi denti) e di Napoli (7 denti).

---

[1]) Gli esemplari illustrati da Agassiz, già associati a *Ox. Desori* da Lawley e da Woodward, sono denti laterali della mascella superiore.

[2]) A. S. Woodward aveva già esposto il dubbio che questa specie dovesse riferirsi al gen. *Oxyrhina*.

[3]) I caratteri che indussero Sismonda a fondare questa specie, cioè « la gracilità del cono, la piccolezza delle orecchiette dentiformi laterali e il solco sul lato interno della radice », dimostrano appunto ch'essa è sinonimo di *Ox. Desori*.

[4]) Il dente alla fig. 42 della citata tavola di Sismonda e l'altro alle fig. 45-47 (che è veramente di *Oxyrhina hastalis*) non provengono da Gassino (Vedi Sismonda, *Loc. cit.*, p. 40-41).

[5]) Mi sembra molto probabile che i denti dell'eocene superiore di Moeskirch (Baden) illustrati da Agassiz col nome di *Lamna crassidens* (*Poiss. foss.*, vol. III, p. 292, tav. 35, fig. 8-21) rappresentino, almeno in gran parte, *Oxyrhina Desori*. Soltanto le fig. 11 e 17 (che forse potrebbero essere di *Odontaspis verticalis*) mostrano piccoli conetti laterali; tutte le altre ne mancano.

Gen. CARCHARODON Müll. et Henle

[*Syst. Beschreibung d. Plagiostomen*, 1841, p. 70]

Carcharodon auriculatus Blainv. sp.

Tav. I, fig. 36-39

Sinonimia generale

H. D. de Blainville, *Nouv. Dict. d'hist. nat.*, vol. XXVII, p. 384 [*Squalus auriculatus*].

L. Agassiz, *Poiss. foss.*, vol. III, 1843, p. 254, tav. 28, fig. 17-19. — A. S. Woodward, *Cat. foss. fish. B. M.*, part. I, 1889, p. 411. — F. Bassani, *Avanzi di C. auriculatus nel calc. eoc. di Valle Gallina*, 1895. — F. Priem., *Bull. Soc. géol. Fr.*, 3ᵉ sér., tom. XXV, 1897, p. 216, tav. 7, fig. 7 [*Carcharodon auriculatus*].

L. Agassiz, *Loc. cit.*, p. 258, tav. 28, fig. 11-16. — F. Dixon, *Foss. Sussex*, 1850, p. 204, tav. 11, fig. 19 [*Carcharodon heterodon*].

L. Agassiz, *Loc. cit.*, p. 255, tav. 28, fig. 20-25 e tav. 30, fig. 3; p. 257, tav. 30, fig. 1; p. 257, tav. 30 *a*, fig. 14; p. 258, tav. 28, fig. 7; p. 258, tav. 28, fig. 8-10 [*Carcharodon angustidens, lanceolatus, toliapicus, disauris e megalotis*].

Sinonimia degli esemplari di Gassino

1846 — Carcharodon megalodon — E. Sismonda, *Mem. r. Acc. sc. Torino*, ser. II, tom. X, p. 34, tav. 1, fig. 11-13 [rip. in Gastaldi, *Mem. Acc. pred.*, ser. II, tom. XIX, 1861, p. 63; Portis, *Boll. Com. geol.*, 1886, p. 197; Woodward, *Cat. foss. fish. B. M.*, part. I, 1889, p. 415; Sacco, *Boll. Soc. geol. it.*, 1890, p. 295; Bassani, *Itt. mioc. Sard.*, 1891, pp. 3 e 14; Trabucco, *Vera pos. terr. terz. bac. piem.*, 1893, pp. 15 e 29; Id., *Boll. Soc. geol. it.*, 1895, p. 122; De Alessandri, *Mem. r. Acc. sc. Torino*, ser. II, tom. XLV, 1895, p. 267].

1846 — Carcharodon crassidens — E. Sismonda, *Loc. cit.*, p. 35, tav. 1, fig. 32-33 [rip. in Gastaldi, Portis e Sacco, *Loc. cit.*; erron. riferito a *C. megalodon* in Woodward, *Loc. cit.*, p. 415; Bassani, *Loc. cit.*, p. 15].

1846 — Carcharodon angustidens — E. Sismonda, *Loc. cit.*, p. 36, tav. I, fig. 30-31 [rip. in Portis e Sacco, *Loc. cit.*; erron. rif. a *C. megalodon* in Bassani, *Loc. cit.*, p. 15; De Alessandri, *Loc. cit.*, p. 267].

1846 — Carcharodon productus — E. Sismonda, *Loc. cit.*, p. 37, tav. 1, fig. 25-29 [rip. in Gastaldi, Portis e Sacco, *Loc. cit.*; Nicolis, *Olig. e mioc. nel sist. del M. Baldo*, 1884, p. 37; erron. rif. a *C. megalodon* in Woodward, *Loc. cit.*, p. 415; Bassani, *Loc. cit.*, p. 15; De Alessandri, *Loc. cit.*, p. 297].

1861 — Carcharodon angustidens — G. Michelotti, *Études sur le mioc. inf. de l'Italie sept.*, p. 142.

1866 — Carcharodon lanceolatus — O. G. Costa, *Nuove oss. int. ai foss. di Gassino* ecc., p. 11, tav. 1, fig. 10.

1893 — Carcharodon auriculatus — G. Trabucco, *Vera pos. terr. terz. bac. piem.*, p. 15 e 17.

1893 — Carcharodon productus — L. di Rovasenda, *Boll. Soc. geol. it.*, p. 418 [rip. in Trabucco, *Boll. id.*, 1895, pp. 117 e 122].

1893 — Carcharodon heterodon — L. di Rovasenda, *Loc. cit.*, p. 418 (« *heretodon* », per errore di stampa) [rip. in Trabucco, *Loc. cit.*].

1893 — CARCHARODON ANGUSTIDENS — L. di Rovasenda, *Loc. cit.*, p. 418 [rip. in Trabucco, *Loc. cit.*].
1893 — CARCHARODON POLYGYRUS — L. di Rovasenda, *Loc. cit.*, p. 418 [rip. in Trabucco, *Loc. cit.*].
Ms. — CARCHARODON AURICULATUS — L. di Rovasenda, *in sch.*

Nel calcare e nelle marne di Gassino i denti di *Carcharodon auriculatus* sono abbastanza comuni: ve n'ha di anteriori, di laterali e di posteriori, appartenenti ad entrambe le mascelle. Due — già indicati da Rovasenda col nome di *C. heterodon* — sono riprodotti alle fig. 36-39. Uno di essi, anteriore della mascella superiore (fig. 36-37), identico ad altri del calcare parisiano di Valle Gallina presso Avesa (Verona) [1]), ha il cono eretto, la faccia esterna debolmente convessa, l'interna parimenti convessa con solita leggiera depressione mediana, i denticelli secondarii sviluppati e la radice incavata e rigonfia interiormente. L'altro, posteriore (fig. 38-39), è ricurvo all'indietro ed ha i conetti laterali molto robusti e nettamente distinti dal principale.

A questa specie dev'essere riferito *Carch. crassidens* Sismonda, delle marne di Gassino, che Woodward ed io associammo erroneamente al *megalodon*. Io ho esaminato l'originale, che si conserva nel Museo geologico universitario di Torino: il rigonfiamento della radice e quello della faccia esterna della corona (che, del resto, non è così accentuato come apparisce dalla figura del Sismonda) scostano l'esemplare da quest'ultima specie e lo fanno ascrivere all'*auriculatus*. I conetti laterali non sono conservati, perchè il dente è rotto d'ambo i lati, in corrispondenza di essi.

Le appartengono pure gli esemplari, imperfetti, di Gassino pubblicati dallo stesso Sismonda coi nomi di *C. angustidens*, *megalodon* e *productus*, che io, nel '91, seguendo in parte l'opinione del predetto naturalista inglese, collocai indebitamente in sinonimia col *megalodon*.

Il *C. auriculatus*, copioso nell'eocene medio e superiore (Inghilterra [Bracklesham e Hampshire], Francia [Calcaire grossier], Belgio, Baviera [Kressenberg], Italia [S. Giovanni Ilarione, Grancona, Avesa, ecc.], America settentrionale [Carolina del Sud e Alabama]), divenne più scarso nell'oligocene e si spense, a quanto pare, nel miocene inferiore. Fra gli esemplari di Gassino si riscontrano sopratutto le forme dell'eocene di Valle Gallina presso Avesa e di Kressenberg.

Calcare e marne di Gassino.

Coll. Rovasenda (31 denti) — Coll. E. Forma (1 dente [Cava Aprile]) — Museo geol. di Torino (3 denti).

Carcharodon subserratus Agassiz

Tav. I, fig. 40

Sinonimia generale

L. Agassiz, *Poiss. foss.*, vol. III, 1843, p. 260, tav. 36, fig. 14-15. — A. S. Woodward, *Cat. foss. fish. B. M.*, part. I, 1889, p. 411 [*Carcharodon subserratus*].
L. Agassiz, *Loc. cit.*, p. 260, tav. 36, fig. 16-21 [*Carcharodon Escheri*] (*C. subserratus*, in Woodward, *Loc. cit.*, p. 411).

---

[1]) F. Bassani, *Avanzi di Carcharodon auriculatus* ecc., pag. 9, fig. 3 (Mem. Acc. agr. di Verona, vol. LXXI, ser. III, fasc. I, 1895).

Sinonimia dell'esemplare di Gassino

Ms. — Carcharodon Escheri? — L. di Rovasenda, *in sch.*

Quantunque questa specie sia imperfettamente conosciuta e lasci qualche dubbio sulla sua validità, credo opportuno di riferirvi il dente riprodotto alla fig. 40, che corrisponde ai caratteri dati da Agassiz e da Woodward. Esso è piantato con la faccia interna nella marna, nè consente di essere isolato. La superficie esterna è quasi piatta. La base dello smalto cammina orizzontale. Il cono dentario si eleva diritto; le seghettature marginali sono deboli e talvolta bifide. Non esistono conetti laterali.

Il ritrovamento a Gassino di quest'unico dente associato a molti altri di *C. auriculatus* fa sorgere il sospetto che il *C. subserratus* rappresenti quest'ultima specie. Nè è difficile che ad esso si rannodi *C. leptodon* Ag. È vero che tanto il *leptodon* come il *subserratus* mancano di denticelli alla base della corona; ma io ho riscontrato, nel terziario inferiore di Lonigo (Vicentino), un esemplare di *C. auriculatus* che ha il conetto solo da un lato.

In ogni modo, fino a prova ulteriore, vista l'assenza dei denticelli laterali, si può ritenere il *C. subserratus* come specie valida. Il dente tipico proviene dall'eocene inferiore (Argilla di Londra, Isola di Sheppey); altri (ai quali il nostro si avvicina sopratutto) si raccolsero nell'eocene superiore di Kressenberg.

Marna di Gassino.

Coll. Rovasenda (1 dente).

Fam. Carchariidae

Gen. CARCHARIAS Cuvier

[*Règne animal*, vol. II, 1817, p. 125]

Subgen. Aprionodon Gill

[*Ann. Lyc. nat. hist. New York*, vol. VII, 1862, pp. 401, 411]

Carcharias (Aprionodon) frequens Dames

Tav. II, fig. 10 e 11

Sinonimia generale

W. Dames, *Ueber eine tert. Wierbelthierf. v. d. westlich. Insel des Birket-el-Qurùn im Fajum (Egypt)*, in Sitzungsb. k. preuss. Akad. Wiss., 1883, part. I, p. 143, tav. 3, fig. 7 *a-p* [*Carcharias* (*Aprionodon*) *frequens*].

Riferisco a questa specie tre denti, due dei quali sono riprodotti alle fig. 10 e 11. In quello alla fig. 11, piantato con la faccia esterna nella roccia, la corona, a margini interi e a base larga, è corta, convessa e alquanto obliqua. La radice, sviluppata, ha una branca più lunga dell'altra, è leggermente incavata ed è percorsa da un solco verticale mediano. Anche gli altri caratteri corrispondono a quelli esposti da Dames per gli esemplari illustrati da lui, che provengono dall'eocene di Birket-el-Qurùn (Egitto).

Calcare di Gassino.

Coll. Rovasenda (3 denti).

Fam. **Notidanidae**

Gen. NOTIDANUS Cuvier

[*Règne animal*, vol. II, 1817, p. 128]

Notidanus primigenius Agassiz

Tav. II, fig. 13-15

Sinonimia generale

L. Agassiz, *Poiss. foss.*, vol. III, 1843, p. 218, tav. 27, fig. 6-8 e 13-17. — F. Bassani, *Itt. Ven.* 1877, p. 19, e *Itt. mioc. Sard.*, 1891, p. 44. — F. Noetling, *Abh. geol. Specialk. Preussen u. Thüring. Staaten*, vol. VI, part. III, 1885, p. 17, tav. 1, fig. 4-5. — A. S. Woodward, *Geol. Magazine*, dec. III, vol. III, 1886, p. 216, tav. 6, fig. 19, 20, 22, e *Cat. foss. fish. Br. M.*, part. I, 1889, p. 163 [*Notidanus primigenius*].

L. Agassiz, *Loc. cit.*, p. 220, tav. 27, fig. 9-12 [*N. recurvus*] (*N. primigenius*, in Woodward, *L. c.*).

Sinonimia degli esemplari di Gassino

1893 — Notidanus primigenius — L. di Rovasenda, *Boll. Soc. geol. it.*, p. 419 [rip. in Trabucco, *Boll. id.*, 1895, pp. 118 e 124].

1893 — Notidanus sp. (*a piccoli denti convessi e ricurvi*) — L. di Rovasenda, *Loc. cit.* (*Not. recurvus*, in sch.).

A *Notidanus primigenius* vanno molto probabilmente riferiti sei denti, alcuni inferiori, altri superiori, quantunque per le loro piccole dimensioni possano lasciare qualche dubbio. Il dente antero-superiore, riprodotto alla fig. 14, al pari di un altro, pur anteriore della mascella superiore, non presenta seghettature al cono principale. In quelli mandibolari (fig. 13 e 15) dette seghettature diminuiscono di grandezza dall'alto al basso. L'esemplare alla fig. 13, incompleto, conserva quattro conetti, che si fanno a mano a mano più piccoli.

Not. primigenius, comune nei terreni oligocenici e miocenici, fu riscontrato con sicurezza anche nell'eocene superiore dell'Inghilterra (Argilla di Barton), della Germania settentrionale e dell'Italia (Priabona).

Calcare di Gassino.

Coll. Rovasenda (6 denti).

Notidanus serratissimus Agassiz

Tav. II, fig. 12

Sinonimia generale

L. Agassiz, *Poiss. foss.*, vol. III, 1843, p. 222, tav. 36, fig. 4-5. — H. B. Geinitz, *Abh. naturw. Gesellsch. Isis Dresden*, 1883. p. 108 (con fig. interc.). — A. S. Woodward, *Geolog. Magazine*, dec. III, vol. III, 1886, p. 216, tav. 6, fig. 23-26, e *Cat. foss. fish. B. M.*, part. I, 1889, p. 16 [*Notidanus serratissimus*].

Sinonimia dell'esemplare di Gassino

1893 — NOTIDANUS sp. — L. di Rovasenda, *Boll. Soc. geol. it.*, p. 419.

Fra i sette piccoli denti, più o meno imperfetti, di *Notidanus* raccolti nel calcare di Gassino, ve n'ha uno, della mascella inferiore, il quale appartiene con la massima probabilità a questa specie per il numero relativamente considerevole (7), per la piccolezza e per l'uniformità delle seghettature che stanno al margine anteriore del cono principale e che arrivano fin presso la metà di questo. L'esemplare, probabilmente incompleto, conserva cinque conetti, il primo dei quali è appena più lungo, quantunque un po' più robusto, dei successivi, che sono molto vicini fra loro ed ugualmente sviluppati, ed ha l'orlo anteriore sporgente in avanti. La radice, non interamente conservata, è spessa.

I rappresentanti di questa specie furono riscontrati nell'Argilla di Londra (Isola di Sheppey e Highgate) e nell'eocene superiore di Helmstedt [Brunswick]. Da Winkler vennero citati anche nel *Brusselliano* del Belgio (*Mém. sur des dents du terr. bruxellien*, 1873, p. 10). Un altro esemplare, che ho recentemente esaminato e che appartiene al Museo geologico di Pisa, proviene dal calcare di Spilecco.

Calcare di Gassino.

Coll. Rovasenda (1 dente).

Fam. **Cestraciontidae**

GEN. CESTRACION Cuvier

[*Règne animal*, vol. II, 1817, p. 129]

Cestracion sp.

Tav. II, fig. 16-17

Riferisco a questo genere un piccolo dente incompleto, che fu raccolto nel calcare, da cui l'ho isolato. Ha forma ellittica, con i capi ristretti ed i margini un po' arcuati. La superficie, lievemente convessa, presenta un leggiero rilievo longitudinale quasi mediano e mostra a destra e a sinistra alcune deboli rughe, interrotte, che camminano trasversalmente. La radice è molto bassa.

L'esemplare ha analogia anche coi denti del gen. *Acrodus*, ma mi sembra ch'esso trovi meglio il suo posto fra i *Cestracion* [1]). Presenta qualche affinità con *C. rugosus* Agassiz sp. e con *C. polydictyos* Reuss sp., del cretaceo superiore (Agassiz, *Poiss. foss.*, vol. III, p. 148, tav. 22, fig. 28 e 29 [*Acrodus rugosus* Ag.]; Reuss, *Versteiner. böhm. Kreideform.*, parte II, p. 97, tav. 21, fig. 8 [*Acrodus polydictyos* Reuss]; Woodward, *Cat. foss. fish. B. M.*, parte I, pp. 335 e 336) [2]).

Calcare di Gassino.

Coll. Rovasenda (1 dente).

---

[1]) A questa conclusione m'induce anche la presenza nel calcare di Gassino di tre spine, che appartengono quasi sicuramente al gen. *Cestracion* (Vedi più avanti: *Ittiodoruliti* [pag. 31]).

[2]) O. G. Costa ha descritto, col nome di *Acrodus Gastaldii* n. sp., un dente rinvenuto nel cal-

Fam. **Spinacidae**

Gen. ACANTHIAS Risso

[*Hist. nat. prod. Europe mérid.*, vol. III, 1826, p. 131]

Acanthias orpiensis Winkler sp. (Centrophorus?)

Tav. II, fig. 18-20

Sinonimia generale

T. C. Winkler, *Mém. sur quelques restes de poiss. du syst. heersien*, pag. 12, fig. 13-17 (Arch. Musée Teyler, vol. IV, 1876).—A. Rutot, *Ann. Soc. r. malac. de Belg.*, tom. XI, 1876, p. 29, tav. 1, fig. 3 [*Notidanus orpiensis*].

A. Daimeries, *Bull. Soc. r. malac. de Belgique*, mai-juin 1888, pp. XLIII e XLV [*Biforisodus maior* e *B. minor*].

A. Daimeries, *Bull. Soc. r. malac. de Belgique*, décembre 1888, pp. CII e CIII [*Acanthias Hennequini* e *Ac. Crepini*].

A. S. Woodward, *Catal. foss. fishes British Museum*, part. I, 1889, p. 436 [*Carcharias (Scoliodon) orpiensis*].

A. S. Woodward and C. D. Sherborn, *Catal. British. foss. vertebrata*, 1890, p. 1.— O. Jaekel, *Die eocänen Selachier von Monte Bolca*, 1894, p. 156, nota [*Acanthias orpiensis*].

Riferisco a questa specie, fondata da Winkler su esemplari dell'eocene inferiore del Belgio, sette piccoli denti, piantati con la faccia interna nella roccia: sei nel calcare ed uno nella marna.

La corona è larga e piuttosto bassa ed ha la superficie esterna convessa e l'apice acuto; il suo margine anteriore è sensibilmente ricurvo verso l'indietro, ed il posteriore, profondamente intaccato in un punto, si rileva ad arco fra questo punto e la base. In qualche esemplare il margine anteriore ha delle minutissime intaccature, visibili soltanto con l'aiuto della lente, che lo rendono lievissimamente rugoso o quasi crenato. La corona si prolunga, sulla superficie visibile, in una sottile appendice mediana, che si restringe gradatamente verso il basso. Detta appendice, breve negli esemplari alle fig. 18 e 19, si presenta più allungata nel dente alla fig. 20, in cui mancano le parti basali laterali.

Questa specie, originariamente riferita da Winkler al gen. *Notidanus*, venne ascritta più tardi da Daimeries al gen. *Acanthias*, al quale l'associarono pure A. S. Woodward, che prima l'aveva messa per errore tra i *Carcharias (Scoliodon)*, e Jaekel. Tale determinazione generica peraltro non può dirsi assolutamente sicura, perchè gli esemplari del Belgio, al pari dei nostri, potrebbero essere di *Centrophorus* [1].

---

care di Gassino (*Bull. Assoc. naz. it. degli scienziati* ecc., 1864, pag. 23, tav. 2, fig. 1, e *Annali Acc asp. natur.*, ser. III, vol. III, 1864, p. 30, tav. 5, fig. 1 [rip. in A. Portis, *Boll. Com. geol.*, 1886, p. 198). Tutte le ricerche da me fatte per rintracciare questo esemplare riuscirono vane. Dalla descrizione e dalle figure a me sembra in verità ch'esso non sia un *Acrodus*. — A. Smith Woodward (*Cat. foss. fish. B. M.*, part. I, 1889, p. 299) lo cita come dubbioso. Forse è un *Cestracion*, ma non si può esprimere alcun giudizio sicuro, perchè le figure sono eseguite assai male.

[1]) Müller u. Henle, *Systematische Beschreibung der Plagiostomen*, 1841, p. 88.

Anzi io ritengo più probabile che appartengano a quest'ultimo genere. Infatti, negli *Acanthias* la parte basale dei denti non è mai così alta come nella fig. 15 di Winkler, che per questo carattere si avvicina molto più ai *Centrophorus*. È vero che le fig. 13 e 14, a base bassissima ed a corona pur bassa e fortemente incavata, richiamano nettamente il gen. *Acanthias*, ma potrebbero essere denti dell'estremità mandibolare di *Centrophorus*, di cui le fig. 16 e 17 rappresenterebbero due denti laterali remoti. D'altra parte, dei tre esemplari figurati di Gassino, quello riprodotto alla fig. 20, per lo sviluppo dell'appendice coronale e per la proporzione fra la lunghezza e la larghezza, trova meglio il suo posto fra i *Centrophorus*, di cui sarebbe un dente anteriore, così come gli altri due, che corrispondono alla citata fig. 15 di Winkler e che sarebbero denti laterali.

Concludendo, non è difficile che gli esemplari in discorso, riferiti al gen. *Acanthias*, sieno invece di *Centrophorus*. Tuttavia, siccome insieme ad essi non s'è rinvenuto alcun dente simile a quelli della mascella superiore di quest'ultimo genere, può conservarsi, in via provvisoria, la determinazione fatta da Daimeries e accettata da Woodward e da Jaekel.

Gli esemplari illustrati fin qui provengono dall'eocene inferiore del Belgio (*Heersien* di Orp-le-Grand) e dell'Inghilterra (Strati di Woolwich e di Reading).

Calcare e marne di Gassino.

Coll. Rovasenda (7 denti).

Gen. SCYMNUS Cuvier

[*Règne animal*, vol. II, 1817, p. 130]

Scymnus sp.

Tav. II, fig. 21

Fra i denti di Gassino ve n'ha tre che devono essere riferiti a questo genere, quantunque non si possano rilevare le particolarità, veramente caratteristiche, della radice.

Uno di essi (fig. 21), piantato con la faccia interna nella marna, ha la corona delicata, triangolare, quasi diritta, terminata in punta, leggermente rilevata nel tratto longitudinale mediano e più assottigliata agli orli, lunga 6 millimetri e larga circa 5 nella parte inferiore. I margini laterali sono minutissimamente crenati per tutta la loro estensione; il posteriore, inferiormente, a tre quarti dall'apice, presenta un'insenatura; poi si rileva, dando luogo ad una specie di piccola orecchietta. L'orlo inferiore della corona, al lato anteriore, è incavato; indi scende per brevissimo tratto e poi risale, per limitare in basso l'orecchietta. La parte radicale, col forellino e col solco verticale, non è conservata.

Lo stato di questo esemplare e degli altri due (uno dei quali ha la corona lunga un millimetro) non permette una determinazione specifica, nè il confronto con le specie descritte.

Calcare e marne di Gassino.

Coll. Rovasenda (3 denti).

Fam. Squatinidae

Gen. SQUATINA Duméril

[*Zool. analyt.*, 1806, p. 102]

Squatina prima Winkler sp.

Tav. II, fig. 22-23

Sinonimia generale

T. C. Winkler, *Mém. sur quelques restes de poissons du syst. heersien*, pag. 14, fig. 18-21, in Arch. Musée Teyler, vol. IV, 1874 [*Trigonodus primus*].
A. Daimeries, *Bull. Soc. r. malac. de Belgique*, tom. XXIII, 1888, p. XLIII [*Rhina Winkleri*].
F. Noetling, *Sitzsber. Gesellsch. naturf. Freunde*, 1886, p. 16 [*Squatina prima*].

Sinonimia degli esemplari di Gassino

Ms. — Squatina sp. — L. di Rovasenda, *in sch.*

Vanno ascritti a questa specie due denti, che sono piantati con la faccia interna nel calcare e che — eccettuate le dimensioni, dipendenti dal posto occupato nella bocca — si corrispondono esattamente.

Uno di essi (fig. 22) è un dente laterale della mascella superiore: piccolissimo, ha la radice larga 2 mm. e lunga 2,5; l'altro, più grande (fig. 23), appartenente al tratto anteriore della mandibola, ha la lunghezza di 6 millimetri ed è largo 5 alla base. In tutti e due la corona, convessa e pressochè diritta, termina leggermente ricurva all'apice. Inferiormente essa si allarga da entrambi i lati e si prolunga nel mezzo in una piccola espansione verticale.

Lo studio comparativo fatto da R. Storms fra le varie *Squatina* fossili e fra questa e l'attuale *Sq. angelus* [1]) giova anche a dimostrare che *S. prima* è una specie ben caratterizzata.

Essa è stata riscontrata nell'eocene inferiore e medio del Belgio (dall'*Heersien* al *Laekenien*) [2]).

Calcare di Gassino.

Coll. Rovasenda (2 denti).

---

[1]) R. Storms, *Bull. de la Société belge de géol.*, *de paléont. et d'hydrol.*, tom. VIII, 1894-95, pp. 74-78.

[2]) M. Mourlon, *Géologie de la Belgique*, tom. II, 1881.

Denti simili a questi, ma « meno robusti », sono stati citati da A. Smith Woodward nel *Bruselliano* del Belgio (*Geological Magazine*, dec. III, vol. III, 1891, p. 104). Verosimilmente, essi corrispondono agli esemplari di Gassino, che sono appunto un po' più delicati di quelli descritti da Winkler. Egli li inscrisse col nome di *Squatina* sp., ma io ritengo che la minore robustezza sia un carattere troppo lieve per tenerli distinti da *S. prima*.

Ittiodoruliti

Gen. COELORHYNCHUS Agassiz

[*Rech. sur les poiss. foss.*, vol. V, part. I, 1843, p. 92] [1])

Coelorhynchus rectus Agassiz

Tav. III, fig. 78-80

Sinonimia generale

L. Agassiz, *Poiss. foss.*, vol. V, part. I, 1843, p. 92. — F. Dixon, *Foss. of Sussex*, 1850, p. 112, tav. 10, fig. 14-17 e tav. 11, fig. 26.—R. Owen, *Palaeontology*, 1861, p. 172, fig. 80.—A. de Zigno, *Nuove agg. alla fauna eoc. del Veneto*, 1881, p. 11, fig. 16-18, in Mem. Ist. ven., vol. XXI. — A. S. Woodward, *Geological Magazine*, dec. III, vol. VIII, 1891, p. 107, e *Cat. foss. fishes B. M.*, part. II, 1891, p. 120 [*Coelorhynchus rectus*].

H. Le Hon, *Prél. mém. poiss. tert. Belgique*, 1871, p. 14. — P. J. van Beneden, *Bull. Acc. r. Belg.*, ser. II, vol. XXXI, 1871, p. 500. — T. C. Winkler, *Arch. Musée Teyler*, vol. III, p. 303 [*Coelorhynchus rectus* e *Coel. Burtini*].

Sinonimia dell'esemplare di Gassino

1893 — Ichthyodorulites giannoni — L. di Rovasenda, *Boll. Soc. geol. it.*, vol. XI, p. 419.

Agassiz fondò questa specie sopra alcuni ittiodoruliti raccolti nei depositi eocenici di Bracklesham e da lui erroneamente interpretati come rostri di un teleosteo, della fam. *Xiphidae*. W. C. Williamson, nel 1849, ne dimostrò la natura dermica, pubblicandone una particolareggiata descrizione dei caratteri microscopici e ravvisando in essi una struttura corrispondente a quella delle spine che stanno sulla testa e in varî punti del tronco degli *Ostracion* attuali. Secondo A. Smith Woodward, invece, non è improbabile ch'essi appartengano alla fam. *Chimaeridae*.

In seguito, altri ittiodoruliti della medesima specie furono citati e talvolta figurati da Dixon, Owen, Le Hon, van Beneden, Winkler e Woodward; e nel 1881 de Zigno ne illustrò uno bellissimo, proveniente dal calcare eocenico del Monte Zuello nel Veronese.

Un altro (fig. 78) fu rinvenuto a Gassino e chiamato *Ichthyodorulites Giannoni* dal cav. di Rovasenda, in omaggio al donatore, avv. Giannone, proprietario della cava omonima, dove il fossile venne trovato.

Esso è conservato in buona parte, mancando un piccolo trattó mediano e la punta. I due pezzi figurati raggiungono complessivamente la lunghezza di circa 17 centimetri. Di forma pressochè circolare e diritto, va gradatamente attenuandosi verso l'avanti. La sezione trasversale, circolare, misura il diametro di 9 millimetri alla base, di 8 all'orlo

[1]) Vedi anche: W. C. Williamson, *Phil. Trans.*, 1849, p. 471, tav. 43, fig. 35-37, e 1851, p. 667; A. S. Woodward, *Proc. geol. Assoc.*, vol. X, 1888, p. 330; *Ann. Mag. nat. hist.*, ser. VI, vol. II, 1888, p. 223; *Cat. foss. fishes B. M.*, part. II, 1891, p. 120.

superiore del frammento più grande, di 7 al margine inferiore del pezzo più piccolo, e di 5 all'estremità distale, dove il fossile è incompleto.

Tutta la superficie è percorsa da costicine longitudinali, a sezione trasversa angolare o, per dir meglio, ogivale, generalmente parallele e separate fra loro da solchi poco profondi. La distanza fra gli spigoli di due coste consecutive è di un millimetro. Dette costicine vanno diminuendo di numero a mano a mano che si procede verso l'apice: alla base sono 31; a sei centimetri da questa, 28; a nove centimetri, 27; all'orlo inferiore del frammento più piccolo, 26; a quattro centimetri da quest'orlo, 21; e all'estremità distale, 18. Questa successiva diminuzione numerica dipende dal fatto che alcune delle coste, dopo un tratto variabile di percorso, si assottigliano e finiscono. In generale, terminano per effumazione coste che partono dalla base; talvolta però, quantunque rarissimamente, si vede finita in tal modo anche qualche costicina proveniente dall'apice (fig. 80).

La sezione trasversale dell' ittiodorulito offre una struttura raggiata (fig. 79). Dal contorno della cavità centrale numerose lamelle si dirigono verso la circonferenza, in corrispondenza dei rilievi esterni. La cavità centrale, circolare ed occupante il quarto del diametro, è unica: si noti peraltro che negli esemplari di *Coelorhynchus* tale cavità si presenta divisa solo alla base, che nel fossile di Gassino non permette di venire studiata.

Come ho detto prima, all'esemplare manca pure un tratto mediano, il quale peraltro doveva essere breve; sia perchè al margine inferiore del pezzo più piccolo v' è una sola costa di meno (17), in confronto di quelle che sono al margine distale dell'altro frammento (18); sia perchè la differenza fra i diametri del fossile a livello di queste due estremità è di un solo millimetro. Ammesso che l'ittiodorulito sia conservato integralmente alla base, si può concludere ch'esso misurava la lunghezza complessiva di circa venti centimetri.

Questa specie fu riscontrata nell' Argilla di Londra, negli Strati di Bracklesham, nell'Argilla di Barton, nell'eocene inferiore e medio del Belgio [1]) e nell'eocene del Veneto (M. Zuello). Un altro ittiodorulito di *C. rectus*, che ho esaminato recentemente, proviene dal calcare *parisiano* di Fane (Veronese) e si conserva nella collezione del cav. Enrico de Nicolis in Verona.

Marna di Gassino [Cava Giannone].

Coll. Rovasenda (1 ittiodorulito).

Gen. CESTRACION Agassiz

[*Loc. cit.*]

Cestracion sp.

Tav. III, fig. 69-74 e fig. 75-77?

Nelle sue *Recherches sur les poissons fossiles* (vol. III, p. 62, tav. 10 *b*, fig. 8, 10-14) Agassiz ha descritto alcune spine della pinna dorsale del cretaceo superiore di Lewes col nome di *Spinax maior*; più tardi Geinitz (*Palaeontographica*, vol. XX, parte II,

---

[1]) Raro nel *Paniselien*, comune nell'*Ypresien*, comunissimo nel *Bruxellien* e nel *Laekenien* (M. Mourlon, *Géologie de la Belgique*, tom. II, 1881).

p. 211, tav. 40, fig. 36-38) ne illustrò altre del *Pläner* della Sassonia, riferendole alla medesima specie. A. Smith Woodward (*Cat. foss. fish. B. M.*, parte I, p. 337) ritiene giustamente ch'esse debbano venire associate al gen. *Cestracion.*

Ora, tra i fossili del calcare di Gassino v'ha tre avanzi che corrispondono a quelli succitati e più propriamente alla fig. 11 dell'Agassiz e, meglio ancora, alla fig. 38 del Geinitz. Essi sono alquanto compressi, a sezione trasversale ellittica, un po' arcuati, terminanti in punta, col margine convesso più sottile dell'altro, che si mostra ottuso, specialmente nella parte inferiore, dove presentano alcune deboli strie longitudinali. Non si veggono le linee parallele oblique di cui parla l'Agassiz.

A questo proposito, giova notare che Daimeries (*Bull. Soc. r. malac. de Belgique*, tom. XXIII, 1888, p. CIII) cita nell'eocene inferiore del Belgio una spina della pinna dorsale, che si avvicina assai a quelle descritte dall'Agassiz, dalle quali differisce per le dimensioni minori e per la forma più affilata. Precisamente così come gli esemplari di Gassino, che ritengo spine della seconda dorsale.

Allo stesso genere riferisco con dubbio il grande frammento riprodotto alla fig. 75, che probabilmente è una spina della prima dorsale. Manca della parte basale e della distale. Lungo 14 centimetri, misura la larghezza di 24 millimetri all'estremità inferiore e di 21 alla superiore. Nel tratto centrale ha lo spessore di 13 mm.; di 7 in alto, e di 11 alla base. Compresso, a sezione ellittica, col margine anteriore più ottuso dell'altro, è leggermente arcuato in due sensi: lateralmente e dall'avanti all'indietro. Inferiormente, dove lo smalto è ancora conservato, presenta tracce di strie longitudinali. — La sua determinazione è incerta. Offre qualche rapporto con l'esemplare del cretaceo di Lewes illustrato da Agassiz col nome di *Spinax maior* (*Poiss. foss.*, vol. III, p. 62, tav. 10 *b*, fig. 12-13). Verisimilmente, se non è di *Cestracion*, appartiene almeno ad un pesce della famiglia *Cestraciontidae.*

Calcare di Gassino.

Coll. Rovasenda (4 spine delle pinne dorsali).

Subcl. GANOIDEI

Fam. **Pycnodontidae**

Gen. PYCNODUS Agassiz

[*Rech. sur les poiss. foss.*, vol. II, parte I, 1833, p. 16, e parte II, 1843, p. 183]
(Sin. *Periodus*, Agassiz, *Loc. cit.*, vol. II, parte II, p. 201).

Questo genere viveva certamente a Gassino, dov' è rappresentato da parecchi denti. Per disgrazia essi sono tutti isolati e perciò non permettono una fondata determinazione specifica, toltone uno, che va riferito con la massima probabilità a *P. Koenigi.*

Pycnodus Koenigi Agassiz sp.

Tav. II, fig. 1-3

Sinonimia generale

L. Agassiz, *Poiss. foss.*, vol. II, parte II, 1839-44, p. 201, tav. 72 *a*, fig. 61-62. — F. Dixon, *Foss. Sussex*, 1850, p. 205, tav. 10, fig. 13 [*Periodus Koenigi*].
A. S. Woodward, *Catal. foss. fish. B. M.*, parte III, 1895, p. 278 [*Pycnodus Koenigi*].

Il denticello, piantato nel calcare, ha forma ellittica, con sezione longitudinale ovoidale. La superficie superiore, leggermente convessa, è appiattita nella parte mediana, dove presenta (come nell'avanzo illustrato da Agassiz) numerosi puntini, disposti irregolarmente, prodotti da usura. La corona è percorsa, verso la base, da un solco o, per dir meglio, da una depressione, che la cinge tutt'intorno, terminando ai due capi del dente; onde la sezione trasversale (fig. 3) risulta appunto, come fu detto da Agassiz, simile a quella di un cappello a larghe falde.

Quantunque si tratti di un esemplare isolato, parmi che i suoi caratteri lo facciano ascrivere a *P. Koenigi*, i cui denti sono stati trovati nell'eocene medio di Sussex (Strati di Bracklesham) e del Belgio. Probabilmente esso apparteneva alla serie mediana della mascella inferiore.

Calcare di Gassino.

Coll. Rovasenda (1 dente).

Pycnodus sp. sp.

Tav. II, fig. 4-9

Altri denti, alcuni dei quali sono riprodotti alle fig. 4-9, appartengono pure al gen. *Pycnodus*. Sono circolari e un po' depressi alla superficie, che negli esemplari alle figure 6 e 8 è finamente punteggiata, per usura. La corona del dente alla fig. 5 ha un piccolo rilievo mediano e presenta alla periferia due file, una sovrapposta all'altra, di minuti bitorzoletti, intercalati da altrettante depressioni: anche questi bitorzoletti sono, verisimilmente, effetto di erosione.

Calcare di Gassino.

Coll. Rovasenda (11 denti).

Subcl. TELEOSTEI

Fam. Gymnodontidae

Gen. DIODON Linn.

[*Syst. nat.*, tom. I, parte III, 1735, p. 1448]

Diodon incertus Michelotti sp.

Tav. III, fig. 66-68

Sinonimia degli esemplari di Gassino

1861 — Phyllodus incertus — G. Michelotti, *Descr. de quelq. nouveaux foss. du terr. mioc. de la coll. de Tnrin*, p. 3, in Revue et Magaz. de zoologie [rip. in I. Cocchi, *Monogr. dei Pharyngodopilidae*, 1864, p. 57].

1889 — Diodon Rovasendae — A. Portis, *Di alcuni gimnodonti fossili italiani*, p. 22, fig. 9 [? 10 a 13] (Boll. r. Comitato geol. it.).

1890 — Diodon incertus — F. Sacco, *Boll. Soc. geol. it.*, vol. IX, p. 296 [rip. in Rovasenda, *Boll. id.*, 1893, p. 419; Trabucco, *Boll. id.*, 1895, p. 118].

Il prof. Portis ha descritto con molti particolari alcuni avanzi di questa specie, raccolti nel calcare di Gassino e conservati nella collezione Rovasenda. Quelli alle fig. 10-13 consistono in semiplacche, che per la loro imperfezione non permettono una sicura determinazione specifica ed hanno poca importanza; ma l' esemplare alla fig. 9, che rappresenta una placca mandibolare quasi completa, è molto interessante. E siccome, per studiarlo meglio, ho disgiunto la parte posteriore dalla anteriore o marginale [1]) ed ho esaminato la sezione verticale di quest'ultima porzione, credo opportuno di aggiungere per essa alcuni cenni a quelli già noti (rimandando per il resto all'accurata descrizione del Portis) e di ripetere la figura del fossile, che nella Nota di questo scienziato non è riuscita bene.

Non si può dire con esattezza che la parte marginale, circondante l'orlo anteriore della grande placca, sia costituita da una ghirlanda « semplice ai fianchi, doppia nel mezzo »: è più probabile invece che i dentini di essa sieno distribuiti su due file ai lati e su tre, irregolarmente disposte, nel tratto mediano (vedi fig. 67). Questi dentini — o fogli — hanno una sezione longitudinale arcuata e formano, dall' alto al basso, quattro serie in senso orizzontale (fig. 68, doppia del vero). I dentini di ciascuna serie, peraltro, non si adagiano con la loro superficie inferiore concava sulla superficie superiore convessa dei denti della serie immediatamente successiva, ma invece i loro due capi poggiano, in generale, sulla parte centrale dei due dentini corrispondenti della serie sottostante. In una parola, essi sono collocati come le tegole sui tetti, cosicchè non si tratta (se pur si possono chiamar pile) di pile verticali, ma oblique.

---

[1]) Come ha già detto il prof. Portis, questo fossile, quando fu estratto, si ruppe, e i due frammenti vennero per molti anni tenuti disgiunti. Più tardi il cav. di Rovasenda pensò di accostare i pezzi, che, incollati, combaciarono in modo da ottenere la completa restaurazione dell'esemplare.

I denti della serie superiore (fig. 67, doppia del naturale) sono di forma irregolare, più o meno tondeggianti o poligonali. La loro superficie, variamente alterata dall'usura, si presenta convessa in alcuni, compressa in altri od anche incavata.

Calcare di Gassino [Cava Chiesa].

Coll. Rovasenda (1 placca mandib. quasi completa; e 3 semiplacche, di specie dubbiosa).

Diodon sp.

Sinonimia dell'esemplare di Gassino

1889 — DIODON MERISTODUS — A. Portis, *Di alc. gimn. foss. it.*, p. 15, fig. 3-4 [rip. in Sacco, *Boll. Soc. geol. it.*, 1890, p. 296; di Rovasenda, *Boll. id.*, 1893, p. 419].

Il prof. Portis fondò questa specie sopra una semiplacca dell'interno della bocca, la cui particolarità più saliente consisterebbe nella presenza di « un solco che attra- « versa dallo avanti allo indietro la faccia libera del foglietto superiore conservandosi « quasi parallelo ed esterno alla sutura mediana da cui dista circa cinque millimetri; « tale solco si affonda verticalmente attraverso tutto lo spessore della lamina e delle « sottostanti e noi lo incontriamo sotto forma di stretta fessura anche sulla faccia infe- « riore del foglio più basso, come ne scopriamo traccia sul lato posteriore perfetta- « mente scoperto della pila. A rendere tanto più evidente la esistenza di tale fatto du- « rante la vita dell'animale giova notare che questa stretta fessura è piena parzialmente « di cemento e che la faccia superiore di ciascuna lamina si inclina in giù in corri- « spondenza di tale solco o fessura..... ».

Ora, è sicuro che non si tratta di una sutura attraversante tutti i fogli della placca, ma di un semplice solco molto irregolare, che non si spinge più in là del primo elemento della pila. Infatti, immerso per qualche tempo il fossile nell' alcool, la materia incastrata nel solco si è sciolta, lasciando scorgere la superficie superiore del secondo foglio scevra da ogni incisione. La stessa cosa si è ripetuta sulla faccia inferiore del foglio più basso, dove esiste anche un solco, pure irregolare, che intacca soltanto il foglietto ora citato e che non giunge fino al lato posteriore della placca, ma si arresta a quattro millimetri da questo.

Quanto alla traccia del solco sulla parete posteriore, non è che apparente. Riguardo, poi, alla inclinazione in giù della faccia superiore di ciascuna lamina in corrispondenza della fessura, è utile osservare ch'essa si ripete in varii altri punti della parete stessa, dipendendo forse dalla cattiva conservazione dell'esemplare. È da ritenersi dunque che i detti due solchi sieno prodotti per erosione.

Tolto quindi di mezzo questo carattere principale, mi sembra che gli altri indicati dal Portis sieno troppo lievi per la istituzione di una nuova specie. Probabilmente, il frammento appartiene a *Diodon incertus*, ma la sua imperfezione non consente una determinazione specifica.

Calcare di Gassino [Cava Chiesa].

Coll. Rovasenda (1 semiplacca).

Fam. **Labridae**

Gen. PHYLLODUS Agassiz

[*Rech. sur les poiss. foss.*, vol. II, parte II, 1843, p. 238] [1])

Phyllodus sp.

Tav. III, fig. 56-65 [2])

Mi pare che i due esemplari riprodotti alle fig. 60-65 sieno denti secondarii di *Phyllodus*. Certo, somigliano molto ad altri delle serie secondarie illustrati da Agassiz e da Cocchi, provenienti dall'argilla di Londra. Ed è probabile che al medesimo genere appartengano anche parecchi dentini (tre dei quali sono disegnati alle fig. 56-59), quantunque, essendo piantati nella roccia, possano lasciare qualche dubbio. Hanno forma ellittica, tranne l'esemplare alle fig. 63-65 (che ho isolato dal calcare), e sono assai allungati, con uno o entrambi i capi molto ristretti. I due alle fig. 60-65 sono delicati, bassi, a corona sottilissima. Quello alla fig. 57 presenta alla superficie delle rugosità molto irregolari, prodotte, a quanto sembra, da corrosione.

Tutti sono stati raccolti nel calcare, meno l'esemplare alle fig. 60-62, che ho tratto dalla marna.

Calcare e marna di Gassino.

Coll. Rovasenda (23 denti). — Museo geol. univ. di Napoli (1 dente).

Fam. **Siluridae**

Gen. ARIUS Cuv. et Val.

[*Hist. nat. poiss.*, vol. XV, 1840, p. 53]

Arius sp.

Tav. III, fig. 54-55

Sinonimia generale

A. Smith Woodward, *Cat. foss. fish. British Museum*, part. I, 1889, p. 86 [*Raja similis*].
E. T. Newton, *A contrib. to the hist. of eoc. siluroid fish.*, in Proc. zool. Soc., 1889, p. 205, tav. 21, fig. 4-6. — A. S. Woodward, *Catal. cit.*, alla spiegaz. della tav. 4, fig. 4-5 [*Arius* sp.].

Sinonimia dell'esemplare di Gassino

1864 — Acipenserinus — O. G. Costa, *Bull. Ass. naz. it. degli scienziati* ecc., p. 23, tav. 2, fig. 2; *Ann. Acc. asp. nat.*, ser. III, vol. III, p. 31, tav. V, fig. III *a, b, c* [rip. in Portis, *Boll. Com. geol.*, 1886, p. 198].
1866 — Sturionidens — O. G. Costa, *Nuove osserv. intorno ai foss. di Gassino*, ecc., p. 9.

[1]) Vedi anche I. Cocchi, *Monografia dei Pharingodopilidae*, 1864, pag. 21, in Ann. r. Museo fis. e st. nat. Firenze, vol. I (1866), n.° 8.

[2]) Tutte le figure sono doppie del vero.

L'esemplare, raccolto da O. G. Costa nel calcare di Gassino e da lui ritenuto come uno scudetto dermale, affine a quelli degli Storioni, fu riferito provvisoriamente ad un genere nuovo — *Acipenserinus* — e descritto così: « Figura ovale, alquanto convessa in « ambe le facce; una delle quali irregolarmente rugosa o striata; le rughe o strie fine « partono da un punto quasi centrale, un poco più elevato (attualmente smussato), e « vanno fino alla periferia a modo di raggi, ove divengono più sensibili. La faccia op- « posta è liscia perfettamente... Il contorno è acuto, semplice, con una piccola spor- « genza in uno de' due poli dell'ovale... Diametro maggiore mm. 11; diam. minore « mm. 9; spessezza centrale mm. 4 ».

Invece, esso è un otolito e corrisponde esattamente a quelli provenienti dall'eocene superiore (Argilla di Barton) dell'Hampshire (High Cliff e Chutan), illustrati da E. T. Newton e da A. S. Woodward, il quale, per la loro somiglianza coi tubercoli dermali di *Raja*, li aveva dianzi associati a questo genere.

L'otolito è appuntato ad una estremità e presenta alla superficie superiore alcune delicate linee concentriche ed altre raggiate: di queste ultime, le più distinte sono quelle che si dirigono verso il margine anteriore.

Calcare di Gassino.

Museo geol. univ. di Napoli (1 otolito).

Fam. **Stratodontidae**

Gen. CIMOLICHTHYS Leidy

[*Trans. Amer. phil. Soc.*, vol. XI (1857), p. 95]

Cimolichthys sp.

Tav. III, fig. 1-12

I denti che riferisco al gen. *Cimolichthys* sono in numero di undici. Quantunque presentino forme diverse, è probabile che appartengano ad una stessa specie. Alcuni (fig. 1-6) sono assai compressi, specialmente nel tratto superiore, ed hanno perciò una sezione trasversale irregolarmente e più o meno ellittica; altri (fig. 7-12) sono meno schiacciati. Dei primi, due, rispettivamente lunghi 12 (fig. 1-2) e 6 mm., hanno la forma di triangolo isoscele ed entrambi i margini sottili; due (come quello alle fig. 3-4) sono a base larga, un po' ricurvi, col margine posteriore ottuso e un po' rientrante nel tratto superiore, col margine anteriore sottile e leggermente arcuato e con un piccolo uncinetto, visibile ad occhio nudo, verso la punta, dal lato dell'orlo anteriore; ed uno (fig. 5-6), lungo 14 mm., ha gli orli ottusi e trasparenti vicino all'estremità superiore e presenta, visto alla lente, l'apice a ferro di lancia. Altri quattro denti sono meno compressi ed hanno lunghezza variabile da due (fig. 7-8, ingr.) a otto mm. (fig. 9-10). Qualcuno è diritto; qualche altro è leggermente ricurvo. Finalmente, due altri esemplari (uno dei quali è riprodotto, ingrandito, alle fig. 11-12), pure un po' compressi, presentano la faccia esterna notevolmente convessa, a paragone dell'interna, ed hanno i margini salienti. Tutti sono percorsi su entrambe le facce da sottilissime righe, che si spingono fin presso all'apice.

Ricercando le analogie degli esemplari suaccennati, si rileva:

1° che il dente alle fig. 3-4 [1]) somiglia moltissimo a quelli del cretaceo superiore inglese, pubblicati da Dixon col nome di *Saurodon leanus* Agassiz (denti palatini) [2]), i quali più tardi vennero ascritti da Leidy al suo nuovo genere *Cimolichthys* e chiamati *C. lewesiensis* [3]); così come risponde al dente del *Pläner* di Kosstitz, descritto col nome di *Spinax marginatus* da Reuss alla fig. 11, tav. IV, pag. 8 dell'opera *Versteinerungen der boem. Kreideformation* e da lui erroneamente interpretato come una spina [4]), ed agli altri del *Pläner* di Strählen, illustrati da Geinitz col nome di *Saurocephalus? marginatus* Reuss sp. [5]).

2° che l'esemplare alle fig. 1-2 richiama quelli alle fig. 12 e 14, tav. IV dell'opera citata di Reuss (spine di *Spinax marginatus* Reuss e di *Sp. rotundatus* id. [errore]).

Quanto al dente alle fig. 5-6, a ferro di lancia, esso trova riscontro negli esemplari del *Brusselliano* del Belgio, chiamati da Winkler *Trichiurides sagittidens* [6]), che Hilgendorf riferì al gen. *Lepidosteus* [7]), ma che io non credo tale, sia per la larghezza della sua base paragonata con quella della parte superiore, sia per la curvatura del fossile, sia per la sua forma a ferro di lancia. Ritengo invece che anch'esso debba venire ascritto al gen. *Cimolichthys.*

Rimangono i denti alle fig. 7-12, intorno ai quali può rimanere qualche dubbio. Anche per essi noto peraltro che quello alle fig. 9-10 somiglia agli esemplari cretacei tav. 4, fig. 10 e 13, e tav. 42, fig. 15 e 16 di Reuss, pur ritenuti da questo autore spine di *Spinax*; che quello alle mie fig. 7-8 richiama la fig. 67, tav. 4 di Reuss (*Saurocephalus lanciformis* Harl. [errore]), e che l'altro alle mie fig. 11-12 trova riscontro negli esemplari del *Pläner* boemico (*Palaeontographica cit.*, p. 225, tav. 43, fig. 10 e 11), riferiti da Geinitz con dubbio al gen. *Saurocephalus* (*lanciformis* Agassiz e *dispar* Hébert).

Concludendo, io credo che i succitati denti di Gassino appartengano al gen. *Cimolichthys* e che a questo stesso genere debba essere ascritto anche *Trichiurides sagittidens* Winkler, dell'eocene del Belgio.

Marne di Gassino.

Coll. Rovasenda (11 denti).

---

[1]) Un altro dente, che corrisponde affatto a queste figure, proviene dalla marna eocenica di Biarritz e si conserva nel Museo geologico dell'Università di Napoli.

[2]) F. Dixon, *Geol. of Sussex*, 1850, p. 373, tav. 30, fig. 28, 29 (Vedi anche L. Agassiz, *Poiss. foss.*, vol. V, part. I, p. 102, tav. 25 *c*, fig. 30-31).

[3]) J. Leidy, *Loc. cit.*, p. 95. — E. T. Newton, *Quart. Journ. geol. Soc.*, vol. XXXVI, 1878, p. 792. — A. S. Woodward, *Proc. geol. Assoc.*, vol. X (1888), p. 316.

[4]) Cit. anche nella creta di Meudon da Hébert col nome di *Anenchelum marginatum* e da Winkler con quello di *Trichiurides marginatus* (C. Barrois, *Catal. des poiss. foss. du terr. crét. du nord de la France*, 1874, p. 11. — T. C. Winkler, *Deux. mém. sur des dents de poiss. foss. du terr. brux.*, 1874, p. 23, in nota).

[5]) H. B. Geinitz, *Palaeontographica*, vol. XX, part. II, p. 226, tav. 43, fig. 3-8.

[6]) T. C. Winkler, *Mém. sur des dents de poiss. foss. du terr. brux.*, 1873, p. 8, fig. 6; e *Deux. mém.* ecc., 1874, p. 23, fig. 22 e 23.

[7]) *Zeitschr. deutsch. geol. Gesellschaft*, vol. XXXV, p. 670.

Gen. PACHYRHIZODUS Agassiz

[F. Dixon (ex Agassiz, *Ms.*), *Geol. of Sussex*, 1850, p. 374; E. D. Cope, *Vert. cret. form. West* (Rep. U. S. geol. Survey Territ., vol. II, 1875), p. 200].

Pachyrhizodus (?) sp.

Tav. III, fig. 13-15

A complemento della famiglia *Stratodontidae*, desidero accennare ad un dente, raccolto nella marna di Gassino, da cui l'ho isolato, cilindrico nella parte superiore e un po' ellittico nella inferiore, massiccio, un po' ricurvo, a base larga, coll'apice ottuso, perfettamente liscio, lungo circa un centimetro e largo inferiormente cinque millimetri.

Naturalmente, trattandosi di un solo esemplare, non è facile determinarlo esattamente. Ma devo dire ch'esso richiama in modo notevole quelli del genere cretaceo *Pachyrhizodus* e sopratutto i denti mascellari posteriori di *P. gracilis* Owen sp., del cretaceo superiore di Sussex, originariamente riferiti ad un rettile (R. Owen, in F. Dixon, *Geol. of Sussex*, 1850, p. 380, tav. 37, fig. 1. e *Rept. cret. form.* [Pal. Society, 1851], p. 31, tav. 9, fig. 1 [*Mosasaurus gracilis* Owen]; A. S. Woodward [ex W. Davies e O. C. Marsh, *Ms.*], *Proc. geol. Assoc.*, vol. X, 1888, p. 314).

Marna di Gassino.

Coll. Rovasenda (1 dente).

Fam. Saurocephalidae

Gen. SAUROCEPHALUS Harlan

[*Journ. Acad. nat. sc. Philad.*, vol. III (1824), p. 337].
(Sin. *Daptinus*, E. D. Cope, *Proc. Acad. nat. sc. Philad.*, 1873, p. 339;
E. T. Newton, *Quart. Journ. geol. Soc.*, vol. XXXIV, 1878, p. 439).

Saurocephalus (?) faiumensis Dames

Sinonimia generale

W. Dames, *Ueber eine tert. Wirbelthierf. v. d. westl. Insel des Birket-el-Qurùn im Fajum*, 1883, p. 19, tav. 3, fig. 12 *a*, *b*, *c* [*Saurocephalus faiumensis*].

Tav. III, fig. 16-20

Senza discutere i possibili rapporti di questo genere con *Cimolichthys* e senza decidere se gli esemplari dell'eocene di Birket-el-Qurùn appartengano realmente a *Saurocephalus*, credo di non ingannarmi riferendo ad essi dieci denti, più o meno conservati, raccolti nel calcare e nelle marne di Gassino, alcuni dei quali sono riprodotti alle fig. 16-20.

Di forma triangolare, generalmente diritti, terminati in punta un po' ottusa, a sezione verticale leggermente ogivale, a sezione trasversale ellittica, hanno le due super-

ficie un po' convesse ed i margini assottigliati. Non sono striati; solo l'esemplare alla fig. 19, visto con un forte ingrandimento, presenta le tracce di finissime righe, che vanno dalla base al vertice, e mostra gli orli lievemente rugosi, così che richiama i denti cretacei di *Protosphyraena*.

Trattandosi di denti isolati, riesce difficile una determinazione precisa; in ogni modo, ripeto, essi corrispondono a quelli descritti da Dames, i quali, come la maggior parte dei nostri, non offrono strie, che potrebbero essere scomparse per abrasione.

Calcare e marne di Gassino.

Coll. Rovasenda (10 denti).

Fam. **Sparidae**

Gen. CHRYSOPHRYS Cuvier

[Cuvier et Valenciennes, *Hist. nat. des poissons*, vol. VI, p. 81].
(*Sphoerodus* p. p. Agassiz. — *Capitodus* p. p. Münster).

Chrysophrys sp.

Tav. III, fig. 21-41

Sinonimia degli esemplari di Gassino

1866 — Sphaerodus — O. G. Costa, *Nuove oss. int. ai foss. di Gassino* ecc., p. 8, tav. 1, fig. 7-17.
1893 — Denti di sparoide — L. di Rovasenda, *Boll. Soc. geol. it.*, vol. XI, p. 419.
1893 — Chrysophrys cincta — G. Trabucco, *Sulla vera pos. dei terr. terz. del bac. piem.* (Mem. Soc. tosc. sc. nat., vol. XIII), p. 13-15, tav. 9, fig. 8.

Oltre un centinaio di denti riferibili a questo genere furono raccolti nel calcare di Gassino: alcuni sono molari; altri canini. Ve n'ha di varie grandezze, ma sono, in generale, piccoli. I molari variano dal diametro di un millimetro a quello di quattro, e sono quasi emisferici, a volte depressi alla superficie superiore, raramente appuntati nel centro di questa, e talora forniti di un colletto che separa la corona dalla radice. I canini, lunghi da due a dieci millimetri, sono irregolarmente conici, più o meno smussati e verticali; solo qualche volta si mostrano un po' arcuati.

Una precisa determinazione specifica di questi denti riesce impossibile. Anni addietro, io ho confermato, è vero, il riferimento fatto dal prof. Trabucco di tre denti di Gassino a *Chr. cincta*, aggiungendo ch'essi « hanno un aspetto vicino a quello degli esemplari dell'arenaria bellunese (miocene inferiore) »; ma è pur vero ch'essi somigliano altrettanto a molte specie di *Chrysophrys* riscontrate nei depositi eocenici, oligocenici, miocenici e pliocenici e nei mari attuali. Solo debbo notare che in nessuno dei numerosi denti di Gassino studiati da me ho veduto le distinte pliche verticali alla base, le quali, secondo Agassiz (*Poiss. foss.*, vol. II, p. 214, fig. 68 e 69), costituiscono un carattere che distingue *C. cincta* dalle altre specie. In ogni modo, è anche opportuno rilevare che la provenienza degli esemplari tipici illustrati dall'Agassiz non è esattamente conosciuta (« Styrie — Calcaire grossier? »).

Calcare di Gassino.

Coll. Rovasenda (numerosi denti). — Museo geol. univ. di Napoli (13 denti).

Gen. LOBODUS O. G. Costa [1])

[O. G. Costa, *Nuove osserv. intorno ai foss. di Gassino* ecc., 1866, p. 9].

Lobodus pedemontanus Costa

Tav. III, fig. 42-53

Sinonimia degli esemplari di Gassino

1866 — Lobodus pedemontanus — O. G. Costa, *Loc. cit.*, p. 10, fig. 1-5 [2]).
1893 — Acrodus Gastaldii — L. di Rovasenda [*errore*] [3]), *Boll. Soc. geol. it.*, vol. XI, p. 419.

Nella collezione Rovasenda si conservano numerosi denti, che rispondono a quelli illustrati nel 1866 da Costa. La corona è quasi sempre bassa, irregolarmente conica, leggermente compressa, spesso rivolta da un lato, a superficie liscia, di colore scuro, lucente. L'apice è ottuso; talvolta, per effetto di usura, si mostra tronco o incavato. La radice, di colore giallo scuro, è costantemente più alta della corona ed ampia, espandendosi dalla parte verso la quale quest'ultima è inclinata. Anch'essa è un po' grossa, benchè un po' meno della corona, e tutt'intorno è percorsa da linee molto sottili, vicine e parallele fra loro, regolarissime, che possono efficacemente paragonarsi ai così detti solchi papillari che sono sulla palma della mano dell'uomo e sui polpastrelli delle dita. Negli esemplari maggiori ne conto almeno 20. La linea di demarcazione fra la corona e la radice cammina diritta. Se mi si passa il confronto, alcuni di questi denti (fig. 42-46) somigliano, nel complesso, ad un berretto frigio; altri (fig. 49-53) hanno la corona non più conica, bassissima, con la superficie superiore quasi larga come la base e con la sezione trasversale simile a quella di un battello verso prua.

Gli esemplari più grandi (fig. 46) hanno la lunghezza di 12 millimetri, di cui cinque sono occupati dalla corona, lo spessore di 5 (fig. 48) e la radice larga da 9 a 10. I più piccoli misurano due millimetri di lunghezza e uno spessore presso a poco corrispondente.

I rapporti di questi denticelli non mi riescono molto chiari, così come non lo erano all'autore del genere, che inclinava a ritenerli « appartenenti alla faringe, riscontrandovi qualche analogia con quelli del gen. *Tinca* ». Parendomi di scorgere in essi una lontana affinità con gli *Ancistrodon*, di cui io non conosco che le figure, ne comunicai alcuni al collega Priem, il quale ne escluse assolutamente la spettanza a quest' ultimo genere, dividendo anch'egli l'opinione che sieno forse della fam. *Sparidae*.

Calcare di Gassino.

Coll. Rovasenda (50 denti). — Musei geol. univ. di Torino (1 dente, imperfetto), di Roma [coll. Michelotti] (1 dente) e di Napoli (5 denti).

---

[1]) Nel *Traité de paléontologie* di K. A. v. Zittel (trad. fr., tom. III, p. 95) è citato il gen. *Lobodus* Agassiz. Ma è un errore di stampa: il nome è *Labodus* (J. W. Davis [ex Agassiz, *Ms.*], *Trans. roy. Dubl. Soc.*, ser. II, vol. I, 1883, p. 468.

[2]) Il dente alla fig. 6 di Costa è molto dubbioso. Io non sono riuscito a rintracciare l'originale. Sembra che abbia qualche rapporto coi denti di *Sargus*.

[3]) Vedi pag. 5, nota 6 di questo lavoro.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I.

(Tutti gli esemplari provengono dalle cave di Gassino propriamente dette)

Fig. 1-17. — **Odontaspis elegans** Agassiz sp. [pag. 13] (Esempl. alla fig. 15, coll. Forma; tutti gli altri, coll. Rovasenda).

1. Dente ant., faccia int., gr. nat. (Calcare). — 2, 3. Dente ant., faccia int. e profilo, gr. nat. — 4. Dente ant., faccia int., gr. nat. (Marna). — 5. Dente lat., faccia est., gr. nat. — 6. Dente lat., faccia int., gr. nat. — 7. Lo stesso, faccia int., molto ingr. — 8. Lo stesso, di profilo. — 9, 10. Dente lat., faccia est. e faccia int., gr. nat. (Marna). — 11, 12. Dente lat., faccia int. e profilo, gr. nat. — 13, 14. Dente mediano, faccia int. e profilo, gr. nat. — 15. Dente post., faccia int., ingr. 7 volte (Cava Mela). — 16, 17. Faccia int. di due esemplari, molto ingr.

» 18-23. — **Odontaspis Hopei** Agassiz [pag. 15] (Coll. Rovasenda).

18. Dente ant., faccia est., gr. nat. (Marna). — 19, 20. Dente ant., faccia est. e profilo, gr. nat. (Marna). — 21, 22, 23. Dente ant., faccia int., faccia est. e profilo, gr. nat.

» 24-31. — **Odontaspis verticalis** Agassiz [pag. 17] (Coll. Rovasenda).

24. Dente ant., faccia int., gr. nat. (Marna). — 25, 26. Due denti lat., faccia est., gr. nat. (Calcare). — 27, 28, 29. Dente lat., faccia int., faccia est. e profilo, gr. nat.— 30. Dente lat., faccia int., gr. nat. — 31. Dente post., faccia int., gr. nat. (Calcare).

» 32-35. — **Lamna obliqua** Agassiz sp. [pag. 18] (Coll. Rovasenda).

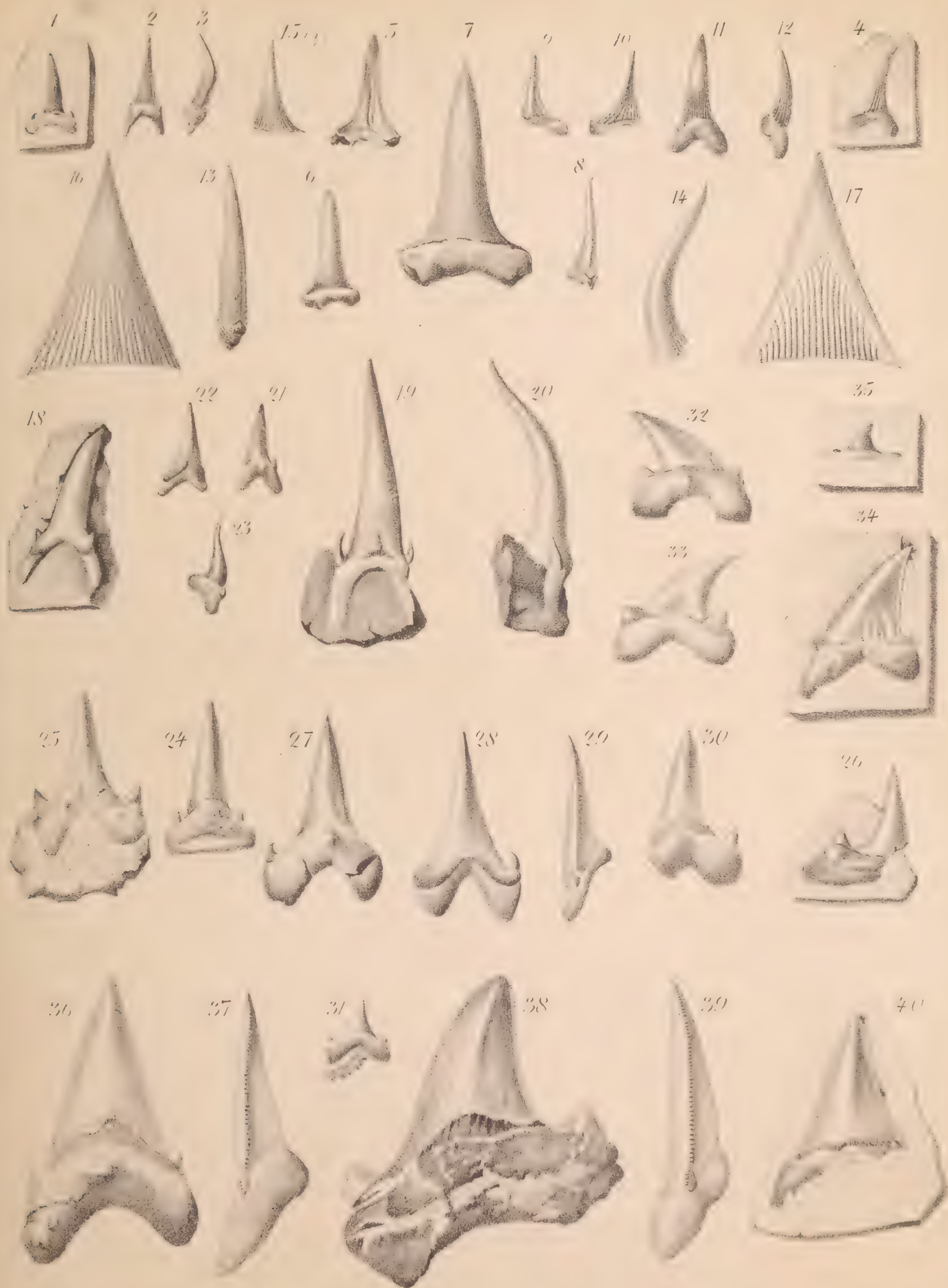
32, 33. Dente lat., faccia int. e faccia est., gr. nat. — 34. Dente lat., faccia est., gr. nat. (Marna). — 35. Dente post., faccia int., gr. nat. (Marna).

» 36-39. — **Carcharodon auriculatus** Blainville sp. [pag. 22] (Coll. Rovasenda).

36, 37. Dente ant. della masc. sup., faccia int. e profilo, gr. nat. — 38, 39. Dente post., faccia int. e profilo, gr. nat.

» 40. — **Carcharodon subserratus** Agassiz [pag. 23] (Coll. Rovasenda).

Dente ant., faccia int., gr. nat. (Marna).

1
2
3
15
5
7
9
10
11
12
4
16
13
6
8
14
17
18
22
21
19
20
32
35
23
34
33
25
24
27
28
29
30
26
36
37
31
38
39
40

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA II.

(Tutti gli esemplari provengono dalle cave di Gassino propriamente dette)

Fig. 1-3. — **Pycnodus Koenigi** Agassiz sp. [pag. 33] (Coll. Rovasenda).
1. Dente della serie mediana della mascella inf., visto dalla faccia sup., gr. doppia del vero (Calcare). — 2. Lo stesso, di profilo. — 3. Sezione trasversale dello stesso, ingr. 4 volte.

» 4-9. — **Pycnodus** sp. sp. [pag. 33] (Coll. Rovasenda).
4. Dente, veduto di profilo, gr. nat. (Calcare). — 5. Dente, doppio del vero (Calcare). — 6, 7. Dente, faccia sup. e profilo (Calcare). — 8, 9. Dente, faccia sup. e profilo, gr. doppia del vero (Calcare).

» 10-11. — **Carcharias (Aprionodon) frequens** Dames [pag. 24] (Coll. Rovasenda).
10. Dente della masc. inf., faccia int., gr. nat. — 11. Dente della mascella inf., faccia int., gr. nat. (Calcare).

» 12. — **Notidanus serratissimus** Agassiz [pag. 25] (Coll. Rovasenda).
Dente della masc. inf. di un individuo giovine, faccia int., gr. nat. (Calcare).

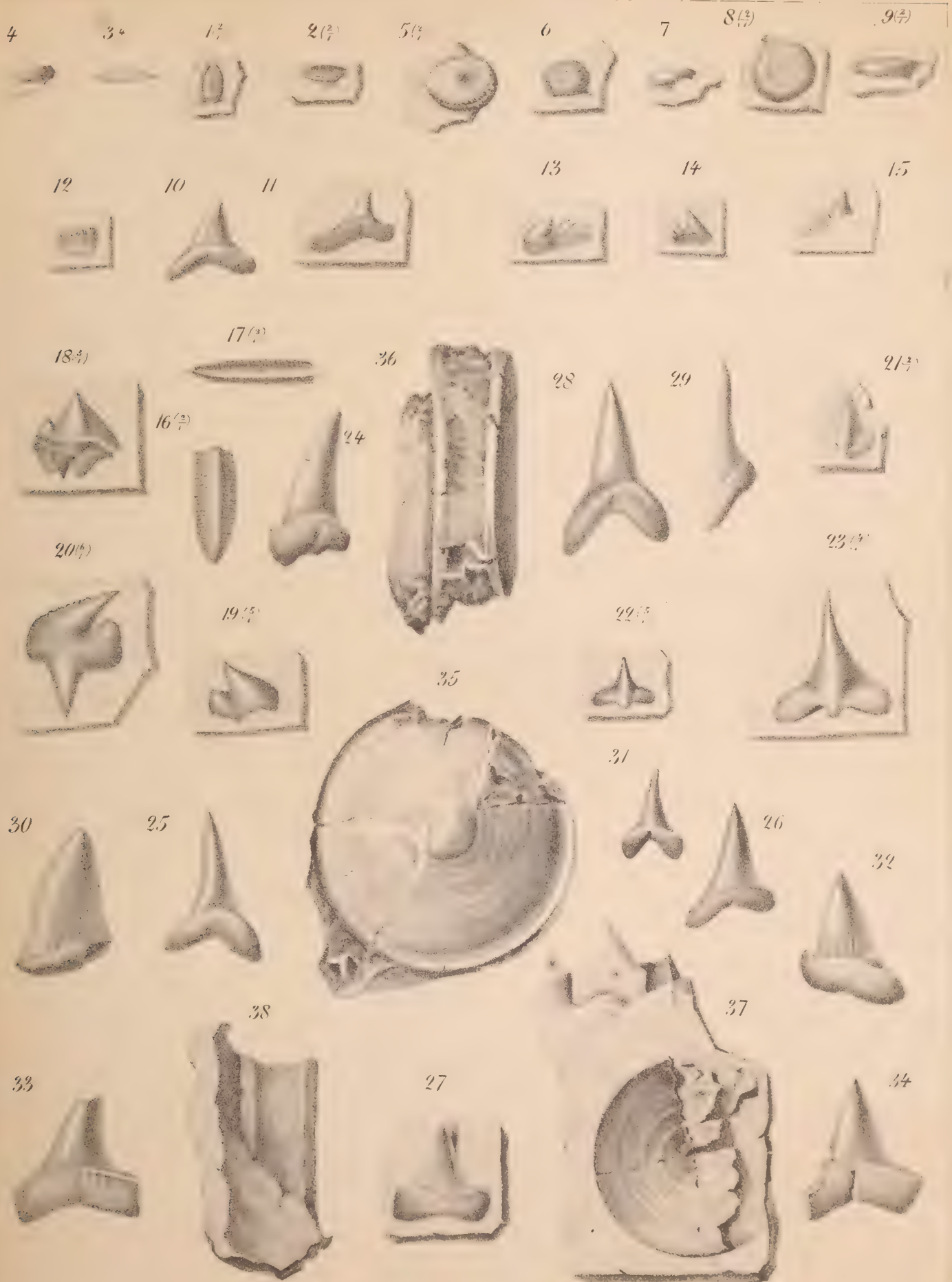
» 13-15. — **Notidanus primigenius** Agassiz [pag. 25] (Coll. Rovasenda).
13. Dente inf., faccia int., gr. nat. (Calcare). — 14. Dente ant. della mascella sup., gr. nat. (Calcare). — 15. Cono principale di un dente della mandibola, faccia int., gr. nat. (Calcare).

» 16-17. — **Cestracion** sp. [pag. 26] (Coll. Rovasenda).
16. Dente lat., faccia sup., gr. doppia del vero (Calcare). — 17. Lo stesso, di profilo.

» 18-20. — **Acanthias orpiensis** Winkler sp. (**Centrophorus?**) [pag. 27] (Coll. Rovasenda).
18. Dente lat. della masc. inf., faccia est., ingr. 3 volte (Calcare). — 19. Dente lat. della masc. inf., faccia est., ingr. 5 volte (Calcare). — 20. Dente ant. della masc. inf., faccia est., ingr. 6 volte (Marna).

» 21. — **Scymnus** sp. [pag. 28] (Coll. Rovasenda).
Dente lat. sinistro della masc. inf., faccia est., gr. doppia del vero (Marna).

» 22-23. — **Squatina prima** Winkler sp. [pag. 29] (Coll. Rovasenda).
22. Dente lat. della masc. sup., faccia est., ingr. 5 volte (Calcare). — 23. Dente ant. della masc. inf., faccia est., ingr. 4 volte (Calcare).

» 24-38. — **Oxyrhina Desori** Agassiz [pag. 19] (Coll. Rovasenda).
24, 25. Due denti ant. della masc. sup., faccia int., gr. nat. — 26. Dente lat. della masc. sup., faccia int., gr. nat. — 27. Dente lat. della masc. snp., faccia est., gr. nat. (Marna). — 28, 29. Dente ant. della masc. inf., faccia int. e profilo, gr. nat.— 30-34. Cinque denti lat. della masc. inf., faccia int., gr. nat. — 35, 36. Vertebra, vista di fronte e di profilo, gr. nat. (Marna). — 37. Vertebra, vista di fronte, con un dente lat. della masc. inf., faccia est., gr. nat. (Marna). — 38. La stessa, di profilo, senza il dente.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA III.

(Tutti gli esemplari provengono dalle cave di Gassino propriamente dette)

Fig. 1-12. — **Cimolichthys** sp. [pag. 37] (Coll. Rovasenda).
1-6. Tre denti palatini e relative sezioni trasv. presso la base [1-2 e 5-6, gr. nat.; 3-4, un po' ingr.] (Marna). — 7-10. Due denti mascellari, e relative sezioni trasversali presso la base [7-8, ingr. 4 volte; 9-10 gr. nat.] (Marna). — 11. Dente mascellare, ingr. 3 volte (Marna). — 12. Lo stesso, di profilo.

» 13-15. — **Pachyrhizodus** (?) sp. [pag. 39] (Coll. Rovasenda).
13. Dente masc. post., gr. nat. (Marna). — 14. Lo stesso, sez. trasv. presso la base.— 15. Lo stesso, sez. trasv. presso l'apice.

» 16-20. — **Saurocephalus** (?) **faiumensis** Dames [pag. 39] (Coll. Rovasenda).
16. Dente, gr. nat. (Calcare). — 17-19. Tre denti, gr. nat. (Marna). — 20. Sezione trasv., presso la base, del dente alla fig. 19.

» 21-41. — **Chrysophrys** sp. [pag. 40] (Coll. Rovasenda, meno i due esemplari alle fig. 22-24, appartenenti al Museo geol. dell'Università di Napoli).
21-23. Tre denti canini ant., gr. nat. (Calcare). — 24. Sezione trasv., presso la base, del dente alla fig. 23. — 25, 26. Due denti canini lat., gr. nat. (Calcare). — 27-33. Sette denti canini lat., un po' ingr. (Calcare). — 34-39. Otto denti molari, alcuni un po' ingr. (Calcare). — 40, 41. Superf. inf. e profilo del dente alla fig. 39.

» 42-53. — **Lobodus pedemontanus** Costa [pag. 41] (Coll. Rovasenda).
42-46. Cinque denti, veduti di fianco, gr. nat. (Calcare). — 47, 48. I denti alle fig. 45 e 46, veduti di fronte. — 49-53. Cinque denti, molto ingr. (Calcare).

» 54-55. — **Arius** sp. [pag. 36] (Museo geol. dell'Università di Napoli).
54. Otolito, visto dalla faccia sup., gr. nat. (Calcare). — 55. Lo stesso, di profilo.

» 56-65. — **Phyllodus** sp. [pag. 36] (Coll. Rovasenda).
56, 57, 58, 60, 63. Cinque denti secondarii, veduti dalla faccia sup., gr. doppia del vero (Calcare). — 59. Profilo del dente alla fig. 58. — 61, 62. Faccia inf. e profilo del dente alla fig. 60. — 64, 65. Faccia inf. e profilo del dente alla fig. 63.

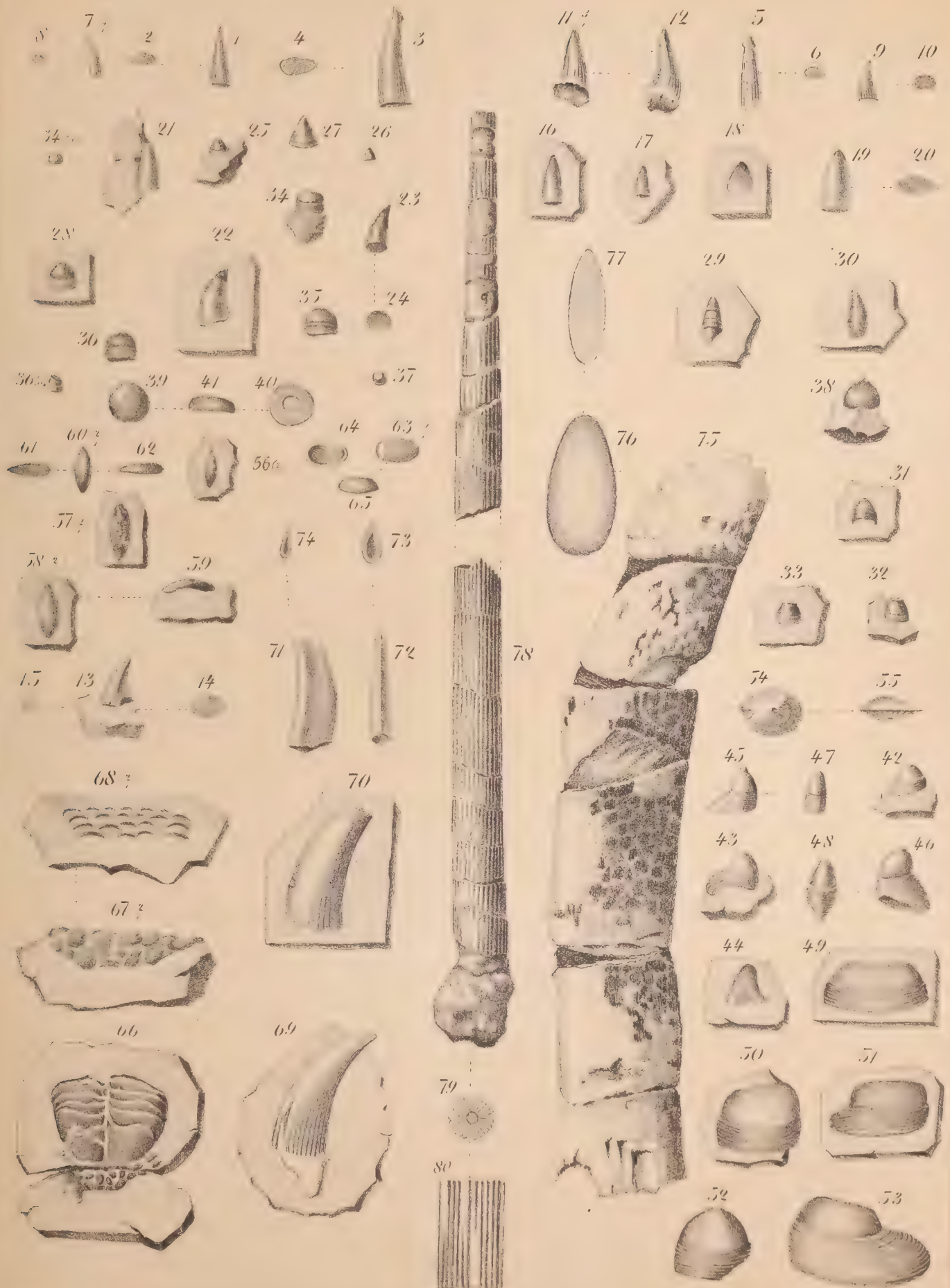
» 66-68. — **Diodon incertus** Michelotti sp. [pag. 34] (Coll. Rovasenda).
66. Placca mandibolare, quasi completa, gr. nat. (Calcare). — 67. Parte ant. della stessa, faccia sup., gr. doppia del vero. — 68. Parte ant. della stessa, veduta dalla sua parete verticale, combaciante col margine anteriore della grande placca posteriore, gr. doppia del vero.

» 69-74. — **Cestracion** sp. [pag. 31] (Coll. Rovasenda).
69-71. Tre spine della seconda pinna dorsale, gr. nat. (Calcare). — 72-74. Profilo, sezione trasv. presso la base e sezione trasv. presso l'estremità superiore della spina alla fig. 71.

» 75-77. — **Cestracion** (?) sp. [pag. 31-32] (Coll. Rovasenda).
75. Frammento di spina della prima pinna dorsale, gr. nat. (Calcare). — 76. Sezione trasv. dello stesso, alla metà dell'esemplare. — 77. Sezione trasv. dello stesso, all'estremità superiore.

» 78-80. — **Coelorhynchus rectus** Agassiz [pag. 30] (Coll. Rovasenda).
78. Ittiodorulito, in due pezzi, gr. nat. (Marna). — 79. Sezione trasv. dello stesso, all'estremità sup. del frammento più lungo.— 80. Piccolo tratto della superficie dello stesso, ingrandito.

finita di stampare il dì 16 Marzo 1899

Everdina Bassani dis.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SOPRA UNA CLASSE DI SUPERFICIE E DI VARIETÀ RAZIONALI

MEMORIA

di ALBERTO BRAMBILLA

presentata nell'adunanza del dì 19 Dicembre 1898

La presente Memoria ha per iscopo di portare un contributo analitico un po' più abbondante alla teoria delle superficie e varietà rappresentabili sovra spazi lineari convenienti in modo del tutto analogo a quello della superficie di Steiner: superficie e varietà, che io già proposi di denominare *ipersteineriane*, per alludere al gruppo di enti di cui la superficie di Steiner del 4° ordine e della 3ª classe è come il nocciolo. Questa teoria non ha storia, ove si eccettuino gli scarsi lavori che io vado dedicando ad essa *) ed una breve Nota del Dott. Lazzeri **): ora queste mie pubblicazioni mirano a preparare il terreno ad una Memoria geometrica più estesa, la quale deve offrire colle medesime un controllo reciproco.

Nel § I stabilisco la definizione della varietà Ξ_{m-1} e ne indico i caratteri più evidenti. — Nel § II risolvo il problema dei luoghi multipli di Ξ_{m-1}, limitandomi alle più elementari generalità. — Nel § III mi occupo di alcuni casi particolari, i quali, interessanti per sè medesimi, si ponno riguardare come un complemento a studi miei precedenti; ed apro così ai volonterosi uno esteso campo di ricerche il quale promette di essere fecondo. — Nel § IV accenno ad alcune conseguenze per i punti multipli o le linee multiple rispettivamente delle linee sezioni fatte da piani di [X] o delle superficie se-

---

*) *Le curve assintotiche di una classe di superficie algebriche* — Atti dell'Acc. delle Sc. di Torino (1885).

Sopra una classe di superficie algebriche rappresentabili punto per punto sul piano (Note 1ª e 2ª) — Rend. del R. Istit. Lombardo (1888).

Di una certa superficie algebrica razionale — Rend. Circ. Matem. Palermo (1888).

La curva doppia di una particolare superficie razionale del 9° ordine — Giornale Battaglini (1894).

Sopra una famiglia di superficie dell'ottavo ordine (Nota 1ª). Giorn. Battaglini (1897).

Sopra una particolare varietà del 27° ordine ecc. — Memorie Acc. Sc. Napoli (1897).

**) *Le curve e le sviluppabili multiple di una classe di superficie algebriche* — Atti del R. Istit. Veneto (1887).

zioni fatte da spazi ordinari di [X] nella varietà Ξ_{m-1}, piani o spazi seganti in posizioni generiche.

Talune questioni, che il lettore avvertirà da sè medesimo, non furono da me quì affrontate, perchè più spontaneamente si presenteranno, e meglio saranno analizzate, nella Memoria geometrica cui sopra ho alluso.

§ I.—Generalità *).

1. In uno spazio lineare ad m dimensioni [X] siano $\mathbf{U}_{m-1}^{(1)}, \ldots, \mathbf{U}_{m-1}^{(m+1)}$ degli spazi, in numero di $m+1$, lineari, ad $m-1$ dimensioni e linearmente indipendenti tra di loro.—Cotali spazi si intersecheranno a k a k in $\binom{m+1}{k}$ spazi ad $m-k$ dimensioni, che noi designeremo genericamente col simbolo $\mathbf{U}_{m-k}$, mentre colla segnatura $\mathbf{U}_{m-k}^{(s_1,\ldots,s_k)}$ indicheremo l'$\mathbf{U}_{m-k}$ nel quale si segano gli spazi $\mathbf{U}_{m-1}^{(s_1)}, \ldots, \mathbf{U}_{m-1}^{(s_k)}$.

La figura [U] formata di tutti gli spazi $\mathbf{U}_{m-1}$ e delle loro mutue intersezioni, e della quale ogni elemento si dirà uno *spazio principale*, verrà assunta come *figura di riferimento* nello stabilire un sistema di coordinate projettive per i punti dello spazio [X], e si supporrà che, dette $x_1, \ldots, x_{m+1}$ le coordinate di un punto x, sia $x_s=0$ l'equazione dello spazio $\mathbf{U}_{m-1}^{(s)}$.

2. Designati con $\omega_1, \ldots, \omega_m$ certi m parametri indipendenti fra loro, definiamo le quantità α come loro funzioni lineari mediante le formole

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha_1 \equiv a_{1,1}\omega_1 + \cdots + a_{1,m}\omega_m \,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m+1} \equiv a_{m+1,1}\omega_1 + \cdots + a_{m+1,m}\omega_m \,, \end{cases}$$

dalle quali scaturisce l'identità, per noi *fondamentale:*

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{m+1} & a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m} \end{vmatrix} = A_1\alpha_1 + \cdots + A_{m+1}\alpha_{m+1} = 0 \,,$$

come pure ne scendono, evidentemente, le altre:

$$(3)\qquad \begin{cases} A_1 a_{1,1} + A_2 a_{2,1} + \cdots + A_{m+1} a_{m+1,1} = 0 \,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1 a_{1,m} + A_2 a_{2,m} + \cdots + A_{m+1} a_{m+1,m} = 0 \,, \end{cases}$$

Ciò posto consideriamo lo spazio X_{m-1} ad $m-1$ dimensioni di equazione

$$(4)\qquad \frac{x_1}{\alpha_1^{n-1}} + \frac{x_2}{\alpha_2^{n-1}} + \cdots + \frac{x_{m+1}}{\alpha_{m+1}^{n-1}} = 0 \,:$$

---

*) Per questo § si cfr. Beltrami, *Ricerche di Geometria Analitica* — Memorie dell'Istituto di Bologna (1879). — A codeste *Ricerche* sono inspirate le cose iniziali del nostro studio.

al libero variare dei parametri $\omega_1, \ldots, \omega_m$, esso si move inviluppando una varietà Ξ_{m-1} ad $m-1$ dimensioni, che diciamo una *ipersteineriana*, e della quale ci proponiamo lo studio.

3. Lo spazio (4) non è altro che lo *spazio tangente qualunque* della varietà Ξ_{m-1}, lo spazio tangente ω; e poichè le sue coordinate sono

$$(5) \qquad \xi_1 \equiv \frac{1}{\alpha_1^{n-1}}, \ldots, \xi_{m+1} \equiv \frac{1}{\alpha_{m+1}^{n-1}},$$

così, tenendo presente la identità fondamentale (2), potremo scrivere l'equazione tangenziale della Ξ_{m-1} nella forma

$$(6) \qquad \frac{A_1}{\sqrt[n-1]{\xi_1}} + \frac{A_2}{\sqrt[n-1]{\xi_2}} + \ldots + \frac{A_{m+1}}{\sqrt[n-1]{\xi_{m+1}}} = 0 .$$

L'equazione locale della medesima varietà si ricava eliminando i parametri ω dalle equazioni, che si ottengono derivando la (4) rispetto a tali parametri. Queste equazioni sono:

$$(4') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{1,1}}{\alpha_1^n} . x_1 + \frac{a_{2,1}}{\alpha_2^n} . x_2 + \ldots + \frac{a_{m+1,1}}{\alpha_{m+1}^n} . x_{m+1} = 0 , \\ \frac{a_{1,2}}{\alpha_1^n} . x_1 + \frac{a_{2,2}}{\alpha_2^n} . x_2 + \ldots + \frac{a_{m+1,2}}{\alpha_{m+1}^n} . x_{m+1} = 0 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{a_{1,m}}{\alpha_1^n} . x_1 + \frac{a_{2,m}}{\alpha_2^n} . x_2 + \ldots + \frac{a_{m+1,m}}{\alpha_{m+1}^n} . x_{m+1} = 0 . \end{array} \right.$$

Ora, le identità (3) si ponno scrivere nella forma:

$$(3') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{1,1}}{\alpha_1^n} . A_1\alpha_1^n + \frac{a_{2,1}}{\alpha_2^n} . A_2\alpha_2^n + \ldots + \frac{a_{m+1,1}}{\alpha_{m+1}^n} . A_{m+1}\alpha_{m+1}^n = 0 , \\ \frac{a_{1,2}}{\alpha_1^n} . A_1\alpha_1^n + \frac{a_{2,2}}{\alpha_2^n} . A_2\alpha_2^n + \ldots + \frac{a_{m+1,2}}{\alpha_{m+1}^n} . A_{m+1}\alpha_{m+1}^n = 0 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{a_{1,m}}{\alpha_1^n} . A_1\alpha_1^n + \frac{a_{2,m}}{\alpha_2^n} . A_2\alpha_2^n + \ldots + \frac{a_{m+1,m}}{\alpha_{m+1}^n} . A_{m+1}\alpha_{m+1}^n = 0 , \end{array} \right.$$

e confrontando queste (3') colle precedenti (4') si scorge che, per i punti della varietà Ξ_{m-1}, devonsi avere:

$$(7) \qquad x_1 \equiv A_1\alpha_1^n \;,\; x_2 \equiv A_2\alpha_2^n \;, \ldots ,\; x_{m+1} \equiv A_{m+1}\alpha_{m+1}^n .$$

Invocando allora un'altra volta l'identità fondamentale (2), otterremo l'equazione locale della medesima varietà nella forma

$$\sqrt[n]{A_1^{n-1} x_1} + \sqrt[n]{A_2^{n-1} x_2} + \cdots + \sqrt[n]{A_{m+1}^{n-1} x_{m+1}} = 0 . \tag{8}$$

4. Se si interpretano i parametri $\omega_1, \ldots, \omega_m$ come coordinate di punto in un $(m-1)$-spazio $[\omega]$, le (7) forniscono una rappresentazione univoca di Ξ_{m-1} sopra questo $(m-1)$-spazio. Le imagini delle sezioni spaziali sono evidentemente le varietà Ψ^n_{m-2} d'ordine n e ad $m-2$ dimensioni, di equazione

$$\xi_1 A_1 \alpha_1{}^n + \cdots + \xi_{m+1} A_{m+1} \alpha^n{}_{m+1} = 0 , \tag{9}$$

e costituiscono quindi nell' $(m-1)$-spazio $[\omega]$ un sistema lineare ∞^n, cui appartengono gli $m+1$ spazi $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_{m+1} = 0$, ciascuno contato n volte, per i quali noi supponiamo che nessuno appartenga al sistema lineare di $m-1$ dei rimanenti.

Ora, siccome $m-1$ varietà Ψ^n_{m-2} generiche si tagliano in un gruppo di n^{m-1} punti, così $m-1$ sezioni spaziali generiche di Ξ_{m-1} si incontrano scambievolmente in n^{m-1} punti, i quali sono le tracce sulla Ξ_{m-1} della retta in cui si intersecano gli $m-1$ spazi X_{m-1} di quelle sezioni spaziali. Dunque *le varietà Ξ_{m-1} è dell'ordine n^{m-1}*, e si potrà indicare con $\Xi^{n^{m-1}}_{m-1}$.

5. Una curva d'ordine ν dello spazio rappresentativo $[\omega]$ è imagine di una curva d'ordine $n\nu$ della varietà Ξ_{m-1}, la curva obbiettiva incontra ciascuno degli spazi principali U_{m-1} in ν punti, in ciascuno dei quali ha col medesimo spazio un n-contatto. Ne segue che *ogni spazio principale incontra la varietà Ξ_{m-1} in* n *varietà d'ordine* n^{m-2}, *consecutive ed infinitamente vicine, ossia*, come diremo, *ha un* n*-contatto colla Ξ_{m-1} lungo una varietà di* $m-2$ *dimensioni e d'ordine* n^{m-2}, la quale è una $\Xi^{n^{m-2}}_{m-2}$ dello spazio U_{m-1} considerato.

In particolare, una retta generica di $[\omega]$ è imagine di una curva $\Xi_1{}^n$ razionale e normale (per $n \leq m$) delle varietà Ξ_{m-1} che ha un n-contatto con ciascun U_{m-1}. Se la retta imagine appoggia ad un $(m-k)$-spazio della figura $[\alpha]$, la curva $\Xi_1{}^n$ apparterrà ad un $(m-k+1)$-spazio passante per l'U_{m-k} omonimo dell'$(m-k)$-spazio considerato in $[\omega]$.

6. Ad un k-spazio generico dello spazio rappresentativo $[\omega]$ corrisponde sopra $\Xi^{n^{m-1}}_{m-1}$ una varietà $\Xi^{n^k}_k$ la quale è tagliata da ogni spazio principale U_{m-1} in n varietà $\Xi^{n^{k-1}}_{k-1}$ consecutive ed infinitamente vicine fra loro (il che esprimeremo dicendo che essa ha con questo spazio un n-contatto lungo tale Ξ_{k-1}).

Un $(m-1)$-spazio di $[X]$ il quale passi per lo spazio $U^{(r,s)}_{m-2}$ sega la varietà Ξ_{m-1} in una varietà la cui imagine in $[\omega]$ possiede l'equazione della forma

$$\xi_r A_r \alpha_r{}^n + \xi_s A_s \alpha_s{}^n = 0 ,$$

e che quindi si spezza in un fascio di n spazi ad $m-2$ dimensioni. Di conseguenza possiamo affermare che *ogni* $(m-1)$*-spazio che passi per un* U_{m-2} *sega la varietà* Ξ_{m-1} *in* n *varietà* $\Xi_{m-2}^{n^{m-2}}$.

§ II. — Luoghi multipli.

7. Senza andare molto a fondo con indagini che richiedono un'analisi assai più minuta e delicata di quel che non sembri, ed a cui sarà dedicata una Memoria più estesa d'indole più geometrica, vogliamo qui porre il problema dei luoghi multipli della varietà Ξ_{m-1}, svolgendo poi alcuni dei casi particolari che subito si presentano.

Se diciamo *fra loro congiunti* due punti dello spazio rappresentativo $[\omega]$ ai quali corrisponda un medesimo punto (multiplo) delle varietà, fra i parametri $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ ed $(\omega'_1, \ldots, \omega'_m)$ di due punti congiunti dovranno, per le (7), aver luogo le relazioni

$$\alpha_1^m : \ldots : \alpha_{m+1}^m = \alpha_1'^m : \ldots : \alpha_{m+1}'^m ;$$

e per conseguenza, detta ε una radice m^{ma} primitiva dell'unità, in forza dell'identità fondamentale (2), dovrà essere

$$\varepsilon^{\tau_1} A_1 \alpha_1 + \cdots + \varepsilon^{\tau_{m+1}} A_{m+1} \alpha_{m+1} = 0 . \tag{10}$$

È questa l'equazione della imagine generica di un luogo multiplo: però sotto la stessa equazione si presentano anche dei luoghi non multipli per Ξ_{m-1}, i quali quì sotto indichiamo. — Siccome tutte le imagini di luoghi multipli si hanno ponendo

$$\tau_1 , \tau_2 , \ldots , \tau_{m+1} = 1 , 2 , \ldots , n$$

indipendentemente gli uni dagli altri τ, così cominciamo dallo escludere l'ipotesi

$$\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_{m+1} ,$$

perchè essa riduce la (10) alla forma

$$A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + \cdots + A_{m+1} \alpha_{m+1} = 0 , \tag{2}$$

che è l'identità fondamentale.

Poi escludiamo le ipotesi

$$\tau_{h_1} = \tau_{h_2} = \cdots = \tau_{h_m} \mp \tau_{h_{m+1}}$$

per le quali l'equazione (10) assume la forma $\alpha_{h_{m+1}} = 0$ dell'imagine di quella varietà d'ordine n^{m-2} lungo la quale lo spazio principale $U_{m-1}^{(h_{m+1})}$ ha con la Ξ_{m-1} un n-contatto.

In tutte le altre ipotesi la (10) fornisce l'imagine di un luogo veramente multiplo per Ξ_{m-1}.

Accenniamo, in generale, ai casi

$$\tau_{h_1} = \cdots = \tau_{h_i} \mp \tau_{h_{i+1}} = \cdots = \tau_{h_{m+1}} ,$$

i quali riducono la equazione (10) alla forma

$$A_{h_1}\alpha_{h_1}+\cdots+A_{h_i}\alpha_{h_i}=0$$

equivalente, in virtù della (2), alla

$$A_{h_{i+1}}\alpha_{h_{i+1}}+\cdots+A_{h_{m+1}}\alpha_{h_{m+1}}=0 .$$

Quest'equazione rappresenta nello spazio $[\omega]$ un $(m-2)$-spazio diagonale della figura $[\alpha]$, congiungendo lo spazio intersezione di $\alpha_{h_1},\ldots,\alpha_{h_i}$ (spazio ad $m-i-1$ dimensioni) con l'opposto, secondo cui si tagliano scambievolmente i rimanenti α (e che è di $i-2$ dimensioni). Ora ogni retta che congiunga un punto dell'$(m-i-1)$-spazio comune ad i spazi α con un punto dell'opposto $(i-2)$-spazio comune ai rimanenti spazi α, è imagine di una linea d'ordine n che ha un contatto n-punto coll'$\mathbf{U}_{m-i}$ in cui si intersecano $\mathbf{U}_{m-1}^{(h_1)},\ldots,\mathbf{U}_{m-1}^{(h_i)}$ ed un contatto n-punto coll'opposto $\mathbf{U}_{i-1}$. Ne risulta che tale linea è necessariamente una retta n-pla, perchè deve giacere in un $(m-i+1)$-spazio passante per quell'$\mathbf{U}_{m-i}$ ed in un i-spazio uscente dall'opposto $\mathbf{U}_{i-1}$ (n.° **5**). — Dunque *ogni* $(m-2)$*-spazio diagonale della figura degli spazi* α *di* $[\omega]$ *è imagine di una rigata* n*-pla della varietà* Ξ_{m-1}, *la quale è sempre d'ordine* n^{m-3}, *e, naturalmente, sarà variamente caratterizzata a seconda della specie di diagonalità dall'* $(m-2)$*-spazio rispetto alla figura* $[\alpha]$. — Per es., quando $i=2$, la rigata n-pla è un mono-cono *) che da un punto $\mathbf{K}_{h_1,h_2}$ di $\mathbf{U}_1^{(h_1,h_2)}$ proietta una $\Xi_{m-3}^{n^{m-3}}$ dell'opposto $\mathbf{U}_{m-2}$. Tale varietà conica sarà da noi indicata col simbolo $\mathbf{W}_{m-2}^{(h_1,h_2)}$. I vertici di tali varietà coniche hanno le coordinate fornite delle formole

$$\overset{n-1}{A_{h_1}}x_{h_1}:\overset{n-1}{A_{h_2}}x_{h_2}:\overset{n-1}{A_{h_3}}x_{h_3}:\ldots:\overset{n-1}{A_{h_{m+1}}}x_{h_{m+1}}=1:\pm1:0:\ldots:0$$

dove il segno $+$ o $-$ corrisponde al caso di n pari o dispari. Essi quindi giacciono tutti nello $(m-1)$-spazio Π di equazione

$$\sum_{1}^{m+1}{}_r\overset{n-1}{A_r}x_r=0 ,$$

se n è dispari. — Le medesime varietà mono-coniche giacciono rispettivamente negli $(m-1)$-spazi

$$\overset{n-1}{A_{h_1}}x_{h_1}\mp\overset{n-1}{A_{h_2}}x_{h_2}=0$$

dove il segno $-$ o $+$ corrisponde ad n pari o dispari. E si vede che per n pari gli $(m-1)$-spazi Ω_{h_1,h_2} medesimi passano tutti per il punto unità $\mathbf{O}$. Il piano Π (n dispari) ed il punto $\mathbf{O}$ (n pari) si diranno *centrali*.

8. Nel caso di $n=2$, le varietà ad $m-2$ dimensioni multiple di $\Xi_{m-1}^{2^{m-1}}$ sono tutte rigate doppie.

---

*) Una varietà d'ordine ν con un punto, una retta, un piano, ecc. ν-plo si dirà, ordinatamente, mono-cono, bi-cono, tri-cono, ecc.

Per contare il numero di queste rigate doppie non c'è che a contare quello delle coppie di elementi opposti della figura [α] dello spazio rappresentativo. Così si trova che sulla $\Xi^{2^{m-1}}_{m-1}$ esistono $\binom{m+1}{2}$ rigate doppie (mono-coni) che congiungono ciascuna un punto di un $\mathbf{U}_1$ ad una $\Xi^{2^{m-3}}_{m-3}$ dell'opposto $\mathbf{U}_{m-2}$; $\binom{m+1}{3}$ rigate doppie che congiungono ciascuna una Ξ_1^2 di un $\mathbf{U}_2$ ad una $\Xi^{2^{m-4}}_{m-4}$ dell'opposto $\mathbf{U}_{m-3}$; ecc. ecc.; e finalmente, se m è pari ed $=2\mu$, $\binom{m+1}{\mu}$ rigate doppie che congiungono ciascuna una $\Xi^{2^{m-\mu-2}}_{m-\mu-2}$ di un $\mathbf{U}_{m-\mu-1}$ ad una $\Xi^{2^{m-\mu-1}}_{m-\mu-1}$ dell'opposto $\mathbf{U}_{m-\mu}$, e, per m dispari ed $=2\mu-1$, esistono $\frac{1}{2}\binom{m+1}{\mu}$ rigate doppie che congiungono ciascuna una varietà $\Xi^{2^{m-\mu-1}}_{m-\mu-1}$ di un $\mathbf{U}_{m-\mu}$ ad un'altra dell' $\mathbf{U}_{m-\mu}$ opposto.

9. Oltre i casi delle rigate già indicate, possiamo accennare a quelli, per cui

$$\tau_{h_1}=\cdots=\tau_{h_{m-1}}\mp\tau_{h_m}\mp\tau_{h_{m+1}}.$$

In queste ipotesi le equazioni di imagini di varietà multiple si riducono, mercè l'identità fondamentale, alla forma

$$(\varepsilon^{\tau'}-1)A_{h_m}\alpha_{h_m}+(\varepsilon^{\tau''}-1)A_{h_{m+1}}\alpha_{h_{m+1}}=0 .$$

Le varietà multiple così rappresentate giacciono quindi in $(m-1)$-spazi uscenti dall'$\mathbf{U}_{m-2}$ comune ad $\mathbf{U}^{(h_m)}_{m-1}$ ed $\mathbf{U}^{(h_{m+1})}_{m-1}$ (n.° **6**), e sono tutte doppie, essendo imagini di una stessa varietà i due $(m-2)$-spazi

$$(\varepsilon^{\tau'}-1)A_{h_m}\alpha_{h_m}+(\varepsilon^{\tau''}-1)A_{h_{m+1}}\alpha_{h_{m+1}}=0 ,$$

$$(\varepsilon^{-\tau'}-1)A_{h_m}\alpha_{h_m}+(\varepsilon^{-\tau''}-1)A_{h_{m+1}}\alpha_{h_{m+1}}=0 .$$

Ora, fra tutte le varietà doppie di questa specie sono da considerarsi in modo particolare quelle, le cui imagini hanno equazioni della forma

$$(\varepsilon^{\tau}-1)A_{h_m}\alpha_{h_m}+(\varepsilon^{-\tau}-1)A_{h_{m+1}}\alpha_{h_{m+1}}=0 ,$$

e che quindi, per la soppressione del fattore $\varepsilon^{\tau}-1$, riduconsi facilmente alla forma

$$\varepsilon^{\tau}A_{h_m}\alpha_{h_m}-A_{h_{m+1}}\alpha_{h_{m+1}}=0 .$$

Queste particolari varietà doppie, in numero di $\frac{n-1}{2}$ se n è dispari, e di $\frac{n-2}{2}$ se n è pari (per ogni coppia h_m, h_{m+1} di indici) giacciono tutte nello $(m-1)$-spazio

$$A^{\frac{n-1}{2}}_{h_m}x_{h_m}-A^{\frac{n-1}{2}}_{h_{m+1}}x_{h_{m+1}}=0$$

che è il medesimo in cui giace la varietà mono-conica n-pla coordinata all' $U_{m-2}^{(h_m, h_{m+1})}$ ed all'opposto U_1, quando n è pari, o il coniugato armonico di esso rispetto ad $U_{m-1}^{(h_m)}$ ed $U_{m-1}^{(h_{m+1})}$ se n è dispari.

§ III. — Casi particolari.

10. Per $m=2$ ed $n=2$ si ha una conica inscritta nel triangolo principale.

Per $m=2, n$ qualunque si ha una curva d'ordine n razionale avente un contatto n-punto con ciascuno dei lati del triangolo principale.

Per $m=3$ ed $n=2$ abbiamo una superficie di Steiner inscrittta nel tetraedro principale, la cui teoria è notissima.

Per $m=3$ ed $n=3$ si ha una superficie Ξ_2^9 del *nono* ordine, della quale abbiamo già da anni fatta conoscere la decomposizione della curva doppia *).

Per $m=4$ ad $n=2$ si ha una varietà Ξ_3^8 tre dimensioni e dell'ottavo ordine della quale ci siamo pure occupati in una Nota, già citata, del vol. XXXV (1897) **) del Giornale di Battaglini.

Per $m=4$, $n=3$ si incontra una varietà Ξ_3^{27} del 27° ordine da noi studiata in una Memoria uscita nel presente volume di codesta Illustre Accademia ***).

Trattiamo di altri nuovi casi.

Caso $m=3, n=4$

11. Le coordinate del punto corrente sulla superficie Ξ_2^{16} sono

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = A_1\alpha_1^4 : A_2\alpha_2^4 : A_3\alpha_3^4 : A_4\alpha_4^4 ,$$

e le equazioni locale e tangenziale della stessa superficie sono ordinatamente:

$$\sqrt[4]{A_1^3 x_1} + \sqrt[4]{A_2^3 x_2} + \sqrt[4]{A_3^3 x_3} + \sqrt[4]{A_4^3 x_4} = 0$$

ed

$$\frac{A_1}{\sqrt[3]{\xi_1}} + \frac{A_2}{\sqrt[3]{\xi_2}} + \frac{A_3}{\sqrt[3]{\xi_3}} + \frac{A_4}{\sqrt[3]{\xi_4}} = 0 .$$

Nel piano [ω] rappresentativo della superficie Ξ_2^{16} l'equazione dell'imagine della curva multipla è

$$\varepsilon^{\tau_1} A_1\alpha_1 + \varepsilon^{\tau_2} A_2\alpha_2 + \varepsilon^{\tau_3} A_3\alpha_3 + \varepsilon^{\tau_4} A_4\alpha_4 = 0 ,$$

dove per ε si può assumere il valore $i (= \sqrt{-1})$ e $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 = 1, 2, 3, 4$, mentre dovrà essere verificata la identità fondamentale

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 + A_4\alpha_4 = 0 .$$

---

*) V. *Giornale Battaglini*, vol. XXXII (1894).

**) *Sopra una famiglia di superficie dell'ottavo ordine.*

***) *Sopra una particolare varietà del 27° ordine ecc.*, già citata.

Ora, esclusa l'ipotesi $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$, che conduce all'identità fondamentale, e l'altra $\tau_p \mp \tau_q = \tau_r = \tau_s$, che fornisce la retta $\alpha_p = 0$ imagine della curva di contatto del piano $U_2^{(p)}$, rimangono le seguenti tre:

1ª) $\tau_p = \tau_q \mp \tau_r = \tau_s$,

2ª) $\tau_p = \tau_q \mp \tau_r \mp \tau_s$,

3ª) $\tau_p \mp \tau_q \mp \tau_r \mp \tau_s$.

12. Nella 1ª ipotesi si ottengono le equazioni

$$0 = A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 = -(A_1\alpha_1 + A_4\alpha_4)\ ,$$
$$0 = A_3\alpha_3 + A_1\alpha_1 = -(A_2\alpha_2 + A_4\alpha_4)\ ,$$
$$0 = A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = -(A_3\alpha_3 + A_4\alpha_4)\ ,$$

delle diagonali del quadrilatero $[\alpha]$, le quali sono imagini di altrettante rette quadruple di Ξ_2^{16}, che hanno ordinatamente le equazioni:

$$\text{I)}\qquad \Omega_{23} \equiv \overset{3}{A}_2 x_2 - \overset{3}{A}_3 x_3 = 0\ ,\quad \Omega_{14} \equiv \overset{3}{A}_1 x_1 - \overset{3}{A}_4 x_4 = 0\ ;$$
$$\text{II)}\qquad \Omega_{31} \equiv \overset{3}{A}_3 x_3 - \overset{3}{A}_1 x_1 = 0\ ,\quad \Omega_{24} \equiv \overset{3}{A}_2 x_2 - \overset{3}{A}_4 x_4 = 0\ ;$$
$$\text{III)}\qquad \Omega_{12} \equiv \overset{3}{A}_1 x_1 - \overset{3}{A}_2 x_2 = 0\ ,\quad \Omega_{34} \equiv \overset{3}{A}_3 x_3 - \overset{3}{A}_4 x_4 = 0\ .$$

Queste rette concorrono manifestamente nel punto di coordinate

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{1}{\overset{3}{A}_1} : \frac{1}{\overset{3}{A}_2} : \frac{1}{\overset{3}{A}_3} : \frac{1}{\overset{3}{A}_4}\ ,$$

il quale è *nonuplo* per Ξ_2^{16} *) e che è il *punto centrale* della superficie medesima (n.° **7**).

13. Nella 2ª ipotesi l'equazione generale delle imagini di curve doppie dà luogo alle seguenti particolari:

$$(1+i)A_r\alpha_r + iA_s\alpha_s = 0\ ,\quad (1+i)A_r\alpha_r + A_s\alpha_s = 0\ ;$$
$$i\,A_r\alpha_r + A_s\alpha_s = 0\ ,\quad A_r\alpha_r + i\,A_s\alpha_s = 0\ ;$$
$$A_r\alpha_r + (1+i)A_s\alpha_s = 0\ ,\quad i\,A_r\alpha_r + (1+i)A_s\alpha_s = 0\ .$$

---

*) Cfr. mia Nota I, *Rendic. Istituto Lombardo* 1888, n. 19 — Le imagini di questo punto sono rispettivamente:

$$A_1\alpha_1 : A_2\alpha_2 : A_3\alpha_3 : A_4\alpha_4 = [-1:1:1:-1]\ ,\ [1:-1:1:-1]\ ,\ [1:1:-1:-1]$$
$$[-1:i:1:-i]\ ,\ [i:-1:1:-i]\ ,\ [i:1:-1:-i]$$
$$[-1:1:i:-i]\ ,\ [1:-1:i:-i]\ ,\ [1:i:-1:-i]$$

A codeste equazioni si soddisfa ponendo ordinatamente:

$$\begin{cases} A_p\alpha_p : \ldots : A_s\alpha_s = \lambda_1 - \lambda_2 : -\lambda_1 : -i\lambda_2 : (1+i)\lambda_2 \,, \\ \quad \text{»} \quad = \lambda_1 - \lambda_2 : -\lambda_1 : i\lambda_2 : (1-i)\lambda_2 \,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_p\alpha_p : \ldots : A_s\alpha_s = (1-i)(\lambda_1 - \lambda_2) : (i-1)\lambda_2 : \lambda_2 : -i\lambda_2 \,, \\ \quad \text{»} \quad = (1+i)(\lambda_1 - \lambda_2) : -(i+1)\lambda_1 : \lambda_2 : i\lambda_2 \,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_p\alpha_p : \ldots : A_s\alpha_s = \lambda_1 - \lambda_2 : -\lambda_1 : (1-i)\lambda_2 : i\lambda_2 \,, \\ \quad \text{»} \quad = \lambda_1 - \lambda_2 : -\lambda_1 : (1+i)\lambda_2 : -i\lambda_2 \,; \end{cases}$$

essendo collegate con una stessa grappa le rappresentazioni di due rette congiunte. Tali coppie di rette del piano [ω] sono ordinatamente imagini delle quartiche doppie razionali

$$\overset{3}{A}_p x_p : \overset{3}{A}_q x_q : \overset{3}{A}_r x_r : \overset{3}{A}_s x_s = (\lambda_1 - \lambda_2)^4 : \lambda_1^4 : \lambda_2^4 : -4\lambda_2^4 \,;$$

$$\text{»} \quad = -4(\lambda_1 - \lambda_2)^4 : -4\lambda_1^4 : \lambda_2^4 : \lambda_2^4 \,;$$

$$\text{»} \quad = (\lambda_1 - \lambda_2)^4 : \lambda_1^4 : -4\lambda_2^4 : \lambda_2^4 \,;$$

le quali giacciono rispettivamente nei piani

$$4\overset{3}{A}_r x_r + \overset{3}{A}_s x_s = 0 \,,$$

$$\overset{3}{A}_r x_r - \overset{3}{A}_s x_s = 0 \,,$$

$$\overset{3}{A}_r x_r + 4\overset{3}{A}_s x_s = 0 \,,$$

tutti uscenti dallo spigolo $U_1^{(rs)}$. E, come le imagini di queste quartiche passano tutte per il vertice (rs) del quadrilatero [α], le stesse curve obbiettive hanno tutte un contatto quadripunto collo spigolo $U_1^{(rs)}$ in un medesimo punto K_{rs} di coordinate *)

$$x_p : x_q : x_r : x_s = \frac{1}{A_p^3} : \frac{1}{A_q^3} : 0 : 0 \,.$$

Le quartiche in discorso sono manifestamente in numero di 18.

14. Nella 3ª ipotesi le corrispondenti imagini di curve multiple sono tutte e soltanto le seguenti:

$$(1+i)A_2\alpha_2 + i\,A_3\alpha_3 + A_4\alpha_4 = 0 \,, \quad (1+i)A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 + i\,A_4\alpha_4 = 0 \,;$$

$$A_2\alpha_2 + (1+i)A_3\alpha_3 + i\,A_4\alpha_4 = 0 \,, \quad i\,A_2\alpha_2 + (1+i)A_3\alpha_3 + A_4\alpha_4 = 0 \,;$$

$$i\,A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 + (1+i)A_4\alpha_4 = 0 \,, \quad A_2\alpha_2 + i\,A_3\alpha_3 + (1+i)A_2\alpha_4 = 0 \,.$$

---

*) Invitando il lettore a consultare le cose generali esposte nelle mie Note dell' Istit. Lombardo (1888), avvertiamo che le formole (3) e (4) della 2ª Nota devono essere fra loro scambiate.

Sono fra loro congiunte le due rette di cui abbiamo scritte le equazioni in una stessa orizzontale.

A codeste tre coppie di equazioni si soddisfa ponendo rispettivamente:

$$\left\{\begin{aligned} A_1\alpha_1 : A_2\alpha_2 : A_3\alpha_3 : A_4\alpha_4 &= -i(\lambda_1+\lambda_2) : (\lambda_1-\lambda_2) : (i-1)\lambda_1 : (i+1)\lambda_2 \, , \\ \text{»} \qquad &= i(\lambda_1+\lambda_2) : (\lambda_1-\lambda_2) : -(i+1)\lambda_1 : (1-i)\lambda_2 \, ; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \text{»} \qquad &= -i(\lambda_1+\lambda_2) : (i+\lambda_2)\lambda_2 : (\lambda_1-\lambda_2) : (i-1)\lambda_1 \, , \\ \text{»} \qquad &= i(\lambda_1+\lambda_2) : (1-i)\lambda_2 : (\lambda_1-\lambda_2) : -(i+1)\lambda_1 \, ; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \text{»} \qquad &= -i(\lambda_1+\lambda_2) : (i-1)\lambda_1 : (i+1)\lambda_2 : (\lambda_1-\lambda_2) \, , \\ \text{»} \qquad &= i(\lambda_1+\lambda_2) : -(i+1)\lambda_1 : (1-i)\lambda_2 : (\lambda_1-\lambda_2) \, . \end{aligned}\right.$$

Le coordinate del punto corrente su ciascuna curva doppia di Ξ_2^{16} rappresentata da una di queste rette sono quindi ordinatamente:

$$\begin{aligned} \overset{3}{A}_1 x_1 : \overset{3}{A}_2 x_2 : \overset{3}{A}_3 x_3 : \overset{3}{A}_4 x_4 &= (\lambda_1+\lambda_2)^4 : (\lambda_1-\lambda_2)^4 : -4\lambda_1^4 : -4\lambda_2^4 \, ; \\ \text{»} \qquad &= (\lambda_1+\lambda_2)^4 : -4\lambda_2^4 : (\lambda_1-\lambda_2)^4 : -4\lambda_1^4 \, ; \\ \text{»} \qquad &= (\lambda_1+\lambda_2)^4 : -4\lambda_1^4 : -4\lambda_2^4 : (\lambda_1-\lambda_2)^4 \, . \end{aligned}$$

È facile verificare che per ciascuna di queste quartiche gobbe razionali doppie per Ξ_2^{16} i punti di contatto stazionario dei quattro piani principali formano un gruppo armonico; la quale circostanza ne assicura *) che ognuna di esse possiede un punto doppio. Si riconosce poi che, su ciascuna delle medesime curve, il punto doppio corrisponde ai valori $\pm i$ del parametro $\lambda_1 : \lambda_2$; e si trova pure che questo punto doppio è comune alle tre quartiche, ed è il punto centrale della superficie Ξ_2^{16}.

15. A meglio convalidare questi fatti stabiliamone altri, pure molto semplici. Per mantenerci nelle condizioni generali occupiamoci soltanto della quartica

$$\overset{3}{A}_p x_p : \overset{3}{A}_q x_q : \overset{3}{A}_r x_r : \overset{3}{A}_s x_s = (\lambda_1+\lambda_2)^4 : (\lambda_1-\lambda_2)^4 : -4\lambda_1^4 : -4\lambda_2^4 \, .$$

Si sa che per una quartica razionale gobba passa *un' unica* quadrica, a meno che tale curva non sia dotata di punto doppio. Nel caso nostro si trova di leggeri che per la quartica passano tutte le quadriche del fascio:

$$\begin{aligned} 0 = k_1(&\overset{6}{A}_p x_p^2 + \overset{6}{A}_q x_q^2 - \overset{6}{A}_r x_r^2 - \overset{6}{A}_s x_s^2 + 14\overset{3}{A}_p\overset{3}{A}_q x_p x_q - 14\overset{3}{A}_r\overset{3}{A}_s x_r x_s) \\ + k_2(&5\overset{6}{A}_r x_r^2 + 5\overset{6}{A}_s x_s^2 - 48\overset{3}{A}_p\overset{3}{A}_q x_p x_q + 22\overset{3}{A}_r\overset{3}{A}_s x_r x_s \\ &+ 4\overset{3}{A}_p\overset{3}{A}_r x_p x_r + 4\overset{3}{A}_p\overset{3}{A}_s x_p x_s + 4\overset{3}{A}_q\overset{3}{A}_r x_q x_r + 4\overset{3}{A}_q\overset{3}{A}_s x_q x_s) \, . \end{aligned}$$

Dunque la quartica in questione è gobba e possiede un punto doppio.

---

*) Armenante, *Sulle curve gobbe razionali del quart' ordine* — Giornale di Battaglini, vol. XI e XII (1873-74).

Al fascio che consideriamo appartengono, come è noto, tre coni quadrici, due dei quali sono bi-projettanti la curva ed il terzo la projetta dal punto doppio e tiene luogo della quadrica delle trisecanti del caso generale.

Registriamo le equazioni delle tre coppie di coni bi-projettanti le tre quartiche gobbe doppie di Ξ_2^{16}. Esse sono ordinatamente:

$$\left\{\begin{array}{l}(\overset{3}{A}_1 x_1 + \overset{3}{A}_2 x_2 + 2\overset{3}{A}_3 x_3 + 2\overset{3}{A}_4 x_4)^2 - 36\overset{3}{A}_1\overset{3}{A}_2 x_1 x_2 = 0\ ,\\ (2\overset{3}{A}_1 x_1 + 2\overset{3}{A}_2 x_2 + \overset{3}{A}_3 x_3 + \overset{3}{A}_4 x_4)^2 - 36\overset{3}{A}_3\overset{3}{A}_4 x_3 x_4 = 0\ ;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\overset{3}{A}_1 x_1 + \overset{3}{A}_3 x_3 + 2\overset{3}{A}_4 x_4 + 2\overset{3}{A}_2 x_2)^2 - 36\overset{3}{A}_1\overset{3}{A}_3 x_1 x_3 = 0\ ,\\ (2\overset{3}{A}_1 x_1 + 2\overset{3}{A}_3 x_3 + \overset{3}{A}_4 x_4 + \overset{3}{A}_2 x_2)^2 - 36\overset{3}{A}_2\overset{3}{A}_4 x_2 x_4 = 0\ ;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\overset{3}{A}_1 x_1 + \overset{3}{A}_4 x_4 + 2\overset{3}{A}_2 x_2 + 2\overset{3}{A}_3 x_3)^2 - 36\overset{3}{A}_1\overset{3}{A}_4 x_1 x_4 = 0\ ,\\ (2\overset{3}{A}_1 x_1 + 2\overset{3}{A}_4 x_4 + \overset{3}{A}_2 x_2 + \overset{3}{A}_3 x_3)^2 - 36\overset{3}{A}_2\overset{3}{A}_3 x_2 x_3 = 0\ .\end{array}\right.$$

I coni projettanti dai rispettivi punti doppi sono rappresentati rispettivamente dalle equazioni:

$$\begin{array}{l}5\overset{6}{A}_1\overset{2}{x}_1 + 5\overset{6}{A}_2\overset{2}{x}_2 + 5\overset{6}{A}_3\overset{2}{x}_3 + 5\overset{6}{A}_4\overset{2}{x}_4 - 26\overset{3}{A}_1\overset{3}{A}_2 x_1 x_2 - 26 A_3 A_4 x_3 x_4\\ \qquad + 8\overset{3}{A}_1\overset{3}{A}_3 x_1 x_3 + 8\overset{3}{A}_1\overset{3}{A}_4 x_1 x_4 + 8\overset{3}{A}_2\overset{3}{A}_3 x_2 x_3 + 8\overset{3}{A}_2\overset{3}{A}_4 x_2 x_4 = 0\ ,\end{array}$$

$$\begin{array}{l}5\overset{6}{A}_1\overset{2}{x}_1 + 5\overset{6}{A}_2\overset{2}{x}_2 + 5\overset{6}{A}_3\overset{2}{x}_3 + 5\overset{6}{A}_4\overset{2}{x}_4 - 26\overset{3}{A}_1\overset{3}{A}_3 x_1 x_3 - 26\overset{3}{A}_4\overset{3}{A}_2 x_4 x_2\\ \qquad + 8\overset{3}{A}_1\overset{3}{A}_4 x_1 x_4 + 8\overset{3}{A}_1\overset{3}{A}_2 x_1 x_2 + 8\overset{3}{A}_3\overset{3}{A}_4 x_3 x_4 + 8\overset{3}{A}_3\overset{3}{A}_2 x_3 x_2 = 0\ ,\end{array}$$

$$\begin{array}{l}5\overset{6}{A}_1\overset{2}{x}_1 + 5\overset{6}{A}_2\overset{2}{x}_2 + 5\overset{6}{A}_3\overset{2}{x}_3 + 5\overset{6}{A}_4\overset{2}{x}_4 - 26\overset{3}{A}_1\overset{3}{A}_4 x_1 x_4 - 26\overset{3}{A}_2\overset{3}{A}_3 x_2 x_3\\ \qquad + 8\overset{3}{A}_1\overset{3}{A}_2 x_1 x_2 + 8\overset{3}{A}_1\overset{3}{A}_3 x_1 x_3 + 8\overset{3}{A}_4\overset{3}{A}_2 x_4 x_2 + 8\overset{3}{A}_4\overset{3}{A}_3 x_4 x_3 = 0\ .\end{array}$$

Da codeste equazioni risulta che i vertici dei coni bi-projettanti tali quartiche gobbe armoniche sono ordinatamente:

$$\left\{\begin{array}{l}x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0 : 0 : \frac{1}{A^3_3} : -\frac{1}{A^3_4}\ ,\\ \qquad » \qquad = \frac{1}{A^3_1} : -\frac{1}{A^3_2} : 0 : 0\ ;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0 : -\frac{1}{A^3_2} : 0 : \frac{1}{A^3_4}\ ,\\ \qquad » \qquad = \frac{1}{A^3_1} : 0 : -\frac{1}{A^3_3} : 0\ ;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0 : \frac{1}{A^3_2} : -\frac{1}{A^3_3} : 0\ ,\\ \qquad » \qquad = \frac{1}{A^3_1} : 0 : 0 : -\frac{1}{A^3_4}\ .\end{array}\right.$$

Invece il vertice del cono projettante dal punto doppio è, per tutte e tre le quartiche in parola,

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{1}{A^3_1} : \frac{1}{A^3_2} : \frac{1}{A^3_3} : \frac{1}{A^3_4} ,$$

cioè, come avevamo osservato, il punto centrale della superficie Ξ_2^{16}.

Osserviamo incidentalmente che i vertici dei coni bi-projettanti le tre quartiche gobbe doppie per Ξ_2^{16} giacciono tutti nel piano

$$\overset{3}{A}_1 x_1 + \overset{3}{A}_2 x_2 + \overset{3}{A}_3 x_3 + \overset{3}{A}_4 x_4 = 0 .$$

Codesto piano taglia ciascuna delle quartiche medesime nelle rispettive coppie di punti di appoggio delle corde principali proprie (cioè non passanti pel punto doppio). Ciò si verifica facilmente, osservando che tali coppie, insieme al punto doppio (contato due volte) costituiscono il covariante sestico della forma biquadratica dei punti di contatto dei piani stazionari (Armenante, *l. c.*).

16. Riassumendo, possiamo dunque affermare che *sulla superficie* Ξ_2^{16} *esistono tre rette quadruple concorrenti in un punto nonuplo; sei terne di quartiche piane doppie, i cui piani escono, per ciascuna terna, da un medesimo spigolo del tetraedro principale; tre quartiche gobbe razionali doppie armoniche aventi tutte per punto doppio il punto di concorso delle tre rette quadruple.*

Caso $m = 3, n = 5$

17. La superficie Ξ_2^{25} è rappresentata dalle equazioni

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = A_1\alpha_1^5 : A_2\alpha_2^5 : A_3\alpha_3^5 : A_n\alpha_n^5$$

colla condizione solita

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 + A_4\alpha_4 = 0 .$$

L'equazione generica

$$\varepsilon^{\tau_1}A_1\alpha_1 + \varepsilon^{\tau_2}A_2\alpha_2 + \varepsilon^{\tau_3}A_3\alpha_3 + \varepsilon^{\tau_4}A_4\alpha_4 = 0$$

delle imagini di luoghi multipli dà luogo, come sempre, alla soluzione estranea dell'identità fondamentale $(\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4)$ ed a quelle improprie

$$\alpha_p = 0 (\tau_p \neq \tau_q = \tau_r = \tau_s);$$

ma, dopo queste, si dovranno distinguere le seguenti tre ipotesi:

1ª) $\tau_p = \tau_q \neq \tau_r = \tau_s$,
2ª) $\tau_p = \tau_q \neq \tau_r \neq \tau_s$,
3ª) $\tau_p \neq \tau_q \neq \tau_r \neq \tau_s$.

18. Colla 1ª ipotesi si cade nelle equazioni

$$0 = A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 = -(A_1\alpha_1 + A_4\alpha_4) \,,$$
$$0 = A_3\alpha_3 + A_1\alpha_1 = -(A_2\alpha_2 + A_4\alpha_4) \,,$$
$$0 = A_1\alpha_1 + A_2 x_2 = -(A_3\alpha_3 + A_4\alpha_4) \,,$$

delle diagonali del quadrilatero $[\alpha]$ nel piano rappresentativo. Queste rette sono imagini, come sappiamo, di tre rette quintuple della superficie Ξ_2^{25}, le quali hanno le equazioni

$$\text{I)} \qquad U_{23} \equiv \overset{4}{A}_2 x_2 + \overset{4}{A}_3 x_3 = 0 \;,\quad U_{14} \equiv \overset{4}{A}_1 x_1 + \overset{4}{A}_4 x_4 = 0 \,,$$
$$\text{II)} \qquad U_{31} \equiv \overset{4}{A}_3 x_3 + \overset{4}{A}_1 x_1 = 0 \;,\quad U_{24} \equiv \overset{4}{A}_2 x_2 + \overset{4}{A}_4 x_4 = 0 \,,$$
$$\text{III)} \qquad U_{12} \equiv \overset{4}{A}_1 x_1 + \overset{4}{A}_2 x_2 = 0 \;,\quad U_{34} \equiv \overset{4}{A}_3 x_3 + \overset{4}{A}_4 x_4 = 0 \,.$$

Da codeste equazioni risulta poi che le medesime rette quintuple giacciono nel piano

$$\overset{4}{A}_1 x_1 + \overset{4}{A}_2 x_2 + \overset{4}{A}_3 x_3 + \overset{4}{A}_4 x_4 = 0 \,,$$

che è il *piano centrale* della superficie Ξ_2^{25} (n.º **7**), nel quale formano un triangolo, i cui vertici

$$\text{II III)} \qquad \overset{4}{A}_1 x_1 : \overset{4}{A}_2 x_2 : \overset{4}{A}_3 x_3 : \overset{4}{A}_4 x_4 = \;\; 1 : -1 : -1 : 1 \,,$$
$$\text{III I)} \qquad \text{»} \qquad = -1 : \;\; 1 : -1 : 1 \,,$$
$$\text{I II)} \qquad \text{»} \qquad = -1 : -1 : \;\; 1 : 1 \,,$$

sono punti *nonupli* per la superficie *).

---

*) Questi punti hanno infatti, nel piano rappresentativo, le imagini:

$$\text{II III} \left\{ \begin{array}{lll} [\;1 : -1 : -1 : 1] \,, & [\;\varepsilon : -\varepsilon : -1 : 1] \,, & [\;\varepsilon : -1 : -\varepsilon : 1] \,, \\ [\;\varepsilon^2 : -\varepsilon^2 : -1 : 1] \,, & [\;\varepsilon^3 : -\varepsilon^3 : -1 : 1] \,, & [\;\varepsilon^4 : -\varepsilon^4 : -1 : 1] \,, \\ [\;\varepsilon^2 : -1 : -\varepsilon^2 : 1] \,, & [\;\varepsilon^3 : -1 : -\varepsilon^3 : 1] \,, & [\;\varepsilon^4 : -1 : -\varepsilon^4 : 1] \,; \end{array} \right.$$

$$\text{III I} \left\{ \begin{array}{lll} [-1 : \;1 : -1 : 1] \,, & [-\varepsilon : \;\varepsilon : -1 : 1] \,, & [-1 : \;\varepsilon : -\varepsilon : 1] \,, \\ [-\varepsilon^2 : \;\varepsilon^2 : -1 : 1] \,, & [-\varepsilon^3 : \;\varepsilon^3 : -1 : 1] \,, & [-\varepsilon^4 : \;\varepsilon^4 : -1 : 1] \,, \\ [-1 : \;\varepsilon^2 : -\varepsilon^2 : 1] \,, & [-1 : \;\varepsilon^3 : -\varepsilon^3 : 1] \,, & [-1 : \;\varepsilon^4 : -\varepsilon^4 : 1] \,; \end{array} \right.$$

$$\text{I II} \left\{ \begin{array}{lll} [-1 : -1 : \;1 : 1] \,, & [-\varepsilon : -1 : \;\varepsilon : 1] \,, & [-1 : -\varepsilon : \;\varepsilon : 1] \,, \\ [-\varepsilon^2 : -1 : \;\varepsilon^2 : 1] \,, & [-\varepsilon^3 : -1 : \;\varepsilon^3 : 1] \,, & [-\varepsilon^4 : -1 : \;\varepsilon^4 : 1] \,, \\ [-1 : -\varepsilon^2 : \;\varepsilon^2 : 1] \,, & [-1 : -\varepsilon^3 : \;\varepsilon^3 : 1] \,, & [-1 : -\varepsilon^4 : \;\varepsilon^4 : 1] \,. \end{array} \right.$$

Intorno alla multiplicità di questi punti si confronti pure la Nota 1ª (n. 19) dei Rendic. Istit. Lombardo, 1888.

19. Nella ipotesi 2ª l'equazione generica delle imagini dei luoghi multipli assume le seguenti forme:

$$\begin{array}{llll}
A_r\alpha_r + (\varepsilon+1)A_s\alpha_s = 0 \,, & A_r\alpha_r + (\varepsilon^4+1)A_s\alpha_s = 0 \;; \\
(\varepsilon^3+1)A_r\alpha_r + A_s\alpha_s = 0 \,, & (\varepsilon^2+1)A_r\alpha_r + A_s\alpha_s = 0 \;; \\
\varepsilon A_r\alpha_r - A_s\alpha_s = 0 \,, & A_r\alpha_r - \varepsilon A_s\alpha_s = 0 \;; \\
\varepsilon^2 A_r\alpha_r - A_s\alpha_s = 0 \,, & A_r\alpha_r - \varepsilon^2 A_s\alpha_s = 0 \;; \\
A_r\alpha_r + (\varepsilon^2+1)A_s\alpha_s = 0 \,, & A_r\alpha_r + (\varepsilon^3+1)A_s\alpha_s = 0 \;; \\
(\varepsilon^4+1)A_r\alpha_r + A_s\alpha_s = 0 \,, & (\varepsilon+1)A_r\alpha_r + A_s\alpha_s = 0
\end{array}$$

alle quali si può soddisfare col porre ordinatamente:

$$\left\{\begin{array}{ll}
A_p\alpha_p : \ldots : A_s\alpha_s = \lambda_1+\lambda_2 : -\lambda_1 : & -(\varepsilon^4+1)\lambda_2 : \varepsilon^4\lambda_2 \,, \\
\qquad » \qquad = \lambda_1+\lambda_2 : -\lambda_1 : & -(\varepsilon+1)\lambda_2 : \varepsilon\lambda_2 \;;
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\qquad » \qquad = \lambda_1+\lambda_2 : -\lambda_1 : & \varepsilon^2\lambda_2 : -(\varepsilon^2+1)\lambda_2 \,, \\
\qquad » \qquad = \lambda_1+\lambda_2 : -\lambda_1 : & \varepsilon^3\lambda_2 : -(\varepsilon^3+1)\lambda_2 \;;
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\qquad » \qquad = \lambda_1+\lambda_2 : -\lambda_1 : & \varepsilon(\varepsilon^2+1)\lambda_2 : \varepsilon^2(\varepsilon^2+1)\lambda_2 \,, \\
\qquad » \qquad = \lambda_1+\lambda_2 : -\lambda_1 : & -\varepsilon^4(\varepsilon^3+1)\lambda_2 : \varepsilon^3(\varepsilon^3+1)\lambda_2 \;;
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\qquad » \qquad = \lambda_1+\lambda_2 : -\lambda_1 : & \varepsilon(\varepsilon+1)\lambda_2 : \varepsilon^3(\varepsilon+1)\lambda_2 \,, \\
\qquad » \qquad = \lambda_1+\lambda_2 : -\lambda_1 : & \varepsilon^3(\varepsilon+1)\lambda_2 : \varepsilon(\varepsilon+1)\lambda_2 \;;
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\qquad » \qquad = \lambda_1+\lambda_2 : -\lambda_1 : & -(\varepsilon^3+1)\lambda_2 : \varepsilon^3\lambda_2 \,, \\
\qquad » \qquad = \lambda_1+\lambda_2 : -\lambda_1 : & -(\varepsilon^2+1)\lambda_2 : \varepsilon^2\lambda_2 \;;
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\qquad » \qquad = \lambda_1+\lambda_2 : -\lambda_1 : & \varepsilon\lambda_2 : -(\varepsilon+1)\lambda_2 \,, \\
\qquad » \qquad = \lambda_1+\lambda_2 : -\lambda_1 : & \varepsilon^4\lambda_2 : -(\varepsilon^4+1)\lambda_2 \,.
\end{array}\right.$$

Di conseguenza le coordinate delle curve doppie rappresentate da queste rette sono fornite ordinatamente dalle formole:

$$\begin{array}{ll}
A_p x_p : \ldots : A_s x_s = (\lambda_1+\lambda_2)^5 : -\lambda_1^5 : & -(\varepsilon+1)^5\lambda_2^5 : \lambda_2^5 \,, \\
\qquad » \qquad = (\lambda_1+\lambda_2)^5 : -\lambda_1^5 : & \lambda_2^5 : -(\varepsilon^2+1)^5\lambda_2^5 \,, \\
\qquad » \qquad = (\lambda_1+\lambda_2)^5 : -\lambda_1^5 : & (\varepsilon^2+1)^5\lambda_2^5 : (\varepsilon^2+1)^5\lambda_2^5 \,, \\
\qquad » \qquad = (\lambda_1+\lambda_2)^5 : -\lambda_1^5 : & (\varepsilon+1)^5\lambda_2^5 : (\varepsilon+1)^5\lambda_2^5 \,, \\
\qquad » \qquad = (\lambda_1+\lambda_2)^5 : -\lambda_1^5 : & -(\varepsilon^2+1)^5\lambda_2^5 : \lambda_2^5 \,, \\
\qquad » \qquad = (\lambda_1+\lambda_2)^5 : -\lambda_1^5 : & \lambda_2^5 : -(\varepsilon+1)^5\lambda_2^5 \,.
\end{array}$$

Tali quintiche doppie razionali sono piane: i loro piani hanno le equazioni:

$$\begin{array}{r}
A_r x_r + (\varepsilon+1)^5 A_s x_s = 0 \,, \\
(\varepsilon^2+1)^5 A_r x_r + A_s x_s = 0 \,, \\
A_r x_r - A_s x_s = 0 \,, \\
A_r x_r + (\varepsilon^2+1)^5 A_s x_s = 0 \,, \\
(\varepsilon+1)^5 A_r x_r + A_s x_s = 0 \,.
\end{array}$$

Come si vede, codesti cinque piani escono tutti da un medesimo spigolo (rs) del tetraedro principale: il terzo di essi, che è il coniugato armonico del piano che lo stesso spigolo determina colla retta quintupla ad esso appoggiata, contiene la terza e la quarta delle quintiche doppie in discorso *).

20. Nella 3ª ipotesi, l'equazione generica delle imagini di curve multiple dà luogo ad equazioni del tipo

$$(\varepsilon^{\tau'}-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^{\tau''}-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^{\tau'''}-1)A_s\alpha_s=0$$

mancanti, per es., dell'indice p. Ora è facile provare che le equazioni consimili e prive di un altro indice si ponno sempre ridurre a quelle prive dell'indice p. Infatti si ha, per es.,

$$\begin{aligned}(\varepsilon-1)A_p\alpha_p&+(\varepsilon^2-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^3-1)A_s\alpha_s\\ &=(\varepsilon-1)\{A_p\alpha_p+(\varepsilon+1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^2+\varepsilon+1)A_s\alpha_s-A_p\alpha_p-A_q\alpha_q-A_r\alpha_r-A_s\alpha_s\}\\ &=\varepsilon\{(\varepsilon^4-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^2-1)A_s\alpha_s\}\end{aligned}$$

cosicchè la retta di equazione

$$(\varepsilon-1)A_p\alpha_p+(\varepsilon^2-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^3-1)A_s\alpha_s=0$$

coincide con quella di equazione

$$(\varepsilon^4-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^2-1)A_s\alpha_s=0\ :$$

la prima manca dell'indice q e la seconda manca dell'indice p.

Di conseguenza, le rette del tipo in questione, sono le sole seguenti:

$$\begin{cases}(\varepsilon-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^2-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^3-1)A_s\alpha_s=0\ ,\\ (\varepsilon^4-4)A_q\alpha_q+(\varepsilon^3-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^2-1)A_s\alpha_s=0\ ;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\varepsilon-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^2-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^4-1)A_s\alpha_s=0\ ,\\ (\varepsilon^4-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^3-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon-1)A_s\alpha_s=0\ ;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\varepsilon-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^3-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^4-1)A_s\alpha_s=0\ ,\\ (\varepsilon^4-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^3-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon-1)A_s\alpha_s=0\ ;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\varepsilon-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^3-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^2-1)A_s\alpha_s=0\ ,\\ (\varepsilon^4-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^2-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^3-1)A_s\alpha_s=0\ ;\end{cases}$$

---

*) Ed infatti, tale piano sega Ξ_2^{25} in un gruppo di cinque quintiche le cui imagini sono le rette $A_r\alpha_r-A_s\alpha_s=0$, $A_r\alpha_r-\varepsilon A_s\alpha_s=0$ ed $A_r\alpha_r-\varepsilon^4A_s\alpha_s=0$, $A_r\alpha_r-\varepsilon^2A_s\alpha_s=0$ ed $A_r\alpha_r-\varepsilon^3A_s\alpha_s=0$: le due ultime coppie di rette coincidono precisamente colle imagini delle due quintiche doppie in parola. — Cfr. n.° **9**.

$$\left\{\begin{aligned}(\varepsilon-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^4-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^2-1)A_s\alpha_s&=0\ ,\\(\varepsilon^4-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^3-1)A_s\alpha_s&=0\ ;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}(\varepsilon-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^4-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^3-1)A_s\alpha_s&=0\ ,\\(\varepsilon^4-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^2-1)A_s\alpha_s&=0\ ;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}(\varepsilon^2-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^3-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^4-1)A_s\alpha_s&=0\ ,\\(\varepsilon^3-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^2-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon-1)A_s\alpha_s&=0\ ;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}(\varepsilon^2-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^3-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon-1)A_s\alpha_s&=0\ ,\\(\varepsilon^3-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^2-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^4-1)A_s\alpha_s&=0\ ;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}(\varepsilon^2-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^4-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon-1)A_s\alpha_s&=0\ ,\\(\varepsilon^3-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^4-1)A_s\alpha_s&=0\ ;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}(\varepsilon^2-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^4-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^3-1)A_s\alpha_s&=0\ ,\\(\varepsilon^3-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^2-1)A_s\alpha_s&=0\ ;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}(\varepsilon^2-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^3-1)A_s\alpha_s&=0\ ,\\(\varepsilon^3-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^4-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^2-1)A_s\alpha_s&=0\ ;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}(\varepsilon^2-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^4-1)A_s\alpha_s&=0\ ,\\(\varepsilon^3-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^4-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon-1)A_s\alpha_s&=0\ .\end{aligned}\right.$$

Le curve doppie di Ξ_2^{25} rappresentate da queste coppie di rette hanno, rispettivamente, i punti correnti di coordinate fornite dalle formole

$$\begin{aligned}
\overset{4}{A}_p x_p:\ldots:\overset{4}{A}_s x_s &= [\ \varepsilon\lambda_1-(\varepsilon^2+1)\lambda_2]^5:-(\varepsilon+1)^5\lambda_1^5:(\lambda_1+\lambda_2)^5:\lambda_2^5\ ,\\
\text{»}\qquad &= [\ \varepsilon^3\lambda_1+(\varepsilon+1)\lambda_2]^5:-(\varepsilon+1)^5\lambda_1^5:(\lambda_1+\lambda_2)^5:(\varepsilon+1)^5\lambda_2^5\ ,\\
\text{»}\qquad &= [\ (\varepsilon+1)\lambda_1+\varepsilon^3\lambda_2]^5:(\varepsilon+1)^5\lambda_1^5:(\lambda_1+\lambda_2)^5:-(\varepsilon+1)^5\lambda_2^5\ ,\\
\text{»}\qquad &= [\ \varepsilon^3(\varepsilon+1)\lambda_1-(\varepsilon^2+1)\lambda_2]^5:(\varepsilon+1)^5\lambda_1^5:(\lambda_1+\lambda_2)^5:\lambda_2^5\ ,\\
\text{»}\qquad &= [-(\varepsilon+1)\lambda_1+\varepsilon^3\lambda_2]^5:\lambda_1^5:(\lambda_1+\lambda_2)^5:-(\varepsilon^2+1)^5\lambda_2^5\ ,\\
\text{»}\qquad &= [-(\varepsilon+1)\lambda_1+\varepsilon^2(\varepsilon^2+1)\lambda_2]^5:\lambda_1^5:(\lambda_1+\lambda_2)^5:(\varepsilon^2+1)^5\lambda_2^5\ ,\\
\text{»}\qquad &= [-(\varepsilon^2+1)\lambda_1+\varepsilon\lambda_2]^5:\lambda_1^5:(\lambda_1+\lambda_2)^5:-(\varepsilon+1)^5\lambda_2^5\ ,\\
\text{»}\qquad &= [-(\varepsilon^3+1)\lambda_1+\varepsilon\lambda_2]^5:\lambda_1^5:(\lambda_1+\lambda_2)^5:(\varepsilon+1)^5\lambda_2^5\ ,\\
\text{»}\qquad &= [\ \varepsilon^3\lambda_1-(\varepsilon+1)\lambda_2]^5:-(\varepsilon^2+1)^5\lambda_1^5:(\lambda_1+\lambda_2)^5:\lambda_2^5\ ,\\
\text{»}\qquad &= [\ \varepsilon\lambda_1+(\varepsilon^2+1)\lambda_2]^5:-(\varepsilon^2+1)^5\lambda_1^5:(\lambda_1+\lambda_2)^5:(\varepsilon^2+1)^5\lambda_3^5\ ,\\
\text{»}\qquad &= [\ (\varepsilon^2+1)\lambda_1+\varepsilon\lambda_2]^5:(\varepsilon^2+1)^5\lambda_1^5:(\lambda_1+\lambda_2)^5:-(\varepsilon^2+1)^5\lambda_2^5\ ,\\
\text{»}\qquad &= [\ \varepsilon^2(\varepsilon^2+1)\lambda_1-(\varepsilon+1)\lambda_2]^5:(\varepsilon^2+1)^5\lambda_1^5:(\lambda_1+\lambda_2)^5:\lambda_2^5\ .
\end{aligned}$$

21. Riassumendo, possiamo dunque dire che *sulla superficie* Ξ_2^{25} *esistono tre rette quintuple giacenti in un piano; sei gruppi, ognuno di sei quintiche piane razionali, i cui piani escono, per ciascun sistema, da un medesimo spigolo del tetraedro principale,*

ed uno dei quali contiene due quintiche doppie (cfr. n.° **9**); *e finalmente esistono ancora dodici quintiche gobbe doppie pure razionali.*

22. Dopo questi esempi ed altri già noti nello spazio ordinario, potremo aggiungerne alcuni nuovi per lo spazio a quattro dimensioni.

Pure noti sono in codesto spazio a quattro dimensioni i casi di $n=2$ ed $n=3$, molto interessanti ciascuno per talune configurazioni cui dànno luogo: trattiamo quì appresso i casi $n=4$ ed $n=5$, esimendoci dal registrare certi gruppi di formole per la perfetta analogia cbe esse presentano coi precedenti casi dello spazio ordinario.

Caso $m=4, n=4$.

23. Ci si trova in presenza di una varietà Ξ_3^{64} di equazione

$$\sqrt[4]{\underset{1}{A}^3 x_1}+\sqrt[4]{\underset{2}{A}^3 x_2}+\sqrt[4]{\underset{3}{A}^3 x_3}+\sqrt[4]{\underset{4}{A}^3 x_4}+\sqrt[4]{\underset{5}{A}^3 x_5}=0 .$$

Le coordinate

$$x_1 : \ldots : x_5 = A_1\alpha_1^4 : \ldots : A_5\alpha_5^4$$

del suo punto corrente ne forniscono la rappresentazione univoca sullo spazio ordinario $[\omega]$, nel quale si verifica l'identità fondamentale.

L'equazione generica delle imagini dei luoghi multipli è, come al solito,

$$\overset{\tau}{\varepsilon}{}^1 A_1\alpha_1+\overset{\tau}{\varepsilon}{}^2 A_2\alpha_2+\overset{\tau}{\varepsilon}{}^3 A_3\alpha_3+\overset{\tau}{\varepsilon}{}^4 A_4\alpha_4+\overset{\tau}{\varepsilon}{}^5 A_5\alpha_5=0 ,$$

per la quale, esclusi i casi $\tau_1=\ldots=\tau_5$ (identità fondamentale) e $\tau_p \neq \tau_p=\tau_r=\tau_s=\tau_t$ (imagini $\alpha_p=0$ delle superficie di contatto degli spazi $U_3^{(p)}$), rimangono a considerarsi le sole seguenti ipotesi:

1ª) $\tau_p=\tau_q=\tau_r \neq \tau_s=\tau_t$,

2ª) $\tau_p=\tau_q=\tau_r \neq \tau_s \neq \tau_t$,

3ª) $\tau_p=\tau_q \neq \tau_r=\tau_s \neq \tau_t$,

4ª) $\tau_p=\tau_q \neq \tau_r \neq \tau_s \neq \tau_t$.

Altre ipotesi non si possono presentare, perchè le τ sono suscettibili dei quattro valori 1, 2, 3, 4 (sufficienti) e quindi due di esse, almeno, dovranno essere eguali.

24. La 1ª ipotesi fornisce i piani diagonali

$$\theta_{pq} \equiv A_p\alpha_p + A_q\alpha_q = -(A_r\alpha_r + A_s\alpha_s + A_t\alpha_t)=0 \qquad (pq=12 , \ldots , 45)$$

del pentaedro $[\alpha]$, e sono perciò imagini di 10 *coni quadrupli del quarto ordine* rappresentati dalle equazioni

$$\Omega_{pq} \equiv \overset{3}{A}_p x_p - \overset{3}{A}_q x_q = 0 ,$$

$${}^{p,q)}\Xi_1^4 = \sqrt[4]{\underset{r}{A}^3 x_r} + \sqrt[4]{\underset{s}{A}^3 x_s} + \sqrt[4]{\underset{t}{A}^3 x_t} = 0 .$$

Indicheremo questo cono col simbolo $\mathbf{W}_{pq}$.

25. Fissata una terna di indici p, q, r essi individuano tre coni quadrupli $\mathbf{W}_{qr}$, $\mathbf{W}_{rp}$, $\mathbf{W}_{pq}$, che diremo fra loro *associati in terna*, le cui imagini si tagliano a due a due nelle tre rette seguenti:

$$\begin{array}{llll} \theta_{rp} \text{ e } \theta_{pq}, & \text{nella retta } A_p\alpha_p : \ldots : A_t\alpha_t = & \lambda_1 : -\lambda_1 : -\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_1 - \lambda_2 , \\ \theta_{pq} \text{ » } \theta_{pr} & \text{»} \quad\quad \text{»} & = -\lambda_1 : \lambda_1 : -\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_1 - \lambda_2 , \\ \theta_{qr} \text{ » } \theta_{rp} & \text{»} \quad\quad \text{»} & = -\lambda_1 : -\lambda_1 : \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_1 - \lambda_2 , \end{array}$$

le quali sono congiunte fra loro e congiunte alle altre sei rette:

$$\left.\begin{array}{ll} A_p\alpha_p : \ldots : A_t\alpha_t = & -\lambda_1 : i\lambda_1 : -i\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_1 - \lambda_2 , \\ \text{»} & = -\lambda_1 : -i\lambda_1 : i\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_1 - \lambda_2 , \end{array}\right\} \text{del piano } \theta_{qr} ,$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{»} & = -i\lambda_1 : -\lambda_1 : i\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_1 - \lambda_2 , \\ \text{»} & = i\lambda_1 : -\lambda_1 : -i\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_1 - \lambda_2 , \end{array}\right\} \text{del piano } \theta_{rp} ,$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{»} & = i\lambda_1 : -i\lambda_1 : -\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_1 - \lambda_2 , \\ \text{»} & = -i\lambda_1 : i\lambda_1 : -\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_1 - \lambda_2 \end{array}\right\} \text{del piano } \theta_{pq} .$$

Ne segue che *gli anzidetti coni quadrupli fra loro associati in terna si intersecano tutti in una medesima quartica razionale, la quale è nonupla per la varietà* Ξ_3^{64}. Codesta curva, che indicheremo al simbolo Γ_{st}, è necessariamente *piana*, perchè deve appartenere a ciascuno degli spazi $\Omega_{qr}, \Omega_{rp}, \Omega_{pq}$, i quali passano per un medesimo piano, avendosi identicamente $\Omega_{qr} + \Omega_{rp} + \Omega_{pq} = 0$.

Le coordinate del punto corrente su tale curva sono date dalle formole:

$$\overset{3}{A}_p x_p : \ldots : \overset{3}{A}_t x_t = \lambda_1^4 : \lambda_1^4 : \lambda_1^4 : \lambda_2^4 : (\lambda_1 - \lambda_2)^4 .$$

Se consideriamo il simbolo Γ_{st} della quartica nonupla per la quale passano i tre coni quadrupli $\mathbf{W}_{qr}, \mathbf{W}_{rp}, \mathbf{W}_{pq}$ vediamo che, sul cono $\mathbf{W}_{pq}$ giacciono le tre quartiche Γ_{st}, Γ_{tr}, Γ_{rs}.

Le quartiche nonuple Γ *sono in numero di 10.*

26. Nella 2ª ipotesi si ottiene il gruppo di piani

$$\begin{array}{ll} (1+i)A_s\alpha_s + iA_t\alpha_t = 0 , & (1+i)A_s\alpha_s + A_t\alpha_t = 0 ; \\ iA_s\alpha_s + A_t\alpha_t = 0 , & A_s\alpha_s + iA_t\alpha_t = 0 ; \\ A_s\alpha_s + (1+i)A_t\alpha_t = 0 , & iA_s\alpha_s + (1+i)A_t\alpha_t = 0 ; \end{array}$$

dei quali sono congiunti i due piani di una stessa orizzontale.

Le superficie doppie obbiettive rappresentate da queste coppie di piani hanno ordinatamente i punti correnti definiti dalle formole

$$\begin{array}{ll} A_p x_p : \ldots : A_t x_t = & \lambda_1^4 : \lambda_2^4 : \lambda_3^4 : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^4 : -4(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^4 , \\ \text{»} & = -4\lambda_1^4 : -4\lambda_2^4 : -4\lambda_3^4 : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^4 : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^4 , \\ \text{»} & = \lambda_1^4 : \lambda_2^4 : \lambda_3^4 : -4(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^4 : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^4 . \end{array}$$

Indicheremo queste tre superficie ordinatamente coi simboli $\mathbf{V}_{st}^{(1)}$, $\mathbf{V}_{st}$, $\mathbf{V}_{st}^{(2)}$; le loro equazioni sono:

$$\text{per } \mathbf{V}_{st}^{(1)}) \quad \Omega_{st}^{(1)}=0 \ , \quad \sqrt[4]{A_p^3 x_p}+\sqrt[4]{A_q^3 x_q}+\sqrt[4]{A_r^3 x_r}+\sqrt[4]{A_s^3 x_s}=0$$

$$» \ \mathbf{V}_{st}) \quad \Omega_{st}=0 \ , \quad \begin{cases} \sqrt[4]{A_p^3 x_p}+\sqrt[4]{A_q^3 x_q}+\sqrt[4]{A_r^3 x_r}+\sqrt[4]{-4A_s^3 x_s}=0 \\ \text{oppure} \\ \sqrt[4]{A_p^3 x_p}+\sqrt[4]{A_q^3 x_q}+\sqrt[4]{A_r^3 x_r}+\sqrt[4]{-4A_t^3 x_t}=0 \end{cases}$$

$$» \ \mathbf{V}_{st}^{(2)}) \quad \Omega_{st}^{(2)}=0 \ , \quad \sqrt[4]{A_p^3 x_p}+\sqrt[4]{A_q^3 x_q}+\sqrt[4]{A_r^3 x_r}+\sqrt[4]{A_t^3 x_t}=0$$

dove si sono posti

$$\Omega_{st}^{(1)} \equiv 4\overset{3}{A}_s x_s + \overset{3}{A}_t x_t \quad , \quad \Omega_{st}^{(2)} \equiv \overset{3}{A}_s x_s + 4\overset{3}{A}_t x_t \ .$$

Giova osservare che lo spazio $\Omega_{st}=0$ contenente *la superficie doppia* $\mathbf{V}_{st}$ *è anche quello in cui giace il cono quadruplo* $\mathbf{W}_{st}$: inoltre, le quartiche Γ_{qr}, Γ_{rp}, Γ_{pq} nonuple (per Ξ_3^{64}) sono doppie per la superficie doppia $\mathbf{V}_{st}$.

27. Nella 3ª ipotesi l'equazione (10) assume la forma

$$(i^{\tau'}-1)\theta_{rs}+(i^{\tau''}-1)\theta_{qt}=0 \qquad (\tau' \neq \tau''=1\ ,\ 2\ ,\ 3)\ .$$

Si hanno così le seguenti coppie di piani congiunti:

$$\begin{array}{rcr} (1+i)\theta_{rs}+i\theta_{qt}=0 & \text{e} & (1+i)\theta_{rs}+\theta_{qt}=0\ , \\ i\theta_{rs}+\theta_{qt}=0 & » & \theta_{rs}+i\theta_{qt}=0\ , \\ \theta_{rs}+(1+i)\theta_{qt}=0 & » & i\theta_{rs}+(1+i)\theta_{qt}=0\ , \end{array}$$

le quali sono imagini di altrettante superficie doppie del 16ᵐᵒ ordine e che noi indicheremo con simboli alludenti all'indice p che trovasi escluso. — Le coordinate del punto corrente su ciascuna di queste superficie doppie sono ordinatamente:

$$\begin{array}{rl} \overset{3}{A}_p x_p:\ldots:\overset{3}{A}_t x_t = & (\lambda_2+\lambda_3)^4 : -4\lambda_1^4 : \lambda_2^4 : \lambda_3^4 : -4(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^4\ , \\ » \quad = & -4(\lambda_2+\lambda_3)^4 : \lambda_1^4 : \lambda_2^4 : \lambda_3^4 : (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^4\ , \\ » \quad = & (\lambda_2+\lambda_3)^4 : \lambda_1^4 : -4\lambda_2^4 : -4\lambda_3^4 : (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^4\ . \end{array}$$

Allo stesso gruppo riferentesi a codesto indice appartengono quelle superficie nelle cui imagini appariscono le forme θ_{sq} e θ_{rt}, θ_{qr} e θ_{st}.

Potremo dunque indicare queste tre terne di superficie ordinatamente con

$$\mathfrak{V}_{p,1}^{(1)}\ ,\ \mathfrak{V}_{p,1}^{(2)}\ ,\ \mathfrak{V}_{p,1}^{(3)}\ ;$$

$$\mathfrak{V}_{p,2}^{(1)} \;,\; \mathfrak{V}_{p,2}^{(2)} \;,\; \mathfrak{V}_{p\,2}^{(3)} \;;$$

$$\mathfrak{V}_{p,3}^{(1)} \;,\; \mathfrak{V}_{p,3}^{(2)} \;,\; \mathfrak{V}_{p,3}^{(3)} \;.$$

Le superficie doppie di specie $\mathfrak{V}$ della varietà Ξ_3^{64} sono in numero di 45.

28. Finalmente, nella 4ª ipotesi l'equazione (10) delle imagini delle superficie multiple diviene:

$$(i^{\tau'}-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^{\tau''}-1)A_s\alpha_s+(\varepsilon^{\tau'''}-1)A_t\alpha_t=0 \quad , \quad (\tau'\neq\tau''\neq\tau'''=1\ ,\ 2\ ,\ 3)$$

dando così luogo a terne del seguente tipo di coppie di piani congiunti:

$$\begin{array}{lll}
(1+i)A_r\alpha_r+iA_s\alpha_s+A_t\alpha_t=0\ , & (1+i)A_r\alpha_r+A_s\alpha_s+iA_t\alpha_t=0\ ; \\
iA_r\alpha_r+A_s\alpha_s+(1+i)A_t\alpha_t=0\ , & A_r\alpha_r+iA_s\alpha_s+(1+i)A_t\alpha_t=0\ ; \\
A_r\alpha_r+(1+i)A_s\alpha_s+iA_t\alpha_t=0\ , & iA_r\alpha_r+(1+i)A_s\alpha_s+A_t\alpha_t=0\ .
\end{array}$$

Risolvendo queste equazioni si perviene alle seguenti espressioni per le coordinate del punto corrente sopra ciascuna di queste superficie doppie ordinatamente:

$$\begin{array}{rl}
\overset{3}{A}_p x_p : \ldots : \overset{3}{A}_t x_t = & (\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)^4 : \lambda_1^4 : \lambda_2^4 : -4(\lambda_2+\lambda_3)^4 : -4\lambda_3^4\ , \\
\text{»} \qquad = & (\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)^4 : \lambda_1^4 : -4(\lambda_2+\lambda_3)^4 : -4\lambda_3^4 : \lambda_2^4\ , \\
\text{»} \qquad = & (\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)^4 : \lambda_1^4 : -4\lambda_3^4 : \lambda_2^4 : -4(\lambda_2+\lambda_3)^4\ .
\end{array}$$

Le superficie doppie così rappresentate verranno indicate ordinatamente coi simboli $\mathfrak{W}_{pq}^{(1)}, \mathfrak{W}_{pq}^{(2)}, \mathfrak{W}_{pq}^{(3)}$.

Le superficie doppie del tipo $\mathfrak{W}$ sono in numero di 30.

Caso $m=4\ ,\ n=5$.

29. Le espressioni delle coordinate del punto corrente sopra la varietà Ξ_3^{125} sono

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_5 = A_1\alpha_1^5 : A_2\alpha_2^5 : \ldots : A_5\alpha_5^5\ ,$$

colla condizione

$$A_1\alpha_1+A_2\alpha_2+\ldots+A_5\alpha_5=0\ .$$

L'equazione locale della stessa varietà è dunque

$$\sqrt[5]{A_1^4 x_1}+\sqrt[5]{A_2^4 x_2}+\ldots+\sqrt[5]{A_5^4 x_5}=0\ .$$

L'equazione della imagine del luogo multiplo

$$\varepsilon^{\tau_1}A_1\alpha_1+\varepsilon^{\tau_2}A_2\alpha_2+\dots+\varepsilon^{\tau_5}A_5\alpha_5=0 ,$$

dove è ε una radice quinta primitiva dell'unità, e $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_5=1, 2, 3, 4, 5$.

Esclusi, come al solito, i coni $\tau_1=\dots=\tau_5$ e $\tau_p\neq\tau_q=\dots=\tau_t$, rimangono le seguenti ipotesi:

1ª) $\nu_p=\nu_q=\nu_r\neq\nu_s=\nu_t$,
2ª) $\nu_p=\nu_q=\nu_r\neq\nu_s\neq\nu_t$,
3ª) $\nu_p=\nu_q\neq\nu_r=\nu_s\neq\nu_t$,
4ª) $\nu_p=\nu_q\neq\nu_r\neq\nu_s\neq\nu_t$,
5ª) $\nu_p\neq\nu_q\neq\nu_r\neq\nu_s\neq\nu_t$.

30. Nella 1ª ipotesi incontriamo le dieci equazioni

$$\theta_{pq}=A_p\alpha_p+A_q\alpha_q=-(A_r\alpha_r+A_s\alpha_s+A_t\alpha_t)=0$$

dei piani diagonali del pentaedro $[\alpha]$, i quali sono imagini di altrettanti coni del 5° ordine quintupli per Ξ_3^{125}.

Questi coni $\mathbf{W}_{pq}$ projettano, rispettivamente, dai punti (vertici) K_{pq} di coordinate

$$x_p:x_q:x_r:x_s:x_t=\frac{1}{A_p^4}:-\frac{1}{A_p^4}:0:0:0$$

le curve Ξ_1^5 dell'opposto $\mathbf{U}_2$. Da ciò appare che i vertici dei medesimi coni giacciono tutti nello spazio centrale (n.° **7**)

$$A_1^4x_1+A_2^4x_2+A_3^4x_3+A_4^4x_4+A_5^4x_5=0 .$$

Se consideriamo due coni quintupli aventi un indice in comune, come $\mathbf{W}_{qr}$ e $\mathbf{W}_{rp}$, *essi hanno a comune la quintica razionale piana* $Z_{rp}^{(q)}$

$$A_p^4x_p:\dots:A_t^4x_t=-\lambda_1^5:-\lambda_1^5:\lambda_1^5:\lambda_2^5:(\lambda_1-\lambda_2)^5$$

nonupla per la varietà Ξ_3^{125}.

Le quintiche nonuple sono in numero di trenta, su ogni cono quintuplo ne giacciono sei e per ognuna di esse passano due coni quintupli.

31. Nella 2ª ipotesi si hanno i piani

$$(\varepsilon^{\tau'}-1)A_s\alpha_s+(\varepsilon^{\tau''}-1)A_t\alpha_t=0 \quad , \quad (\tau'\neq\tau''=1,2,3,4) ,$$

che sono congiunti a due a due e che rappresentano quindi, per ogni combinazione *st*,

sei superficie doppie del 25^{mo} ordine della specie Ξ_2^{25} (n.° 16 e segg.). Codesti piani sono:

$$
\begin{array}{ll}
A_s\alpha_s + (\varepsilon+1)A_t\alpha_t = 0 \;, & A_s\alpha_s + (\varepsilon^4+1)A_t\alpha_t = 0 \;; \\
A_s\alpha_s - \varepsilon^3(\varepsilon+1)A_t\alpha_t = 0 \;, & A_s\alpha_s - \varepsilon(\varepsilon+1)A_t\alpha_t = 0 \;; \\
A_s\alpha_s - \varepsilon^4 A_t\alpha_t = 0 \;, & A_s\alpha_s - \varepsilon A_t\alpha_t = 0 \;; \\
A_s\alpha_s - \varepsilon^3 A_t\alpha_t = 0 \;, & A_s\alpha_s - \varepsilon^2 A_t\alpha_t = 0 \;; \\
A_s\alpha_s + (\varepsilon^2+1)A_t\alpha_t = 0 \;, & A_s\alpha_s + (\varepsilon^3+1)A_t\alpha_t = 0 \;; \\
A_s\alpha_s - \varepsilon^2(\varepsilon^2+1)A_t\alpha_t = 0 \;, & A_s\alpha_s - \varepsilon(\varepsilon^2+1)A_t\alpha_t = 0 \;.
\end{array}
$$

A queste equazioni si soddisfa ponendo

$$
\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
A_p\alpha_p : A_q\alpha_q : \ldots : A_t\alpha_t = -\varepsilon\lambda_1 : -\varepsilon\lambda_2 : \varepsilon(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) : -(\varepsilon+1)\lambda_3 : \lambda_3 \;, \\
\quad\text{»} \qquad = -\varepsilon^4\lambda_1 : -\varepsilon^4\lambda_2 : \varepsilon^4(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) : -(\varepsilon^4+1)\lambda_3 : \lambda_3 \;;
\end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l}
\quad\text{»} \qquad = -\lambda_1 : -\lambda_2 : \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 : \varepsilon^2\lambda_3 : (\varepsilon^2+1)\lambda_3 \;, \\
\quad\text{»} \qquad = -\lambda_1 : -\lambda_2 : \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 : \varepsilon^3\lambda_3 : -(\varepsilon^3+1)\lambda_3 \;;
\end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l}
\quad\text{»} \qquad = -\lambda_1 : -\lambda_2 : \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 : \varepsilon(\varepsilon^2+1)\lambda_3 : \varepsilon^2(\varepsilon^2+1)\lambda_3 \;, \\
\quad\text{»} \qquad = -\lambda_1 : -\lambda_2 : \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 : \varepsilon^2(\varepsilon^2+1)\lambda_3 : \varepsilon(\varepsilon^2+1)\lambda_3 \;;
\end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l}
\quad\text{»} \qquad = -\lambda_1 : -\lambda_2 : \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 : \varepsilon(\varepsilon+1)\lambda_3 : \varepsilon^3(\varepsilon+1)\lambda_3 \;, \\
\quad\text{»} \qquad = -\lambda_1 : -\lambda_2 : \lambda_1+\lambda_2+\lambda_2 : \varepsilon^3(\varepsilon+1)\lambda_3 : \varepsilon(\varepsilon+1)\lambda_3 \;;
\end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l}
\quad\text{»} \qquad = -\varepsilon^2\lambda_1 : -\varepsilon^2\lambda_1 : \varepsilon^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) : -(\varepsilon^2+1)\lambda_3 : \lambda_3 \;, \\
\quad\text{»} \qquad = -\varepsilon^3\lambda_1 : -\varepsilon^3\lambda_2 : \varepsilon^3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) : -(\varepsilon^3+1)\lambda_3 : \lambda_3 \;;
\end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l}
\quad\text{»} \qquad = -\lambda_1 : -\lambda_2 : \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 : \varepsilon\lambda_3 : -(\varepsilon+1)\lambda_3 \;, \\
\quad\text{»} \qquad = -\lambda_1 : -\lambda_2 : \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 : \varepsilon^4\lambda_3 : -(\varepsilon^4+1)\lambda_3 \;;
\end{array}\right.
\end{array}
$$

cosicchè le sei superficie doppie, che indicheremo ordinatamente con $\mathbf{V}_{st}^{(1)}, \ldots, \mathbf{V}_{st}^{(6)}$, avranno le coordinate correnti (su di esse)

$$
\begin{array}{l}
A_p x_p : \ldots : A_t x_t = -\lambda_1^5 : -\lambda_2^5 : (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^5 : -(\varepsilon+1)^5\lambda_3^5 : \lambda_3^5 \;, \\
\quad\text{»} \qquad = -\lambda_1^5 : -\lambda_2^5 : (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^5 : \lambda_3^5 : -(\varepsilon^2+1)^5\lambda_3^5 \;, \\
\quad\text{»} \qquad = -\lambda_1^5 : -\lambda_2^5 : (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^5 : (\varepsilon^2+1)^5\lambda_3^5 : (\varepsilon^2+1)^5\lambda_3^5 \;, \\
\quad\text{»} \qquad = -\lambda_1^5 : -\lambda_2^5 : (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^5 : (\varepsilon+1)^5\lambda_3^5 : (\varepsilon+1)^5\lambda_3^5 \;, \\
\quad\text{»} \qquad = -\lambda_1^5 : -\lambda_2^5 : (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^5 : -(\varepsilon^2+1)^5\lambda_3^5 : \lambda_3^5 \;, \\
\quad\text{»} \qquad = -\lambda_1^5 : -\lambda_2^5 : (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^5 : \lambda_3^5 : -(\varepsilon+1)^5\lambda_3^5 \;.
\end{array}
$$

Da queste equazioni appare che codeste sei superficie Ξ_2^{25} doppie per la varietà Ξ_3^{125} sono ordinarie, i loro spazi escono dall' $\mathbf{U}_2^{(st)}$, e le superficie $\mathbf{V}_{st}^{(3)}$ e $\mathbf{V}_{st}^{(4)}$ giacciono

in uno stesso spazio $\Omega_{st}=0$, che è il coniugato armonico di $\upsilon_{st}=0$ rispetto ad $U_3^{(s)}$ ad $U_3^{(t)}$ *).

Le superficie **V** *sono in numero di 60.*

32. Nella terza ipotesi l'equazione (10) riducesi al tipo

$$\varepsilon^{\tau'}\theta_{pq}+\varepsilon^{\tau''}\theta_{rs}+A_t\alpha_t=0 \qquad (\tau'\neq\tau''=1\,,\,2\,,\,3\,,\,4)\,,$$

ossia alla forma

$$(\varepsilon^{\nu'}-1)\theta_{pq}+(\varepsilon^{\nu''}-1)\theta_{rs}=0\,.$$

Ora, per una data coppia di combinazioni binarie degli indici $p\,,q\,,r\,,s\,,t$, si hanno le seguenti coppie congiunte di piani:

$$\begin{array}{lcl}
\theta_{pq}+(\varepsilon+1)\theta_{rs}=0 & \text{e} & \theta_{pq}+(\varepsilon^4+1)\theta_{rs}=0\,,\\
\theta_{pq}-\varepsilon^3(\varepsilon+1)\theta_{rs}=0 & » & \theta_{pq}-\varepsilon(\varepsilon+1)\theta_{rs}=0\,,\\
\theta_{pq}-\varepsilon^4\theta_{rs}=0 & » & \theta_{pq}-\varepsilon\theta_{rs}=0\,,\\
\theta_{pq}-\varepsilon^3\theta_{rs}=0 & » & \theta_{pq}-\varepsilon^2\theta_{rs}=0\,,\\
\theta_{pq}+(\varepsilon^2+1)\theta_{rs}=0 & » & \theta_{pq}+(\varepsilon^3+1)\theta_{rs}=0\,,\\
\theta_{pq}-\varepsilon^2(\varepsilon^2+1)\theta_{rs}=0 & » & \theta_{pq}-\varepsilon(\varepsilon^2+1)\theta_{rs}=0\,.
\end{array}$$

A queste equazioni si soddisfa ponendo ordinatamente:

$$\begin{array}{lll}
\Big\{ & A_p\alpha_p:\ldots:A_t\alpha_t & =(\varepsilon+1)\lambda_1:(\varepsilon+1)\lambda_2:\lambda_3:-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3):-\varepsilon(\lambda_1+\lambda_2)\,,\\
 & » & =(\varepsilon^4+1)\lambda_1:(\varepsilon^4+1)\lambda_2:\lambda_3:-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3):-\varepsilon^4(\lambda_1+\lambda_2)\,;\\
\Big\{ & » & =(\varepsilon+1)\lambda_1:(\varepsilon+1)\lambda_2:-\varepsilon^2\lambda_3:\varepsilon^3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3):(\varepsilon^3+1)(\lambda_1+\lambda_2)\,,\\
 & » & =(\varepsilon^4+1)\lambda_1:(\varepsilon^4+1)\lambda_2:-\varepsilon^3\lambda_3:\varepsilon^3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3):(\varepsilon^2+1)(\lambda_1+\lambda_2)\,;\\
\Big\{ & » & =\lambda_1:\lambda_2:-\varepsilon\lambda_3:\varepsilon(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3):-(\varepsilon+1)(\lambda_1+\lambda_2)\,,\\
 & » & =\lambda_1:\lambda_2:-\varepsilon^4\lambda_3:\varepsilon^4(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3):-(\varepsilon^4+1)(\lambda_1+\lambda_2)\,;\\
\Big\{ & » & =\lambda_1:\lambda_2:-\varepsilon^2\lambda_3:\varepsilon^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3):-(\varepsilon^2+1)(\lambda_1+\lambda_2)\,,\\
 & » & =\lambda_1:\lambda_2:-\varepsilon^3\lambda_3:\varepsilon^3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3):-(\varepsilon^3+1)(\lambda_1+\lambda_2)\,;\\
\Big\{ & » & =(\varepsilon^2+1)\lambda_1:(\varepsilon^2+1)\lambda_2:\lambda_3:-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3):-\varepsilon^2(\lambda_1+\lambda_2)\,,\\
 & » & =(\varepsilon^3+1)\lambda_1:(\varepsilon^3+1)\lambda_2:\lambda_3:-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3):-\varepsilon^3(\lambda_1+\lambda_2)\,;\\
\Big\{ & » & =(\varepsilon^3+1)\lambda_1:(\varepsilon^3+1)\lambda_2:-\varepsilon\lambda_3:\varepsilon(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3):(\varepsilon^3+1)(\lambda_1+\lambda_2)\,,\\
 & » & =(\varepsilon^2+1)\lambda_1:(\varepsilon^2+1)\lambda_2:-\varepsilon^3\lambda_3:\varepsilon^4(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3):(\varepsilon^2+1)(\lambda_1+\lambda_2)\,.
\end{array}$$

Di quì si deducono ovviamente le espressioni delle coordinate correnti per ciascuna delle superficie doppie in questione.

---

*) Vedi n.° 9.

Codeste superficie potranno essere designate con una lettera $\mathcal{V}$ accompagnata da indici opportuni. Terremo per la successione delle superficie qui registrate l'ordine testè seguito

$$(\tau', \tau'') = (1\ ,\ 2)\quad ,\quad (1\ ,\ 3)\ ,\ \ldots\ ,\ (3\ ,\ 4)$$

e

$$(4\ ,\ 3)\quad ,\quad (4\ ,\ 2)\ ,\ \ldots\ ,\ (2\ ,\ 1)\ .$$

Segneremo l'indice escluso seguito da un numero, che corrisponde alla consueta maniera di aggruppare per coppie quattro lettere sempre considerate nell'ordine circolare alfabetico. Le suindicate superficie doppie saranno quindi

$$\mathcal{V}_{t,3}^{(1)}\ ,\ \ldots\ ,\ \mathcal{V}_{t,3}^{(6)}\ .$$

Le superficie del tipo $\mathcal{V}$ sono in numero di 90.

33. Nella 4ª ipotesi l'equazione generale (10) riducesi al tipo

$$(\varepsilon^{\tau'} - 1)A_r\alpha_r + (\varepsilon^{\tau''} - 1)A_s\alpha_s + (\varepsilon^{\tau'''} - 1)A_t\alpha_t = 0\ ,$$

da cui sono esclusi i due indici p e q.

Appartengono a questo tipo certe superficie doppie del 25$^{\text{mo}}$ ordine che noi designeremo coi simboli $\mathcal{W}$ accompagnati da indici opportuni composti in modo che, superiormente alla lettera posta a piedi delle $A\alpha$, sia indicato l'esponente di ε, che accompagna lo stesso $A\alpha$.

Così, per es., la superficie $\mathcal{W}\binom{2\,1\,3}{r\,s\,t}$ è quella che ha per imagine il piano

$$(\varepsilon^2 - 1)A_r\alpha_r + (\varepsilon - 1)A_s\alpha_s + (\varepsilon^3 - 1)A_t\alpha_t = 0$$

congiunto all'altro

$$(\varepsilon^3 - 1)A_r\alpha_r + (\varepsilon^4 - 1)A_s\alpha_s + (\varepsilon^2 - 1)A_t\alpha_t = 0\ ,$$

onde la stessa superficie potrà essere indicata pure con $\mathcal{W}\binom{3\,4\,2}{r\,s\,t}$.

Per brevità, registreremo le espressioni delle coordinate del punto corrente sulla sola superficie indicata del tipo.

Si osservi che l'equazione dell'imagine prima si può soddisfare col porre

$$A_p\alpha_p : \ldots : A_t\alpha_t = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) : -\lambda_1 : \varepsilon(\varepsilon + 1)\lambda_2 : \varepsilon^2\lambda_3 : \varepsilon^3(\varepsilon + 1)\lambda_2 - (\varepsilon^2 + 1)\lambda_3\ :$$

le coordinate richieste saranno quindi date da

$$\overset{4}{A}_p x_p : \ldots : \overset{4}{A}_t x_t = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^5 : -\lambda_1^5 : (\varepsilon + 1)^5\lambda_2^5 : \lambda_3^5 : \{(\varepsilon^4 + \varepsilon)\lambda_2 - (\varepsilon^2 + 1)\lambda_3\}^5\ .$$

Le superficie doppie di questo tipo sono in numero di 120.

34. Nella 5ª ed ultima ipotesi si hanno certe superficie doppie del 25° ordine, che designeremo col simbolo $\mathfrak{Z}$, le cui imagini sono del tipo *)

$$(\varepsilon-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^2-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^3-1)A_s\alpha_s+(\varepsilon^4-1)A_t\alpha_t=0\ ,$$

dove, dall'imagine di una superficie si passa a quella di un'altra col semplice scambio dei coefficienti.

Ora è evidente che, posti

$$\begin{aligned}
\chi_1&=(\varepsilon^2-1)(\varepsilon^3-1)(\varepsilon^4-1)\ ,\\
\chi_2&=(\varepsilon^3-1)(\varepsilon^4-1)(\varepsilon-1)\ ,\\
\chi_3&=(\varepsilon^4-1)(\varepsilon-1)(\varepsilon^2-1)\ ,\\
\chi_4&=(\varepsilon-1)(\varepsilon^2-1)(\varepsilon^3-1)\ ,
\end{aligned}$$

si può soddisfare alla equazione scritta, ponendo

$$A_q\alpha_q:A_r\alpha_r:A_s\alpha_s:A_t\alpha_t=\chi_1\lambda_1:\chi_2\lambda_2:\chi_3\lambda_3:\chi_4\lambda_4$$

colla condizione

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0\ .$$

Allora le coordinate del punto corrente sulla superficie $\mathfrak{Z}$, che si sta considerando, sono della forma

$$\begin{aligned}
\overset{4}{A}_p x_p&\equiv-(\chi_1\lambda_1+\chi_2\lambda_2+\chi_3\lambda_3+\chi_4\lambda_4)^5\ ,\\
\overset{4}{A}_q x_q&\equiv\quad\chi_1{}^5\lambda_1{}^5\\
\overset{4}{A}_r x_r&\equiv\quad\chi_2{}^5\lambda_2{}^5\\
\overset{4}{A}_s x_s&\equiv\quad\chi_3{}^5\lambda_3{}^5\\
\overset{4}{A}_t x_t&\equiv\quad\chi_4{}^5\lambda_4{}^5
\end{aligned}$$

colla condizione $\Sigma\lambda=0$.

Le superficie doppie della specie $\mathfrak{Z}$ sono in numero di 12, e formano un aggruppamento notevole che merita di essere studiato e sul quale ritorneremo.

---

*) Qui è da osservare, analogamente a ciò che si fece al n.° 20, che l'equazione generica del caso

$$(\varepsilon^{\tau'}-1)A_q\alpha_q+(\varepsilon^{\tau''}-1)A_r\alpha_r+(\varepsilon^{\tau'''}-1)A_s\alpha_s+(\varepsilon^{\tau^{IV}}-1)A_t\alpha_t=0$$

$$(\tau'\mp\tau''\mp\tau'''\mp\tau^{IV}=1,2,3,4)$$

priva del termine col fatto $A_p\alpha_p$, si può trasformare *identicamente* in una (equivalente) con questo termine e priva invece di uno qualunque degli altri indici q, r, s, t.— Quindi basterà prendere in considerazione questa sola registrata.

§ IV. — Le sezioni con piani e con spazi ordinàri.

35. È evidente che tagliando una $\Xi_{m-1}^{n^{m-1}}$ con un piano $\mathbf{S}_2$ di [X] si ottiene una curva d'ordine n^{m-1}. Se diciamo z_1, z_2, z_3 le coordinate di punto in questo piano riferite ad un triangolo e'e''e''', le coordinate dello stesso punto riferito alla figura [U] sono delle forme:

$$x_1 \equiv e'_1 z_1 + e''_1 z_2 + e'''_1 z_3 = \varphi_1(z_1, z_2, z_3) = \varphi_1(z)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{m+1} \equiv e'_{m+1} z_1 + e''_{m+1} z_2 + e'''_{m+1} z_3 = \varphi_{m+1}(z_1, z_2, z_3) = \varphi_{m+1}(z)$$

e quindi l'equazione della medesima curva f sarà:

$$\sqrt[n]{A_1^{n-1}\varphi_1(z)} + \sqrt[n]{A_2^{n-1}\varphi_2(z)} + \cdots + \sqrt[n]{A_{m+1}^{n-1}\varphi_{m+1}(z)} = 0 \, .$$

Possiamo dunque affermare che *una curva piana di equazione*

$$\sum_1^{m+1}{}_i \sqrt[n]{A_i^{n-1}(e'_i z_1 + e''_i z_2 + e'''_i z_3)} = 0$$

è dell'ordine n^{m-1}, *è incontrata da ciascuna delle rette* $\varphi_i(z) = 0$ *in* n^{m-2} *punti, in ciascuno dei quali ha luogo un* n-*contatto.*

Le rigate d'ordine n^{m-3} e ad $m-2$ dimensioni, n-ple per $\Xi_{m-1}^{n^{m-1}}$, sono segate dal piano in questione in gruppi di n^{m-3} punti n-pli per la curva che esaminiamo. Tali gruppi di punti n-pli sono variamente distribuiti: così quelli che provengono dai coni n-pli giacciono, ciascun gruppo, sulle rette

$$A_h^{n-1}\varphi_h - A_i^{n-1}\varphi_i = 0 \qquad \text{per } n \text{ pari},$$

$$A_h^{n-1}\varphi_h + A_i^{n-1}\varphi_i = 0 \qquad \text{per } n \text{ dispari}.$$

In corrispondenza a ciascuna varietà semplicemente doppia di Ξ_{m-1} avremo dei gruppi di n^{m-2} punti semplicemente doppi per la curva sezione, i quali gruppi saranno rettilinei quando le varietà doppie, di cui essi sono le tracce, appartengano a degli $(m-1)$-spazi.

Tali sono i gruppi di punti doppi provenienti dalle varietà doppie di cui si è parlato al n.° **9**; a proposito de' quali osserveremo che, sulle rette dei gruppi di punti n-pli, nel caso di n pari esistono $\frac{n-2}{2}$ di codesti punti doppi, mentre sulle rette di eguali equazioni ne esistono $\frac{n-1}{2}$, per n dispari.

36. Uno spazio ordinario $\mathbf{S}_3$ di [X] taglia la varietà Ξ_{m-1} in una superficie **F** ordinaria, di ordine n^{m-1}. Se diciamo z_1, z_2, z_3, z_4 le coordinate di punto in $\mathbf{S}_3$ riferito ad

un quadrangolo (tetraedro) $e'e''e'''e^{IV}$, le coordinate del medesimo punto rispetto alla figura [U] sono della forma

$$x_1 \equiv e'_1 z_1 + e''_1 z_2 + e'''_1 z_3 + e^{IV}_1 z_4 = \psi_1(z)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{m+1} \equiv e'_{m+1} z_1 + e''_{m+1} z_2 + e'''_{m+1} z_3 + e^{IV}_{m+1} z_4 = \psi_{m+1}(z) .$$

L'equazione della superficie **F** nel medesimo sistema di coordinate è quindi

$$\sqrt[n]{A_1^{n-1}\psi_1(z)} + \cdots + \sqrt[n]{A_{m+1}^{n-1}\psi_{m+1}(z)} = 0 .$$

Possiamo allora asserire che *le superficie di uno spazio ordinario, le cui equazioni sono della forma*

$$\sum_{1}^{m+1}{}_i \sqrt[n]{A_i^{n-1}(e'_i z_1 + e''_i z_2 + e'''_i z_3 + e^{IV}_i z_4)} = 0 ,$$

sono dell'ordine n^{m-1}: *ogni piano* $\psi_i(z) = 0$ *ha con esse un* n-*contatto lungo una curva di ordine* n^{m-2} *del tipo di quelle del num.* **35.** — *Ogni piano passante per una delle* $\binom{m+1}{2}$ *rette* $\psi_h = 0, \psi_i = 0$ *taglia la superficie* **F** *in* n *curve d'ordine* n^{m-2} (n.° **6**).

Le tracce delle varietà n-ple o doppie per Ξ_{m-1} saranno curve n-ple o doppie per la superficie **F**.

Quindi, *sulla superficie* F *esistono* $\binom{m+1}{2}$ *curve* n-*ple piane d'ordine* n^{m-3}, *i cui piani hanno equazioni della forma*

$$A_h^{n-1}\psi_h - A_i^{n-1}\psi_i = 0 , \qquad \textit{per n pari} ,$$

od

$$A_h^{n-1}\psi_h + A_i^{n-1}\psi_i = 0 , \qquad \textit{per n dispari} .$$

Esistono poi altre curve n-*ple gobbe formanti gruppi diversamente caratterizzati, corrispondenti ai diversi gruppi di rigate* n-*ple* (n.° **7**).

Esistono infine sulle superficie **F** *vari gruppi di curve doppie, fra i quali si distinguono* $\binom{m+1}{2}$ *gruppi, ciascuno formato di* $\binom{n-1}{2}$ *curve doppie piane, giacenti per ogni gruppo in piani passanti per le rette* $\psi_h = 0$, $\psi_i = 0$; *e fra queste si notano* $\frac{n-2}{2}$, *se* n *è pari od* $\frac{n-1}{2}$, *se* n *è dispari, curve doppie, giacenti nei piani*

$$A_h^{n-1}\psi_h - A_i^{n-1}\psi_i = 0 .$$

Le curve n-*ple sono tutte d'ordine* n^{m-3}, *e quelle doppie, piane o sghembe sono dell'ordine* n^{m-2}.

Napoli, Ottobre 1898.

finita di stampare il dì 31 Gennaio 1899

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE SECONDA

VOL. IX.

CON 12 TAVOLE

NAPOLI
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE
DIRETTA DA E. DE RUBERTIS FU MICHELE
1899